# Χρηματοοικονομική Ι

## Ενότητα 4: Η Χρονική Αξία του Χρήματος (1/2)

**Ιωάννης Ταμπακούδης**

**Τμήμα Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων**

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Εισαγωγικές Παρατηρήσεις

- Η **χρονική αξία του χρήματος** αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι η αξία μιας νομισματικής μονάδας (π.χ. €1) μεταβάλλεται μέσα στο χρόνο.
- Αλήθεια, θα δανείζατε €10.000 εάν, ξεπερνώντας τις όποιες επιφυλάξεις, πιστεύατε ότι θα σας επιστραφεί το ίδιο ακριβώς ποσό 10 χρόνια μετά;
- Αντιθέτως, αν σας προτείνονταν να μοιραστείτε τα όποια κέρδη και αντί των €10.000 που δανείσατε να σας επιστραφούν €15.000 τότε η απάντησή σας θα ήταν κατά πάσα πιθανότατα θετική.
- Γιατί θα συνέβαινε αυτό; Μα επειδή θα θεωρούσατε ότι τα σημερινά €10.000 που θα δανείζατε θα ήταν ισάξια με €15.000 και όχι με €10.000 έπειτα από 10 έτη.
- **Πίνακας 1** Η Αξία του Χρήματος στο Χρόνο

| κενό | 1 € του έτους x, | αξίζει περισσότερο από | 1 € του έτους x+1 |
|---|---|---|---|
| | €1 $_{x}$ | > | €1 $_{x+1}$ |
| *(αν x=2014)* | €1 $_{2014}$ | > | €1 $_{2015}$ |
| Κατά αναλογία | ένα χρηματικό ποσό του έτους x, | αξίζει περισσότερο από | ένα χρηματικό ποσό του έτους x+1 |
| | €10.000 $_{x}$ | > | €10.000 $_{x+1}$ |
| *(αν x=2014)* | €10.000 $_{2014}$ | > | €10.000 $_{2015}$ |

# Τόκος

- Εν ολίγοις, αν σήμερα δανείσετε ένα ευρώ (€1), μελλοντικά θα επιθυμείτε να σας επιστραφεί κάτι παραπάνω. Αυτό το «κάτι παραπάνω» ονομάζεται **τόκος**.

- **Πίνακας 2** Ισοδυναμία Χρηματικών Ποσών στο Χρόνο

| κενό | 1 € του έτους x, | θεωρείται ισοδύναμο με | ένα ευρώ του έτους (x+1) + τον τόκο |
|---|---|---|---|
| | €1 $_{x}$ | = | €1 $_{x+1}$ + τον τόκο |
| *(αν x=2014)* | €1 $_{2014}$ | = | €1 $_{2015}$ + τον τόκο |
| Κατά αναλογία | ένα χρηματικό ποσό του έτους x, | θεωρείται ισοδύναμο με | ένα χρηματικό ποσό του έτους x+1 |
| | €10.000 $_{x}$ | = | €10.000 $_{x+1}$ + τον τόκο |
| *(αν x=2014)* | €10.000 $_{2014}$ | = | €10.000 $_{2015}$ + τον τόκο |

- Η αξία του σημερινού ευρώ είναι διαφορετική από την αξία ενός ευρώ ένα χρόνο μετά. Η σημερινή αξία του λέγεται **«παρούσα αξία»** ενώ η αξία του στο τέλος του έτους λέγεται **«μελλοντική αξία».**

- Σε γενικές γραμμές, η μελλοντική αξία ενός ποσού είναι μικρότερη από την παρούσα αξία του εν λόγω ποσού.

- Είναι αυτονόητο ότι μεταξύ του να μας δωρίσουν σήμερα €10.000 να μου δωρίσουν €10.000 100 χρόνια μετά, θα επιλέγαμε το πρώτο ενδεχόμενο.

# Τόκος (συν.)

- Ποιοι είναι οι λόγοι που τελικά δέχομαι να ανταλλάξω το σημερινό ευρώ με κάτι περισσότερο από ένα μελλοντικό ευρώ;
  - η αβεβαιότητα των μελλοντικών συναλλαγών
  - η απώλεια των κερδών από μια επένδυση την οποία δεν πραγματοποιώ
  - η αναβολή της τρέχουσας κατανάλωσης έναντι κατανάλωσης στο μέλλον(ένα κόστος ευκαιρίας)
- Τι θα πρέπει να αντισταθμίσει η μελλοντική προσαύξηση (δηλαδή τον τόκο);
  - τον κίνδυνο
  - την χρονική περίοδο
  - το βαθμό φερεγγυότητας του δανειολήπτη
- Ο τόκος θα πρέπει να καλύπτει το σύνολο των δυνητικών απωλειών.

# Επιτόκιο

- Τόκος είναι το αντιστάθμισμα που σου προσφέρεται για το σύνολο του επενδυμένου κεφαλαίου και για όλη τη χρονική περίοδο δανεισμού του κεφαλαίου.
- Το **επιτόκιο** είναι το αντιστάθμισμα που σου προσφέρεται για εκατό χρηματικές μονάδες (δηλαδή 100 ευρώ) για ένα και μοναδικό έτος.
  - Ο τόκος εκφράζεται πάντα σε χρηματικές μονάδες (π.χ. ευρώ ή δολάρια) ενώ το επιτόκιο σε ποσοστιαίες (π.χ. 5%, 10%).
  - Το επιτόκιο μπορεί να είναι σταθερό (ίδιο) για ολόκληρη την πολυετή περίοδο δανεισμού ή μπορεί και να μεταβάλλεται από έτος σε έτος. Κατά αντιστοιχία προσδιορίζεται και ο τόκος.

