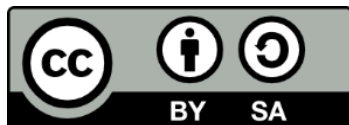


Αρχές Χρηματοοικονομικής

Ενότητα 5: Η Χρονική Αξία του Χρήματος (2/2)

Ιωάννης Ταμπακούδης
Τμήμα Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
Πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



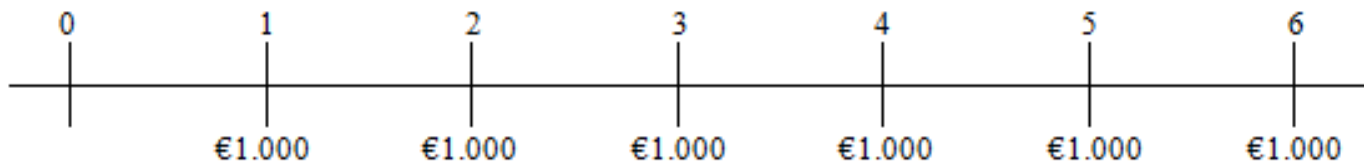
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Ράντες

- Σε πολλές εφαρμογές της χρηματοοικονομικής εμφανίζεται μια ακολουθία χρηματικών ροών που πραγματοποιείται (εισπράττεται ή καταβάλλεται) ανά τακτά χρονικά διαστήματα.
 - Τα χρονικά διαστήματα μπορεί να είναι ανά έτος, εξάμηνο, μήνα, κτλ.
- Αυτή η ακολουθία καλείται **ράντα** και κάθε χρηματική ροή αποτελεί τον όρο ράντας.
 - Μία ράντα είναι *πρόσκαιρη* όταν ο αριθμός των όρων της είναι πεπερασμένος και *διηνεκής* όταν το πλήθος των όρων της τείνει στο άπειρο.
 - Όταν οι χρηματικές ροές πραγματοποιούνται στο τέλος κάθε περιόδου η ράντα είναι *ληξιπρόθεσμη*, ενώ όταν πραγματοποιούνται στην αρχή κάθε περιόδου είναι *προκαταβλητέα*.
 - Μία ράντα μπορεί να είναι *σταθερή* όταν οι όροι της παραμένουν ίσοι ή *μεταβλητή* όταν οι όροι της μεταβάλλονται.

Μελλοντική Αξία Ληξιπρόθεσμης Ράντας

- Ας υποθεθεί ότι ένας ιδιώτης επενδύει στο τέλος κάθε έτους €1.000 για 6 έτη με επιτόκιο 10%. Ποια θα είναι η μελλοντική αξία την επένδυσής στο τέλος του 6^{ου} έτους;