# Μελλοντική Αξία. Απλός Τόκος

- Ο **απλός τόκος** είναι το επιπρόσθετο ποσό που καταβάλλεται βάσει του επιτοκίου και του αρχικού κεφαλαίου σε μία χρονική περίοδο.
  - Έτσι λοιπόν εάν κάποιος επενδύσει €1.000 για ένα έτος με επιτόκιο 5% στο τέλος του έτους θα λάβει τόκο ύψους €50.
  - Ο επενδυτής μπορεί να επανεπενδύσει το αρχικό του κεφάλαιο των €1.000 για ένα ακόμη έτος, ωστόσο το ύψος του τόκου θα παραμείνει σταθερό και ίσο με €50.
- Ο υπολογισμός του απλού τόκου προϋποθέτει την ανάληψη και όχι την κεφαλαιοποίηση του ετήσιου τόκου εκ μέρους του επενδυτή, ο οποίος επανεπενδύει μόνο το αρχικό του κεφάλαιο.
  - Σε περίπτωση που ο παραπάνω επενδυτής έχει πενταετή επενδυτικό ορίζοντα στο τέλος του $5^{ου}$ έτους θα λάβει συνολικά €1.250, προερχόμενα από το αρχικό κεφάλαιο των €1.000 και τους τόκους ύψους €250 (€50 × 5 έτη).

# Μελλοντική Αξία. Απλός Τόκος *(συν.)*

- Γενικότερα, η μελλοντική αξία ενός ποσού έπειτα από μία χρονική περίοδο δίνεται από την παρακάτω Εξίσωση:

$$FV_1 = PV_0(1+i) = PV_0 + (PV_0 \times i)$$

- Επίσης, η μελλοντική αξία ενός ποσού έπειτα από  n χρονικές περιόδους, δίνεται από την παρακάτω Εξίσωση:

$$FV_n = PV_0 + (PV_0 \times i \times n) = PV_0 + (PV_0 \times i) \times n$$

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Ένας ιδιώτης επενδύει €1.000 για 7 έτη με επιτόκιο 4%. Να υπολογισθεί το τελικό ποσό που θα λάβει ο επενδυτής στη λήξη της επένδυσης με δεδομένο ότι τοκίζεται μόνο το αρχικό κεφάλαιο.
- **Λύση:**
- Η παρούσα αξία της επένδυσης είναι €1.000, το επιτόκιο 4% και ο αριθμός των χρονικών περιόδων 7. Χρησιμοποιώντας την Εξίσωση Μελλοντικής αξίας, η αξία της επένδυσης θα είναι:

$$FV_n = PV_0 + (PV_0 \times i \times n) \Rightarrow FV_7 = €1.000 + (€1.000 \times 0{,}04 \times 7) = €1.000 + €280 = €1.280$$

- Συνεπώς, έπειτα από 7 έτη ο επενδυτής θα λάβει €1.280.

# Μελλοντική Αξία. Ανατοκισμός ή Σύνθετος Τόκος

- Ο **ανατοκισμός ή σύνθετος τόκος** προκύπτει από το αρχικό κεφάλαιο καθώς και από τους δεδουλευμένους τόκους των προηγούμενων περιόδων.
  - Σε αυτή την περίπτωση δεν γίνεται ανάληψη του τόκου της κάθε περιόδου, όπως συνέβαινε στον απλό τόκο, αλλά αντιθέτως ο τόκος κάθε περιόδου κεφαλαιοποιείται.
  - Συνεπώς, ο τόκος κάθε περιόδου είναι μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο της προηγούμενης και συνεπώς, η μελλοντική αξία μιας επένδυσης στο πλαίσιο του ανατοκισμού είναι συγκριτικά μεγαλύτερη από την αντίστοιχη του απλού τόκου.
  - Μάλιστα, η διαφορά αυξάνεται όσο μεγαλύτερος είναι ο χρονικός ορίζοντας της επένδυσης.
- Γενικότερα, η μελλοντική αξία ενός ποσού έπειτα από  χρονικές περιόδους με ανατοκισμό, δίνεται από την παρακάτω Εξίσωση:

$$FV_n = PV_0(1+i)^n$$

  - *Ο όρος* $(1+i)^n$ *είναι ο συντελεστής ανατοκισμού (ή συντελεστής μελλοντικής αξίας).*

# Συντελεστής Μελλοντικής Αξίας μίας Χρηματικής Μονάδας

| | Επιτόκιο | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Έτη | 1% | 2% | 3% | 4% | 5% | 6% | 7% | 8% | 9% | 10% | 11% | 12% | 13% | 14% | 15% |
| 1 | 1.010 | 1.020 | 1.030 | 1.040 | 1.050 | 1.060 | 1.070 | 1.080 | 1.090 | 1.100 | 1.110 | 1.120 | 1.130 | 1.140 | 1.150 |
| 2 | 1.020 | 1.040 | 1.061 | 1.082 | 1.103 | 1.124 | 1.145 | 1.166 | 1.188 | 1.210 | 1.232 | 1.254 | 1.277 | 1.300 | 1.323 |
| 3 | 1.030 | 1.061 | 1.093 | 1.125 | 1.158 | 1.191 | 1.225 | 1.260 | 1.295 | 1.331 | 1.368 | 1.405 | 1.443 | 1.482 | 1.521 |
| 4 | 1.041 | 1.082 | 1.126 | 1.170 | 1.216 | 1.262 | 1.311 | 1.360 | 1.412 | 1.464 | 1.518 | 1.574 | 1.630 | 1.689 | 1.749 |
| 5 | 1.051 | 1.104 | 1.159 | 1.217 | 1.276 | 1.338 | 1.403 | 1.469 | 1.539 | 1.611 | 1.685 | 1.762 | 1.842 | 1.925 | 2.011 |
| 6 | 1.062 | 1.126 | 1.194 | 1.265 | 1.340 | 1.419 | 1.501 | 1.587 | 1.677 | 1.772 | 1.870 | 1.974 | 2.082 | 2.195 | 2.313 |
| 7 | 1.072 | 1.149 | 1.230 | 1.316 | 1.407 | 1.504 | 1.606 | 1.714 | 1.828 | 1.949 | 2.076 | 2.211 | 2.353 | 2.502 | 2.660 |
| 8 | 1.083 | 1.172 | 1.267 | 1.369 | 1.477 | 1.594 | 1.718 | 1.851 | 1.993 | 2.144 | 2.305 | 2.476 | 2.658 | 2.853 | 3.059 |
| 9 | 1.094 | 1.195 | 1.305 | 1.423 | 1.551 | 1.689 | 1.838 | 1.999 | 2.172 | 2.358 | 2.558 | 2.773 | 3.004 | 3.252 | 3.518 |
| 10 | 1.105 | 1.219 | 1.344 | 1.480 | 1.629 | 1.791 | 1.967 | 2.159 | 2.367 | 2.594 | 2.839 | 3.106 | 3.395 | 3.707 | 4.046 |
| 11 | 1.116 | 1.243 | 1.384 | 1.539 | 1.710 | 1.898 | 2.105 | 2.332 | 2.580 | 2.853 | 3.152 | 3.479 | 3.836 | 4.226 | 4.652 |
| 12 | 1.127 | 1.268 | 1.426 | 1.601 | 1.796 | 2.012 | 2.252 | 2.518 | 2.813 | 3.138 | 3.498 | 3.896 | 4.335 | 4.818 | 5.350 |
| 13 | 1.138 | 1.294 | 1.469 | 1.665 | 1.886 | 2.133 | 2.410 | 2.720 | 3.066 | 3.452 | 3.883 | 4.363 | 4.898 | 5.492 | 6.153 |
| 14 | 1.149 | 1.319 | 1.513 | 1.732 | 1.980 | 2.261 | 2.579 | 2.937 | 3.342 | 3.797 | 4.310 | 4.887 | 5.535 | 6.261 | 7.076 |
| 15 | 1.161 | 1.346 | 1.558 | 1.801 | 2.079 | 2.397 | 2.759 | 3.172 | 3.642 | 4.177 | 4.785 | 5.474 | 6.254 | 7.138 | 8.137 |
| 16 | 1.173 | 1.373 | 1.605 | 1.873 | 2.183 | 2.540 | 2.952 | 3.426 | 3.970 | 4.595 | 5.311 | 6.130 | 7.067 | 8.137 | 9.358 |
| 17 | 1.184 | 1.400 | 1.653 | 1.948 | 2.292 | 2.693 | 3.159 | 3.700 | 4.328 | 5.054 | 5.895 | 6.866 | 7.986 | 9.276 | 10.761 |
| 18 | 1.196 | 1.428 | 1.702 | 2.026 | 2.407 | 2.854 | 3.380 | 3.996 | 4.717 | 5.560 | 6.544 | 7.690 | 9.024 | 10.575 | 12.375 |
| 19 | 1.208 | 1.457 | 1.754 | 2.107 | 2.527 | 3.026 | 3.617 | 4.316 | 5.142 | 6.116 | 7.263 | 8.613 | 10.197 | 12.056 | 14.232 |
| 20 | 1.220 | 1.486 | 1.806 | 2.191 | 2.653 | 3.207 | 3.870 | 4.661 | 5.604 | 6.727 | 8.062 | 9.646 | 11.523 | 13.743 | 16.367 |
| 25 | 1.282 | 1.641 | 2.094 | 2.666 | 3.386 | 4.292 | 5.427 | 6.848 | 8.623 | 10.835 | 13.585 | 17.000 | 21.231 | 26.462 | 32.919 |
| 30 | 1.348 | 1.811 | 2.427 | 3.243 | 4.322 | 5.743 | 7.612 | 10.063 | 13.268 | 17.449 | 22.892 | 29.960 | 39.116 | 50.950 | 66.212 |
| 35 | 1.417 | 2.000 | 2.814 | 3.946 | 5.516 | 7.686 | 10.677 | 14.785 | 20.414 | 28.102 | 38.575 | 52.800 | 72.069 | 98.100 | 133.176 |
| 40 | 1.489 | 2.208 | 3.262 | 4.801 | 7.040 | 10.286 | 14.974 | 21.725 | 31.409 | 45.259 | 65.001 | 93.051 | 132.782 | 188.884 | 267.864 |
| 50 | 1.645 | 2.692 | 4.384 | 7.107 | 11.467 | 18.420 | 29.457 | 46.902 | 74.358 | 117.391 | 184.565 | 289.002 | 450.736 | 700.233 | 1,083.657 |

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Ένας ιδιώτης επενδύει €1.000 για 10 έτη με επιτόκιο 10%.
  – Να υπολογισθεί το τελικό ποσό που θα λάβει ο επενδυτής στο τέλος του 10ου έτους με δεδομένο ότι η επένδυση γίνεται με ανατοκισμό.
  – Να υπολογισθεί το πρόσθετο όφελος συγκριτικά με την περίπτωση του απλού τόκου.
- **Λύση:**
  – Η παρούσα αξία της επένδυσης είναι €1.000, το επιτόκιο 10% και ο αριθμός των χρονικών περιόδων 10. Χρησιμοποιώντας την Εξίσωση Μελλοντικής αξίας, η αξία της επένδυσης θα είναι:

$$FV_n = PV_0(1+i)^n \Rightarrow FV_{10} = €1.000\,(1+0{,}1)^{10} = €1.000 \times 2{,}5937 = €2.593{,}7$$

    • Συνεπώς, έπειτα από 10 έτη με ανατοκισμό ο επενδυτής θα λάβει €2.593,7.