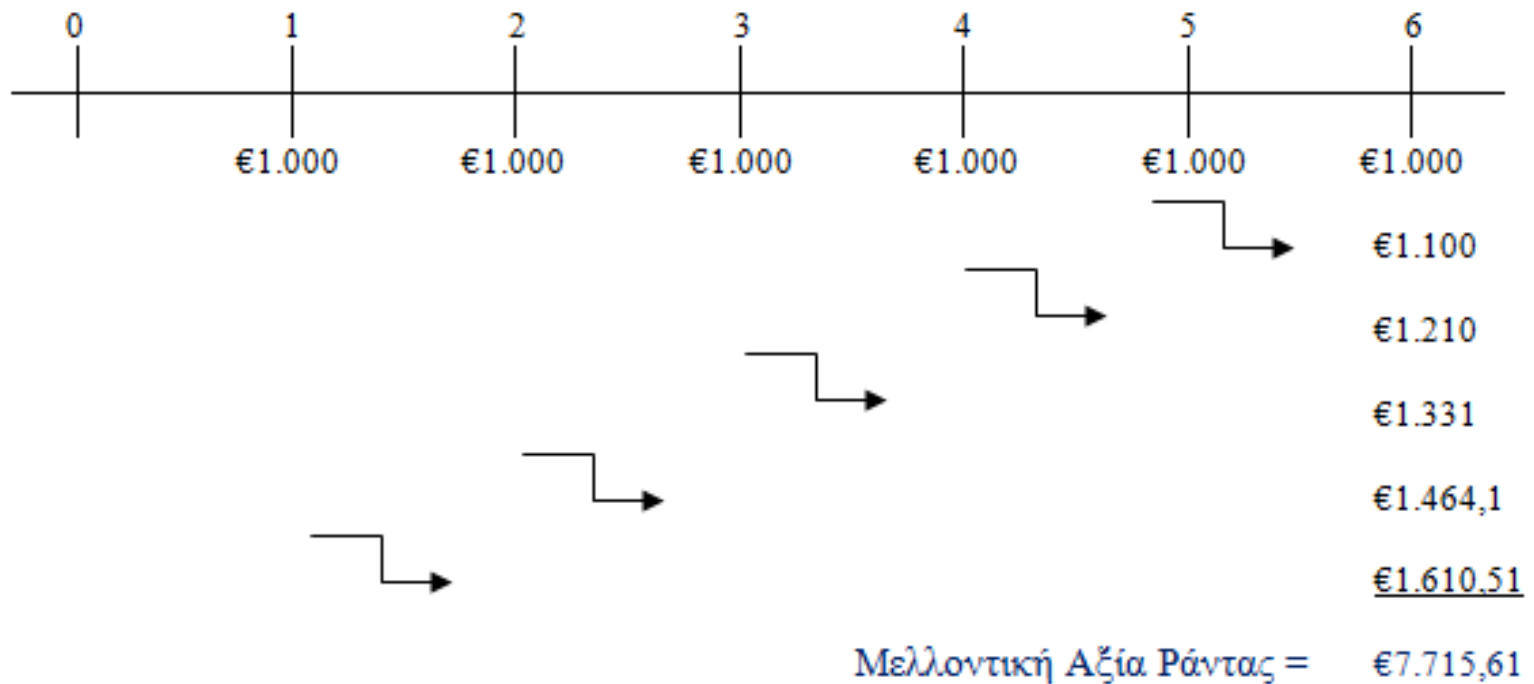


- Για τον κάθε όρο της ράντας υπολογίζεται η μελλοντική αξία στο τέλος του 6^{ου} έτους:

<u>Έτος Καταβολής</u>	<u>Μελλοντική Αξία Όρου Ράντας στο τέλος του 6^{ου} έτους</u>
1	$FV_6 = €1.000(1,1)^5 = €1.610,51$
2	$FV_6 = €1.000(1,1)^4 = €1.464,1$
3	$FV_6 = €1.000(1,1)^3 = €1.331$
4	$FV_6 = €1.000(1,1)^2 = €1.210$
5	$FV_6 = €1.000(1,1)^1 = €1.100$
6	$FV_6 = €1.000(1,1)^0 = €1.000$
<u>Μελλοντική Αξία Ράντας</u>	<u>€7.715,61</u>

Μελλοντική Αξία Ληξιπρόθεσμης Ράντας (συν.)

- Ο υπολογισμός της μελλοντικής αξίας της ράντας στον άξονα του χρόνου καταγράφεται ως εξής:



Μελλοντική Αξία Ληξιπρόθεσμης Ράντας (συν.)

- Συνεπώς, για τον υπολογισμό της μελλοντικής αξίας της ράντας, αρχικά υπολογίζεται η μελλοντική αξία του κάθε όρου ξεχωριστά και στη συνέχεια αθροίζονται όλες οι μελλοντικές αξίες.

$$FV_6 = €1.000(1+0,1)^5 + €1.000(1+0,1)^4 + €1.000(1+0,1)^3 + €1.000(1+0,1)^2 + €1.000(1+0,1)^1 + €1.000(1+0,1)^0 = €7.715,61$$

- Από την τελευταία Εξίσωση βγάζοντας κοινό παράγοντα τον όρο της ράντας έχουμε:

$$\begin{aligned} FV_6 &= €1.000(1+0,1)^5 + €1.000(1+0,1)^4 + €1.000(1+0,1)^3 + €1.000(1+0,1)^2 + \\ &€1.000(1+0,1)^1 + €1.000(1+0,1)^0 = \\ &= €1.000 \left[(1+0,1)^5 + (1+0,1)^4 + (1+0,1)^3 + (1+0,1)^2 + (1+0,1)^1 + (1+0,1)^0 \right] = \\ &= €1.000 \sum_{t=1}^6 (1+0,1)^{6-t} \end{aligned}$$

Μελλοντική Αξία Ληξιπρόθεσμης Ράντας (συν.)