- Στην περίπτωση του απλού τόκου, η μελλοντική αξία της επένδυσης θα είναι:

$$FV_n = PV_0 + (PV_0 \times i \times n) \Rightarrow FV_7 = \quad €1.000 + (€1.000 \times 0{,}1 \times 10) = €1.000 + €1.000 = €2.000$$

  – Συνεπώς, έπειτα από 10 έτη ο επενδυτής θα λάβει €2.000.
  – Από τους ανωτέρω υπολογισμούς είναι προφανές πως ο επενδυτής έχει ένα πρόσθετο όφελος στην περίπτωση του ανατοκισμού ίσο με €593,7 (€2.593,7- €2.000).

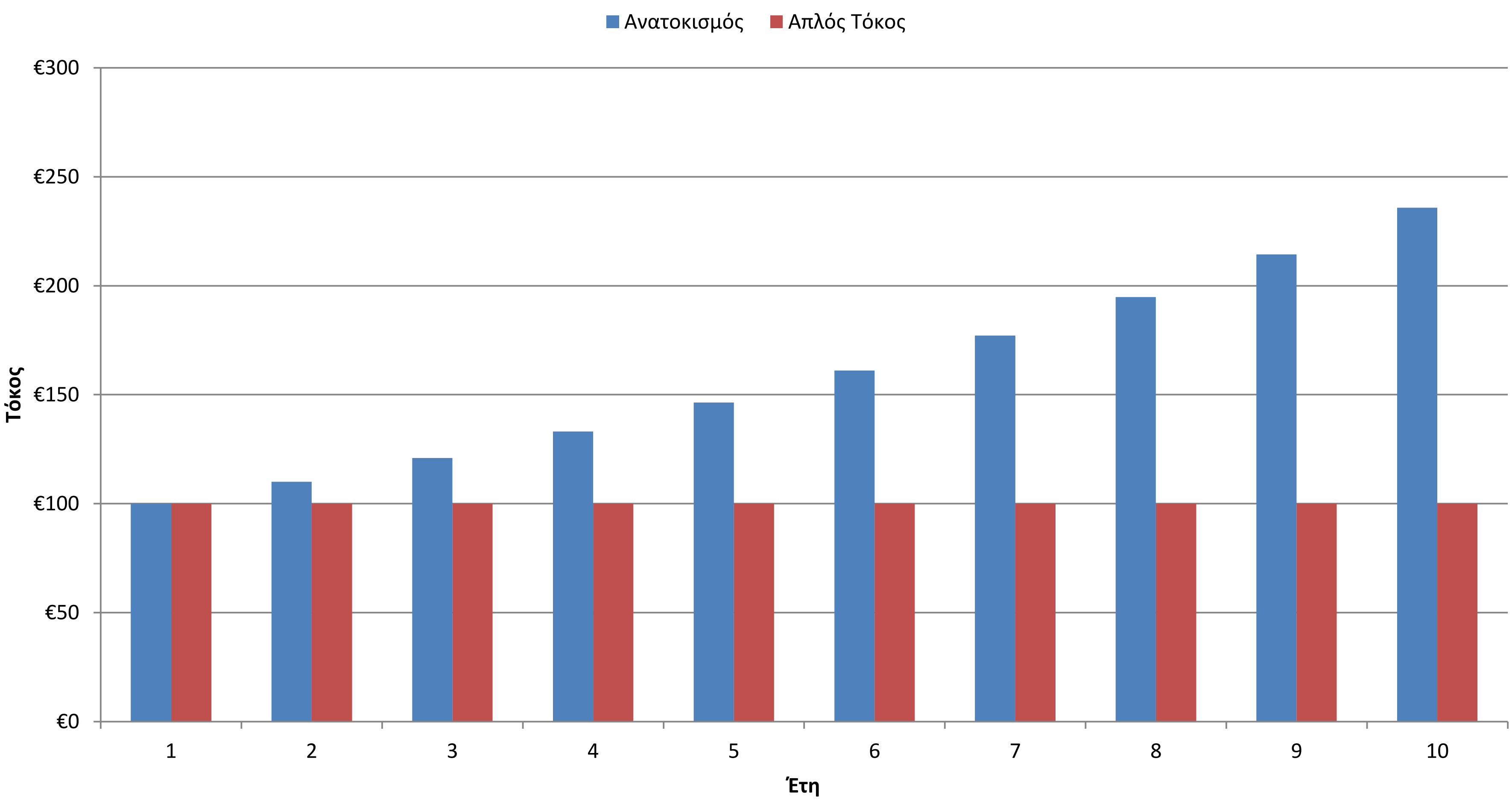
# Πίνακας 3 Μελλοντική Αξία €1.000 με Ανατοκισμό

| Έτος | Ποσό στη Αρχή του Έτους | Ετήσιος Τόκος | Ποσό στο Τέλος του Έτους |
|---|---|---|---|
| 1 | €1.000,00 | €100,00 | €1.100,00 |
| 2 | €1.100,00 | €110,00 | €1.210,00 |
| 3 | €1.210,00 | €121,00 | €1.331,00 |
| 4 | €1.331,00 | €133,10 | €1.464,10 |
| 5 | €1.464,10 | €146,41 | €1.610,51 |
| 6 | €1.610,51 | €161,05 | €1.771,56 |
| 7 | €1.771.56 | €177,16 | €1.948,72 |
| 8 | €1.948,72 | €194,87 | €2.143,59 |
| 9 | €2.143,59 | €214,36 | €2.357,95 |
| 10 | €2.357,95 | €235,79 | €2.593,74 |