- Συνεπώς, η Εξίσωση υπολογισμού της μελλοντικής αξίας μιας ληξιπρόθεσμης ράντας είναι:

$$FV_n = CF \sum_{t=1}^N (1+i)^{N-t} = CF \left[\frac{(1+i)^N - 1}{i} \right]$$

- Ο όρος $\left[\frac{(1+i)^N - 1}{i} \right]$ είναι ο συντελεστής μελλοντικής αξίας ράντας.

Συντελεστής Μελλοντικής Αξίας

Ράντας 1€

Έτη	Επιτόκιο														
	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%
1	1.000	1.020	1.030	1.040	1.050	1.060	1.070	1.080	1.090	1.100	1.110	1.120	1.130	1.140	1.150
2	2.010	2.020	2.030	2.040	2.050	2.060	2.070	2.080	2.090	2.100	2.110	2.120	2.130	2.140	2.150
3	3.030	3.060	3.091	3.122	3.153	3.184	3.215	3.246	3.278	3.310	3.342	3.374	3.407	3.440	3.473
4	4.060	4.122	4.184	4.246	4.310	4.375	4.440	4.506	4.573	4.641	4.710	4.779	4.850	4.921	4.993
5	5.101	5.204	5.309	5.416	5.526	5.637	5.751	5.867	5.985	6.105	6.228	6.353	6.480	6.610	6.742
6	6.152	6.308	6.468	6.633	6.802	6.975	7.153	7.336	7.523	7.716	7.913	8.115	8.323	8.536	8.754
7	7.214	7.434	7.662	7.898	8.142	8.394	8.654	8.923	9.200	9.487	9.783	10.089	10.405	10.730	11.067
8	8.286	8.583	8.892	9.214	9.549	9.897	10.260	10.637	11.028	11.436	11.859	12.300	12.757	13.233	13.727
9	9.369	9.755	10.159	10.583	11.027	11.491	11.978	12.488	13.021	13.579	14.164	14.776	15.416	16.085	16.786
10	10.462	10.950	11.464	12.006	12.578	13.181	13.816	14.487	15.193	15.937	16.722	17.549	18.420	19.337	20.304
11	11.567	12.169	12.808	13.486	14.207	14.972	15.784	16.645	17.560	18.531	19.561	20.655	21.814	23.045	24.349
12	12.683	13.412	14.192	15.026	15.917	16.870	17.888	18.977	20.141	21.384	22.713	24.133	25.650	27.271	29.002
13	13.809	14.680	15.618	16.627	17.713	18.882	20.141	21.495	22.953	24.523	26.212	28.029	29.985	32.089	34.352
14	14.947	15.974	17.086	18.292	19.599	21.015	22.550	24.215	26.019	27.975	30.095	32.393	34.883	37.581	40.505
15	16.097	17.293	18.599	20.024	21.579	23.276	25.129	27.152	29.361	31.772	34.405	37.280	40.417	43.842	47.580
16	17.258	18.639	20.157	21.825	23.657	25.673	27.888	30.324	33.003	35.950	39.190	42.753	46.672	50.980	55.717
17	18.430	20.012	21.762	23.698	25.840	28.213	30.840	33.750	36.974	40.545	44.501	48.884	53.739	59.118	65.075
18	19.615	21.412	23.414	25.645	28.132	30.906	33.999	37.450	41.301	45.599	50.396	55.750	61.725	68.394	75.836
19	20.811	22.841	25.117	27.671	30.539	33.760	37.379	41.446	46.018	51.159	56.939	63.440	70.749	78.969	88.212
20	22.019	24.297	26.870	29.778	33.066	36.786	40.995	45.762	51.160	57.275	64.203	72.052	80.947	91.025	102.44
25	28.243	32.030	36.459	41.646	47.727	54.865	63.249	73.106	84.701	98.347	114.41	133.33	155.62	181.87	212.79
30	34.785	40.568	47.575	56.085	66.439	79.058	94.461	113.28	136.31	164.49	199.02	241.33	293.20	356.79	434.75
35	41.660	49.994	60.462	73.652	90.320	111.43	138.24	172.32	215.71	271.02	341.59	431.66	546.68	693.57	881.17
40	48.886	60.402	75.401	95.026	120.80	154.76	199.64	259.06	337.88	442.59	581.83	767.09	1,013.7	1,342.0	1,779.1
50	64.463	84.579	112.80	152.67	209.35	290.34	406.53	573.77	815.08	1,163.9	1,668.8	2,400.0	3,459.5	4,994.5	7,217.7

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Ένας ιδιώτης ηλικίας 30 ετών εκτιμά ότι θα συνταξιοδοτηθεί έπειτα από 35 έτη. Ο ιδιώτης επιθυμεί να γνωρίζει τι ποσό θα πρέπει να καταβάλει ετησίως, έτσι ώστε όταν συνταξιοδοτηθεί να έχει συγκεντρώσει €300.000. Το ετήσιο επιτόκιο αναμένεται να είναι 5% και όλες οι καταβολές γίνονται στο τέλος κάθε έτους.

– Λύση:

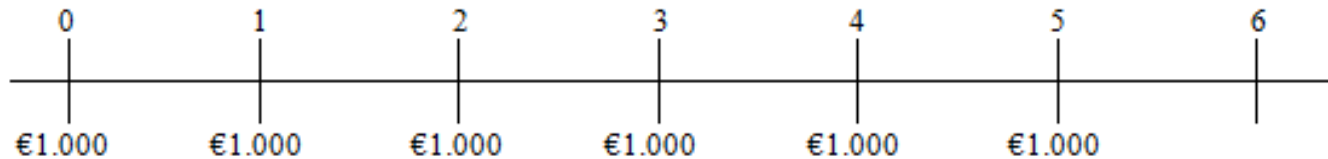
- Το ποσό των €300.000 είναι η μελλοντική αξία μίας ράντας ετήσιων πληρωμών με επιτόκιο 5%. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη Εξίσωση η ετήσια καταβολή θα είναι:

$$FV_n = CF \left[\frac{(1+i)^N - 1}{i} \right] \Rightarrow CF = \frac{FV_n}{\left[\frac{(1+i)^N - 1}{i} \right]} = \frac{€300.000}{\left[\frac{(1+0,05)^{35} - 1}{0,05} \right]} = €3.322$$

- Συνεπώς, ο ιδιώτης θα πρέπει να καταβάλει €3.322 στο τέλος κάθε έτους και για τα επόμενα 35 έτη έτσι ώστε να καταφέρει να συγκεντρώσει €300.000 όταν θα συνταξιοδοτηθεί.

Μελλοντική Αξία Προκαταβλητέας Ράντας

- Σε αρκετές περιπτώσεις οι χρηματικές ροές λαμβάνουν χώρα στην αρχή και όχι στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου. Ας υποθεθεί ότι ο προηγούμενος ιδιώτης επενδύει στην αρχή κάθε έτους €1.000 για 6 έτη με επιτόκιο 10%.