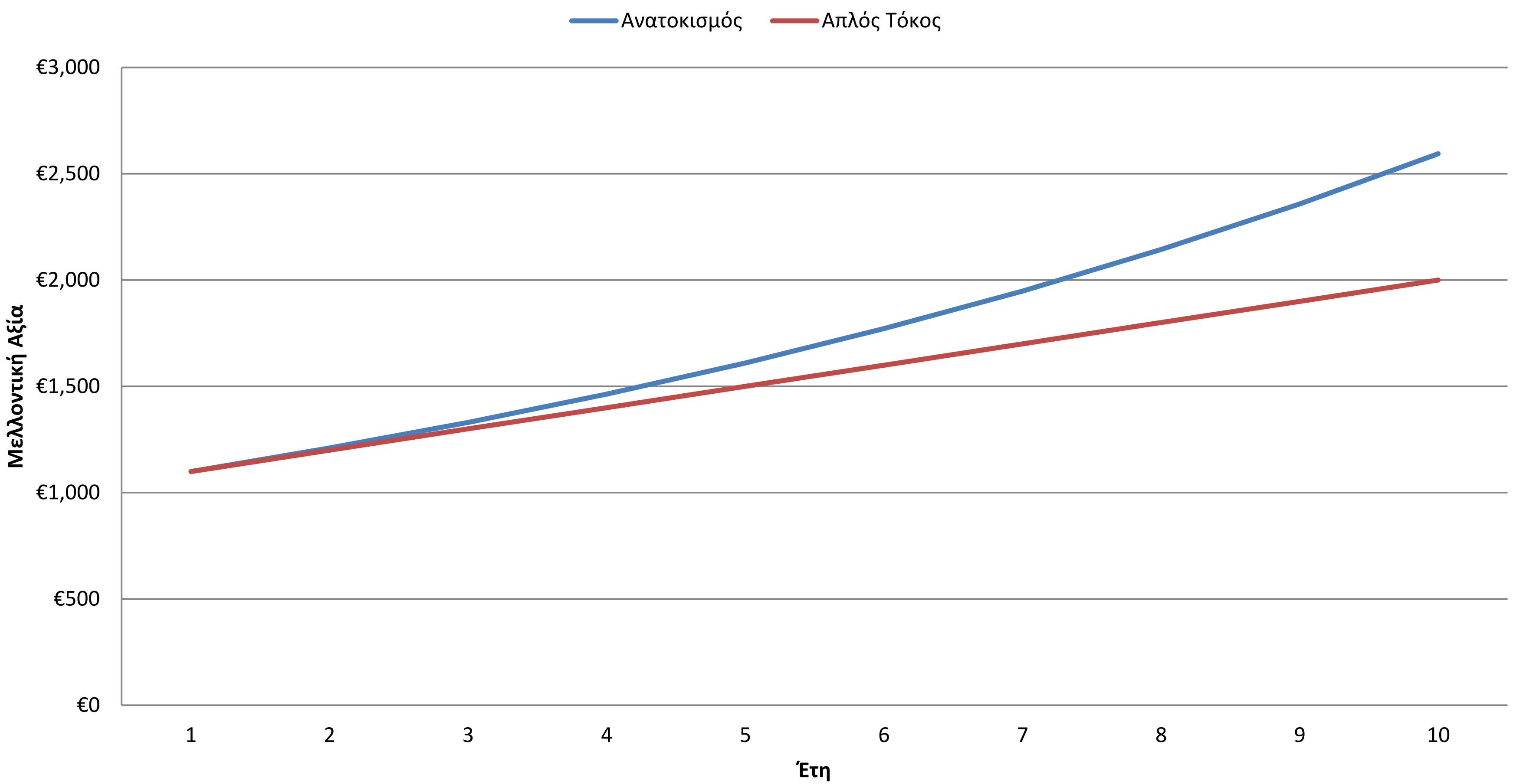
# Πίνακας 4 Μελλοντική Αξία €1.000 με Απλό Τόκο

| Έτος | Ποσό στη Αρχή του Έτους | Ετήσιος Τόκος | Ποσό στο Τέλος του Έτους |
|---|---|---|---|
| 1 | €1.000,00 | €100,00 | €1.100,00 |
| 2 | €1.100,00 | €100,00 | €1.200,00 |
| 3 | €1.200,00 | €100,00 | €1.300,00 |
| 4 | €1.300,00 | €100,00 | €1.400,00 |
| 5 | €1.400,00 | €100,00 | €1.500,00 |
| 6 | €1.500,00 | €100,00 | €1.600,00 |
| 7 | €1.600,00 | €100,00 | €1.700,00 |
| 8 | €1.700,00 | €100,00 | €1.800,00 |
| 9 | €1.800,00 | €100,00 | €1.900,00 |
| 10 | €1.900,00 | €100,00 | €2.000,00 |