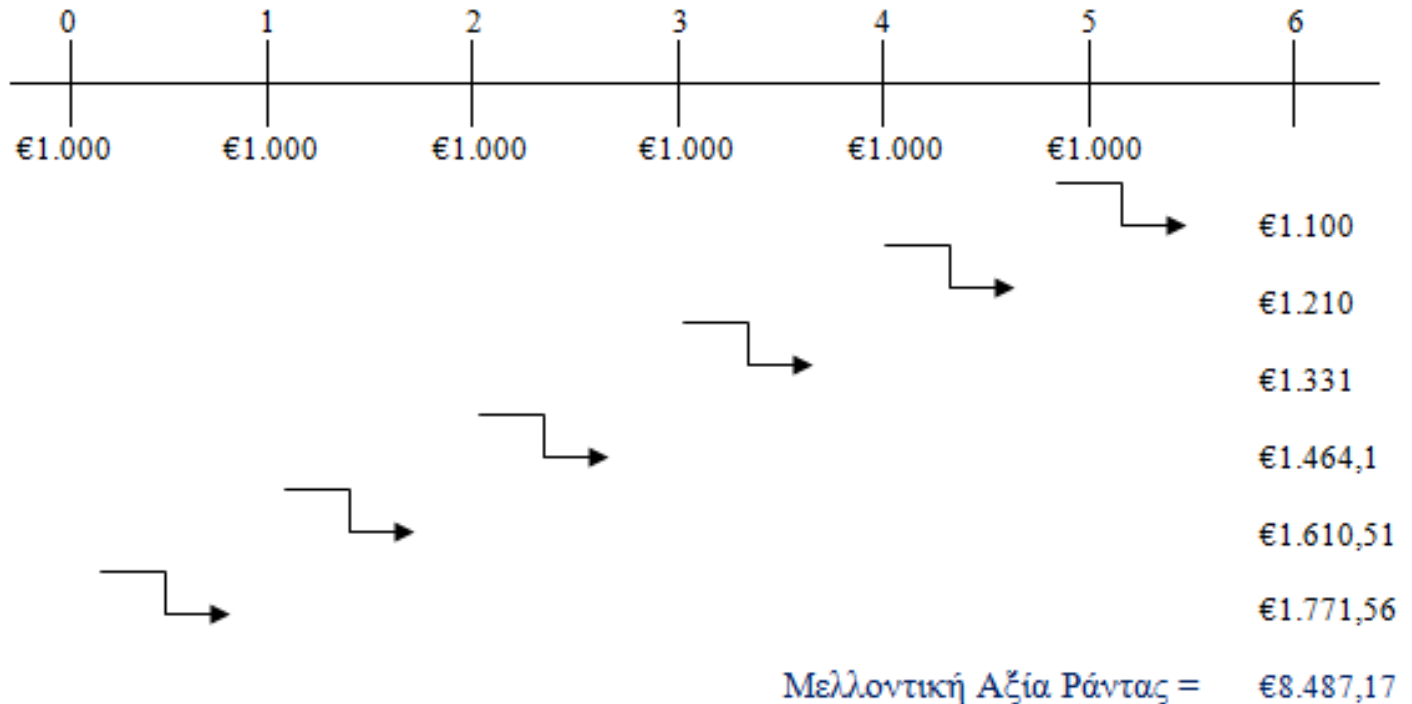


- Η διαφορά της προκαταβλητέας από τη ληξιπρόθεσμη ράντα είναι ότι οι χρηματικές ροές αρχίζουν να πραγματοποιούνται μία χρονική περίοδο νωρίτερα.
 - Συνεπώς, η διαφορά της προκαταβλητέας από τη ληξιπρόθεσμη ράντα είναι ότι ο κάθε όρος της πρώτης τοκίζεται με το επιτόκιο (10%) μία επιπλέον φορά.

<u>Έτος Καταβολής</u>	<u>Μελλοντική Αξία Όρου Ράντας στο τέλος του 6^{ου} έτους</u>
1	$FV_6 = €1.000(1,1)^6 = €1.771,56$
2	$FV_6 = €1.000(1,1)^5 = €1.610,51$
3	$FV_6 = €1.000(1,1)^4 = €1.464,1$
4	$FV_6 = €1.000(1,1)^3 = €1.331$
5	$FV_6 = €1.000(1,1)^2 = €1.210$
6	$FV_6 = €1.000(1,1)^1 = €1.100$
	<hr/>
Μελλοντική Αξία Ράντας	€8.487,17

Μελλοντική Αξία Προκαταβλητέας Ράντας (συν.)

- Ο υπολογισμός της μελλοντικής αξίας της ράντας στον άξονα του χρόνου καταγράφεται ως εξής:



Μελλοντική Αξία Προκαταβλητέας Ράντας (συν.)