# Διάγραμμα 1 Ετήσιος Τόκος με Απλό Τόκο και Ανατοκισμό



# Διάγραμμα 2 Ανάπτυξη Επένδυσης με Απλό Τόκο και Ανατοκισμό



# Παρούσα Αξία ή Προεξόφληση

- Σε πολλές περιπτώσεις η μελλοντική αξία είναι γνωστή και το ζητούμενο είναι ο υπολογισμός της **παρούσας αξίας**.
  - Σε αυτή την περίπτωση γίνεται προεξόφληση της μελλοντικής αξίας.
  - Ας υποτεθεί ότι ένας επενδυτής θέλει ξέρει πόσα χρήματα θα πρέπει να επενδύσει σήμερα έτσι ώστε με ανατοκισμό να έχει €1.000 έπειτα από 5 έτη γνωρίζοντας ότι το επιτόκιο επένδυσης είναι 7%:

$$FV_n = PV_0(1+i)^n \Rightarrow €1.000 = PV_0(1+0{,}07)^5 \Rightarrow PV_0 = \frac{€1.000}{(1+0{,}07)^5} = €713$$

- Γενικότερα, η Εξίσωση της Παρούσας αξίας προκύπτει έπειτα από αναδιάταξη της Εξίσωσης Μελλοντικής αξίας και επίλυση ως προς PV. Έτσι λοιπόν θα έχουμε:

$$FV_n = PV_0(1+i)^n \Rightarrow PV_0 = \frac{FV_n}{(1+i)^n} = FV_n \frac{1}{(1+i)^n}$$

  - *Ο όρος είναι ο συντελεστής προεξόφλησης (ή συντελεστής παρούσας αξίας).*

# Συντελεστής Παρούσας Αξίας μίας Χρηματικής Μονάδας

| | Επιτόκιο | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Έτη | 1% | 2% | 3% | 4% | 5% | 6% | 7% | 8% | 9% | 10% | 11% | 12% | 13% | 14% | 15% |
| 1 | 0.990 | 0.980 | 0.971 | 0.962 | 0.952 | 0.943 | 0.935 | 0.926 | 0.917 | 0.909 | 0.901 | 0.893 | 0.885 | 0.877 | 0.870 |
| 2 | 0.980 | 0.961 | 0.943 | 0.925 | 0.907 | 0.890 | 0.873 | 0.857 | 0.842 | 0.826 | 0.812 | 0.797 | 0.783 | 0.769 | 0.756 |
| 3 | 0.971 | 0.942 | 0.915 | 0.889 | 0.864 | 0.840 | 0.816 | 0.794 | 0.772 | 0.751 | 0.731 | 0.712 | 0.693 | 0.675 | 0.658 |
| 4 | 0.961 | 0.924 | 0.888 | 0.855 | 0.823 | 0.792 | 0.763 | 0.735 | 0.708 | 0.683 | 0.659 | 0.636 | 0.613 | 0.592 | 0.572 |
| 5 | 0.951 | 0.906 | 0.863 | 0.822 | 0.784 | 0.747 | 0.713 | 0.681 | 0.650 | 0.621 | 0.593 | 0.567 | 0.543 | 0.519 | 0.497 |
| 6 | 0.942 | 0.888 | 0.837 | 0.790 | 0.746 | 0.705 | 0.666 | 0.630 | 0.596 | 0.564 | 0.535 | 0.507 | 0.480 | 0.456 | 0.432 |
| 7 | 0.933 | 0.871 | 0.813 | 0.760 | 0.711 | 0.665 | 0.623 | 0.583 | 0.547 | 0.513 | 0.482 | 0.452 | 0.425 | 0.400 | 0.376 |
| 8 | 0.923 | 0.853 | 0.789 | 0.731 | 0.677 | 0.627 | 0.582 | 0.540 | 0.502 | 0.467 | 0.434 | 0.404 | 0.376 | 0.351 | 0.327 |
| 9 | 0.914 | 0.837 | 0.766 | 0.703 | 0.645 | 0.592 | 0.544 | 0.500 | 0.460 | 0.424 | 0.391 | 0.361 | 0.333 | 0.308 | 0.284 |
| 10 | 0.905 | 0.820 | 0.744 | 0.676 | 0.614 | 0.558 | 0.508 | 0.463 | 0.422 | 0.386 | 0.352 | 0.322 | 0.295 | 0.270 | 0.247 |
| 11 | 0.896 | 0.804 | 0.722 | 0.650 | 0.585 | 0.527 | 0.475 | 0.429 | 0.388 | 0.350 | 0.317 | 0.287 | 0.261 | 0.237 | 0.215 |
| 12 | 0.887 | 0.788 | 0.701 | 0.625 | 0.557 | 0.497 | 0.444 | 0.397 | 0.356 | 0.319 | 0.286 | 0.257 | 0.231 | 0.208 | 0.187 |
| 13 | 0.879 | 0.773 | 0.681 | 0.601 | 0.530 | 0.469 | 0.415 | 0.368 | 0.326 | 0.290 | 0.258 | 0.229 | 0.204 | 0.182 | 0.163 |
| 14 | 0.870 | 0.758 | 0.661 | 0.577 | 0.505 | 0.442 | 0.388 | 0.340 | 0.299 | 0.263 | 0.232 | 0.205 | 0.181 | 0.160 | 0.141 |
| 15 | 0.861 | 0.743 | 0.642 | 0.555 | 0.481 | 0.417 | 0.362 | 0.315 | 0.275 | 0.239 | 0.209 | 0.183 | 0.160 | 0.140 | 0.123 |
| 16 | 0.853 | 0.728 | 0.623 | 0.534 | 0.458 | 0.394 | 0.339 | 0.292 | 0.252 | 0.218 | 0.188 | 0.163 | 0.141 | 0.123 | 0.107 |
| 17 | 0.844 | 0.714 | 0.605 | 0.513 | 0.436 | 0.371 | 0.317 | 0.270 | 0.231 | 0.198 | 0.170 | 0.146 | 0.125 | 0.108 | 0.093 |
| 18 | 0.836 | 0.700 | 0.587 | 0.494 | 0.416 | 0.350 | 0.296 | 0.250 | 0.212 | 0.180 | 0.153 | 0.130 | 0.111 | 0.095 | 0.081 |
| 19 | 0.828 | 0.686 | 0.570 | 0.475 | 0.396 | 0.331 | 0.277 | 0.232 | 0.194 | 0.164 | 0.138 | 0.116 | 0.098 | 0.083 | 0.070 |
| 20 | 0.820 | 0.673 | 0.554 | 0.456 | 0.377 | 0.312 | 0.258 | 0.215 | 0.178 | 0.149 | 0.124 | 0.104 | 0.087 | 0.073 | 0.061 |
| 25 | 0.780 | 0.610 | 0.478 | 0.375 | 0.295 | 0.233 | 0.184 | 0.146 | 0.116 | 0.092 | 0.074 | 0.059 | 0.047 | 0.038 | 0.030 |
| 30 | 0.742 | 0.552 | 0.412 | 0.308 | 0.231 | 0.174 | 0.131 | 0.099 | 0.075 | 0.057 | 0.044 | 0.033 | 0.026 | 0.020 | 0.015 |
| 35 | 0.706 | 0.500 | 0.355 | 0.253 | 0.181 | 0.130 | 0.094 | 0.068 | 0.049 | 0.036 | 0.026 | 0.019 | 0.014 | 0.010 | 0.008 |
| 40 | 0.672 | 0.453 | 0.307 | 0.208 | 0.142 | 0.097 | 0.067 | 0.046 | 0.032 | 0.022 | 0.015 | 0.011 | 0.008 | 0.005 | 0.004 |
| 50 | 0.608 | 0.372 | 0.228 | 0.141 | 0.087 | 0.054 | 0.034 | 0.021 | 0.013 | 0.009 | 0.005 | 0.003 | 0.002 | 0.001 | 0.001 |

# <u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>

- Ένας ιδιώτης επιθυμεί να συγκεντρώσει €150.000 σε 30 έτη. Με δεδομένο ότι το διαθέσιμο επιτόκιο για το χρονικό διάστημα των 30 ετών είναι 6%, να υπολογισθεί το ποσό που θα πρέπει να επενδυθεί σήμερα.
- **<u>Λύση:</u>**
- Η μελλοντική αξία της επένδυσης είναι €150.000, το επιτόκιο 6% και ο αριθμός των χρονικών περιόδων 30. Χρησιμοποιώντας την Εξίσωση Παρούσας αξίας, η αξία της επένδυσης θα είναι:
- $PV_0 = FV_{30} \dfrac{1}{(1+0,06)^{30}}$ = €150.000 × 0,1741= €26.115.
- Συνεπώς, ο επενδυτής θα πρέπει να καταθέσει σήμερα €26.115.

# Συνεχής Ανατοκισμός και Προεξόφληση

- Όταν ο ανατοκισμός λαμβάνει χώρα περισσότερες από μία φορά μέσα σε ένα έτος, θα έχουμε:

  – Αν πάρουμε για παράδειγμα την περίπτωση επένδυσης €1.000 με επιτόκιο 8% για 4 έτη, τότε στο τέλος του 4ου έτους η μελλοντική αξία θα είναι:

$$FV_4 = €1.000 \times (1 + 0,08)^4 = €1.360,49$$

  – Αν όμως, ο ανατοκισμός γίνεται κάθε έξι μήνες, τότε το επιτόκιο θα πρέπει να γίνει εξαμηνιαίο και άρα 4% (8%/2) και ο αριθμός των περιόδων 8 (4×2).

$$FV_4 = €1.000 \times (1 + 0,08/2)^{4\times 2} = €1.000 \times (1 + 0,04)^8 = €1.368,57$$

  – Αν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο, τότε η μελλοντική αξία των €1.000 στο τέλος του 4ου έτους θα είναι:

$$FV_4 = €1.000 \times (1 + 0,08/4)^{4\times 4} = €1.000 \times (1 + 0,02)^{16} = €1.372,79$$

# Συνεχής Ανατοκισμός και Προεξόφληση *(συν.)*

- Αν ο ανατοκισμός γίνεται σε ημερήσια βάση, τότε η μελλοντική αξία των €1.000 στο τέλος του 4ου έτους θα είναι:

$$FV_4 = €1.000 \times (1 + 0{,}08/360)^{4\times360} = €1.000 \times (1 + 0{,}000222)^{1{,}440} = €1.377{,}08$$

- Τέλος, αν ο ανατοκισμός είναι συνεχής, τότε χρησιμοποιείται ο αριθμός Euler e και η μελλοντική αξία των €1.000 στο τέλος του 4ου έτους θα είναι:

$$FV_4 = €1.000 \times e^{0{,}08\times4} = €1.377{,}13$$

- Γενικότερα, στην περίπτωση που ο ανατοκισμός γίνεται σε χρονικά διαστήματα μικρότερα του έτους, η Εξίσωση μελλοντικής αξίας θα είναι:

$$FV_n = PV_0 (1 + \frac{i}{m})^{m\times n}$$

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Αν υποθέσουμε ότι ένας επενδυτής επιθυμεί να συγκεντρώσει €1.000 σε 4 έτη με επιτόκιο 8%, τότε να υπολογισθεί το ποσό που απαιτείται σήμερα με βάση το αν ο ανατοκισμός είναι ετήσιος, εξάμηνος, τρίμηνος, ημερήσιος ή συνεχής.
- **Λύση:**
  - Ετήσιος ανατοκισμός (€735,03)
  - Εξάμηνος ανατοκισμός (€730,69)
  - Τρίμηνος ανατοκισμός (€728,45)
  - Ημερήσιος ανατοκισμός (€726,17)
  - Συνεχής ανατοκισμός (€726,15)
- Συμπερασματικά, στην περίπτωση της προεξόφλησης όσο μικρότερο είναι το χρονικό διάστημα ανατοκισμού τόσο μικρότερη είναι η παρούσα αξία.