- Λαμβάνοντας υπόψη ότι ο κάθε όρος της προκαταβλητέας ράντας τοκίζεται μία επιπλέον φορά σε σχέση με τη ληξιπρόθεσμη, ο υπολογισμός της μελλοντικής αξίας της πρώτης θα μπορούσε να γίνει πολλαπλασιάζοντας τη μελλοντική αξία της δεύτερης με

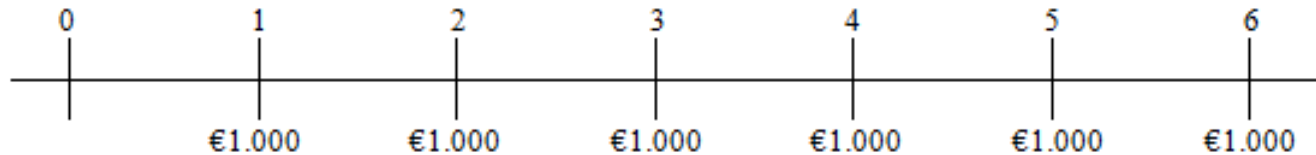
$$\begin{aligned} FV_6 (\text{προκαταβλητέα ράντα}) &= FV_6 (\text{ληξιπρόθεσμη ράντα}) \times (1+i) = €7.715,61 \times (1+0,1) = \\ &= €8.487,17 \end{aligned}$$

- Γενικότερα, η Εξίσωση υπολογισμού της μελλοντικής αξίας μιας προκαταβλητέας ράντας είναι:

$$FV_n = CF \sum_{t=1}^N (1+i)^t = CF \left[\frac{(1+i)^N - 1}{i} \right] (1+i)$$

Παρούσα Αξία Ληξιπρόθεσμης Ράντας

- Η παρούσα αξία μίας ράντας είναι το άθροισμα της προεξοφλημένης αξίας όλων των όρων της. Ας υποθεθεί ότι ένας ιδιώτης επενδύει στο τέλος κάθε έτους €1.000 για 6 έτη με επιτόκιο 10%.



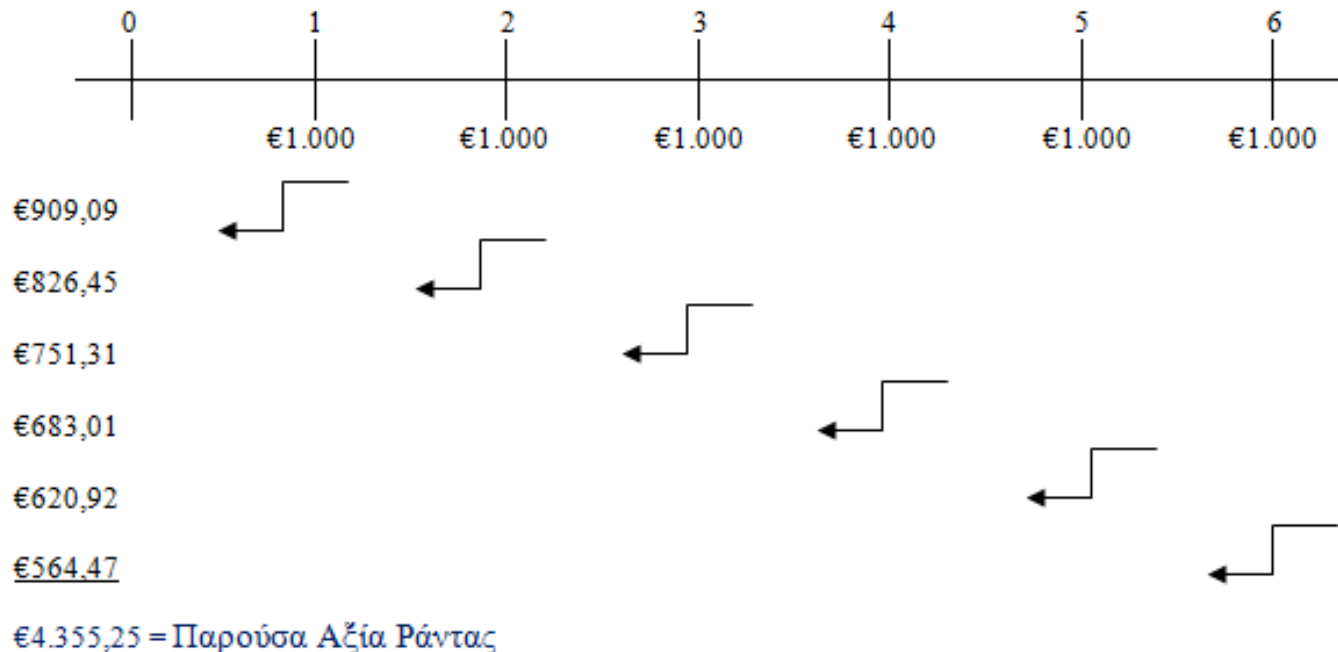
- Για τον κάθε όρο της ράντας υπολογίζεται η παρούσα αξία:

<u>Έτος Καταβολής</u>	<u>Παρούσα Αξία Όρου Ράντας</u>
1	$PV_0 = €1.000(1,1)^{-1} = €909,09$
2	$PV_0 = €1.000(1,1)^{-2} = €826,45$
3	$PV_0 = €1.000(1,1)^{-3} = €751,31$
4	$PV_0 = €1.000(1,1)^{-4} = €683,01$
5	$PV_0 = €1.000(1,1)^{-5} = €620,92$
6	$PV_0 = €1.000(1,1)^{-6} = €564,47$
Παρούσα Αξία Ράντας	€4.355,25

Παρούσα Αξία Ληξιπρόθεσμης Ράντας (συν.)

- Ο υπολογισμός της παρούσας αξίας της ράντας στον άξονα του χρόνου καταγράφεται ως εξής:

Ο υπολογισμός της παρούσας αξίας της ράντας στον άξονα του χρόνου καταγράφεται ως εξής:



Παρούσα Αξία Ληξιπρόθεσμης Ράντας (συν.)

- Έτσι λοιπόν, για τον υπολογισμό της παρούσας αξίας της ληξιπρόθεσμης ράντας, αρχικά υπολογίζεται η προεξοφλημένη αξία του κάθε όρου ξεχωριστά και στη συνέχεια αθροίζονται όλες οι παρούσες αξίες.

$$PV_0 = €1.000(1+0,1)^{-1} + €1.000(1+0,1)^{-2} + €1.000(1+0,1)^{-3} + €1.000(1+0,1)^{-4} + €1.000(1+0,1)^{-5} + €1.000(1+0,1)^{-6} = €4.355,25$$

- Όπως και στην περίπτωση προσδιορισμού της Εξίσωσης μελλοντικής αξία, από την παραπάνω Εξίσωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον όρο της ράντας ως σταθερό όρο και να έχουμε:

$$\begin{aligned} PV_0 &= €1.000(1+0,1)^{-1} + €1.000(1+0,1)^{-2} + €1.000(1+0,1)^{-3} + €1.000(1+0,1)^{-4} + \\ &€1.000(1+0,1)^{-5} + €1.000(1+0,1)^{-6} = \\ &= €1.000[(1+0,1)^{-1} + (1+0,1)^{-2} + (1+0,1)^{-3} + (1+0,1)^{-4} + (1+0,1)^{-5} + (1+0,1)^{-6}] = \\ &= €1.000 \sum_{t=1}^6 (1+0,1)^{-t} \end{aligned}$$

Παρούσα Αξία Ληξιπρόθεσμης Ράντας (συν.)

- Εναλλακτικά, η Εξίσωση παρούσας αξίας ληξιπρόθεσμης ράντας μπορεί να προσδιορισθεί προεξοφλώντας την Εξίσωση μελλοντικής αξίας ληξιπρόθεσμης ράντας:

$$PV_0 = FV_n(1+i)^{-n} = CF \left[\frac{(1+i)^N - 1}{i} \right] (1+i)^{-n} = CF \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] = CF \left[\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} \right]$$

- Συνεπώς, η Εξίσωση υπολογισμού της παρούσας αξίας μιας ληξιπρόθεσμης ράντας είναι:

$$PV_0 = CF \sum_{t=1}^N (1+i)^{-t} = CF \sum_{t=1}^N \frac{1}{(1+i)^t} = CF \left[\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^N}}{i} \right]$$

- Ο όρος $\left[\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^N}}{i} \right]$ είναι ο συντελεστής παρούσας αξίας ράντας.