# Υπολογισμός του Επιτοκίου

- Η Εξίσωση Μελλοντικής αξίας είναι μία Εξίσωση *n - βαθμού* με τέσσερις μεταβλητές και αν είναι γνωστές οι τρεις, τότε η Εξίσωση μπορεί να αναδιαταχθεί ώστε να υπολογισθεί και η τέταρτη μεταβλητή.
  - Ας υποτεθεί ότι ένας επενδυτής επιθυμεί να μάθει το επιτόκιο έτσι ώστε τα €1.000 που διαθέτει σήμερα να γίνουν €1.500 σε 5 έτη.

$$FV_n = PV_0(1+i)^n \Rightarrow \text{€}1.500 = \text{€}1.000(1+i)^5 \Rightarrow \frac{\text{€}1.500}{\text{€}1.000} = (1+i)^5 \Rightarrow$$

$$\sqrt[5]{\frac{\text{€}1.500}{\text{€}1.000}} = (1+i) \Rightarrow i = \sqrt[5]{1{,}5} - 1 = 1{,}0845 - 1 = 0{,}0845 = 8{,}45\%$$

  - Γενικότερα, ο υπολογισμός του επιτοκίου γίνεται από την παρακάτω Εξίσωση:

$$i = \sqrt[n]{\frac{FV_n}{PV_o}} - 1$$

# <u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>

- Ένας ιδιώτης τοποθέτησε €250.000 σε μία επένδυση πριν 10 έτη και σήμερα τα χρήματά του έχουν τριπλασιαστεί. Να υπολογισθεί το ετήσιο επιτόκιο της επένδυσης.
  - **<u>Λύση:</u>**
  - Η παρούσα αξία της επένδυσης είναι €250.000, η μελλοντική αξία €750.000 και ο αριθμός των χρονικών περιόδων 10. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη Εξίσωση το συνεπαγόμενο ετήσιο επιτόκιο της επένδυσης θα είναι:

$$i = \sqrt[n]{\frac{FV_n}{PV_o}} - 1 = \sqrt[10]{\frac{€750.000}{€250.000}} - 1 = \sqrt[10]{3} - 1 = 1{,}1161 - 1 = 0{,}1161 = 11{,}61\%$$

  - Συνεπώς, τα χρήματα του επενδυτή αυξανόταν ετησίως με 11,61%.

# Υπολογισμός των Χρονικών Περιόδων

Σε περίπτωση που η παρούσα αξία, η τελική αξία και το επιτόκιο είναι γνωστά και ζητείται να υπολογισθεί ο αριθμός των χρονικών περιόδων, τότε η Εξίσωση Μελλοντικής αξίας αναδιατάσσεται και επιλύσουμε ως προς n.

– Έστω για παράδειγμα ότι ένας επενδυτής επιθυμεί να προσδιορίσει το απαιτούμενο χρονικό διάστημα έτσι ώστε να αυξήσει τα χρήματά του από €1.000 σε €1.700 γνωρίζοντας πως το επιτόκιο είναι 5%.

$$FV_n = PV_0(1+i)^n \Rightarrow €1.700 = €1.000(1+0{,}05)^n \Rightarrow \frac{€1.700}{€1.000} = (1+0{,}05)^n \Rightarrow 1{,}7 = (1+0{,}05)^n$$

– Στο σημείο αυτό θα πρέπει να λογαριθμήσουμε τα δύο μέρη της Εξίσωσης, οπότε θα έχουμε:

$$\ln 1{,}7 = \ln(1+0{,}05)^n \Rightarrow \ln 1{,}7 = n\ln(1+0{,}05) \Rightarrow n = \frac{\ln 1{,}7}{\ln 1{,}05} = 10{,}88$$

Γενικότερα, ο υπολογισμός των χρονικών περιόδων γίνεται από την παρακάτω Εξίσωση:

$$n = \frac{\ln FV_n - \ln PV_0}{\ln(1+i)}$$

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Ένας ιδιώτης διαθέτει €250.000 και σκοπεύει να τα τοποθετήσει σε μία επένδυση με επιτόκιο 9%. Να υπολογισθεί σε πόσα χρόνια θα αυξήσει τα χρήματά του κατά €120.000.
  - **Λύση:**
  - Η παρούσα αξία της επένδυσης είναι €250.000, η μελλοντική αξία €370.000 και το επιτόκιο 9%. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη Εξίσωση το χρονικό διάστημα που απαιτείται για την αύξηση της περιουσίας του ιδιώτη κατά €120.000 θα είναι:

$$n = \frac{\ln FV_n - \ln PV_0}{\ln(1+i)} = \frac{\ln €370.000 - \ln €250.000}{\ln 1{,}09} = 4{,}55$$

  - Συνεπώς, τα χρήματα του επενδυτή θα αυξηθούν κατά €120.000 σε περίπου 4 έτη και 7 μήνες.

# Τέλος Ενότητας