Συντελεστής Παρούσας Αξίας

Ράντας 1€

Έτη	Επιτόκιο														
	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%
1	0.990	0.980	0.971	0.962	0.952	0.943	0.935	0.926	0.917	0.909	0.901	0.893	0.885	0.877	0.870
2	1.970	1.942	1.913	1.886	1.859	1.833	1.808	1.783	1.759	1.736	1.713	1.690	1.668	1.647	1.626
3	2.941	2.884	2.829	2.775	2.723	2.673	2.624	2.577	2.531	2.487	2.444	2.402	2.361	2.322	2.283
4	3.902	3.808	3.717	3.630	3.546	3.465	3.387	3.312	3.240	3.170	3.102	3.037	2.974	2.914	2.855
5	4.853	4.713	4.580	4.452	4.329	4.212	4.100	3.993	3.890	3.791	3.696	3.605	3.517	3.433	3.352
6	5.795	5.601	5.417	5.242	5.076	4.917	4.767	4.623	4.486	4.355	4.231	4.111	3.998	3.889	3.784
7	6.728	6.472	6.230	6.002	5.786	5.582	5.389	5.206	5.033	4.868	4.712	4.564	4.423	4.288	4.160
8	7.652	7.325	7.020	6.733	6.463	6.210	5.971	5.747	5.535	5.335	5.146	4.968	4.799	4.639	4.487
9	8.566	8.162	7.786	7.435	7.108	6.802	6.515	6.247	5.995	5.759	5.537	5.328	5.132	4.946	4.772
10	9.471	8.983	8.530	8.111	7.722	7.360	7.024	6.710	6.418	6.145	5.889	5.650	5.426	5.216	5.019
11	10.368	9.787	9.253	8.760	8.306	7.887	7.499	7.139	6.805	6.495	6.207	5.938	5.687	5.453	5.234
12	11.255	10.575	9.954	9.385	8.863	8.384	7.943	7.536	7.161	6.814	6.492	6.194	5.918	5.660	5.421
13	12.134	11.348	10.635	9.986	9.394	8.853	8.358	7.904	7.487	7.103	6.750	6.424	6.122	5.842	5.583
14	13.004	12.106	11.296	10.563	9.899	9.295	8.745	8.244	7.786	7.367	6.982	6.628	6.302	6.002	5.724
15	13.865	12.849	11.938	11.118	10.380	9.712	9.108	8.559	8.061	7.606	7.191	6.811	6.462	6.142	5.847
16	14.718	13.578	12.561	11.652	10.838	10.106	9.447	8.851	8.313	7.824	7.379	6.974	6.604	6.265	5.954
17	15.562	14.292	13.166	12.166	11.274	10.477	9.763	9.122	8.544	8.022	7.549	7.120	6.729	6.373	6.047
18	16.398	14.992	13.754	12.659	11.690	10.828	10.059	9.372	8.756	8.201	7.702	7.250	6.840	6.467	6.128
19	17.226	15.678	14.324	13.134	12.085	11.158	10.336	9.604	8.950	8.365	7.839	7.366	6.938	6.550	6.198
20	18.046	16.351	14.877	13.590	12.462	11.470	10.594	9.818	9.129	8.514	7.963	7.469	7.025	6.623	6.259
25	22.023	19.523	17.413	15.622	14.094	12.783	11.654	10.675	9.823	9.077	8.422	7.843	7.330	6.873	6.464
30	25.808	22.396	19.600	17.292	15.372	13.765	12.409	11.258	10.274	9.427	8.694	8.055	7.496	7.003	6.566
35	29.409	24.999	21.487	18.665	16.374	14.498	12.948	11.655	10.567	9.644	8.855	8.176	7.586	7.070	6.617
40	32.835	27.355	23.115	19.793	17.159	15.046	13.332	11.925	10.757	9.779	8.951	8.244	7.634	7.105	6.642
50	39.196	31.424	25.730	21.482	18.256	15.762	13.801	12.233	10.962	9.915	9.042	8.304	7.675	7.133	6.661

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Ένας δανειολήπτης έλαβε €100.000 για 10 έτη με επιτόκιο 10%.
 - A. Περίπτωση
 - Αν η αποπληρωμή του δανείου γίνεται στο τέλος κάθε έτους, να υπολογισθούν:
 - Η ετήσια δόση.
 - Ο τόκος και η απόσβεση κεφαλαίου ανά έτος.
 - B. Περίπτωση
 - Να υπολογισθούν τα A και B αν η αποπληρωμή του δανείου γίνεται στο τέλος κάθε μήνα.

Α. Περίπτωση

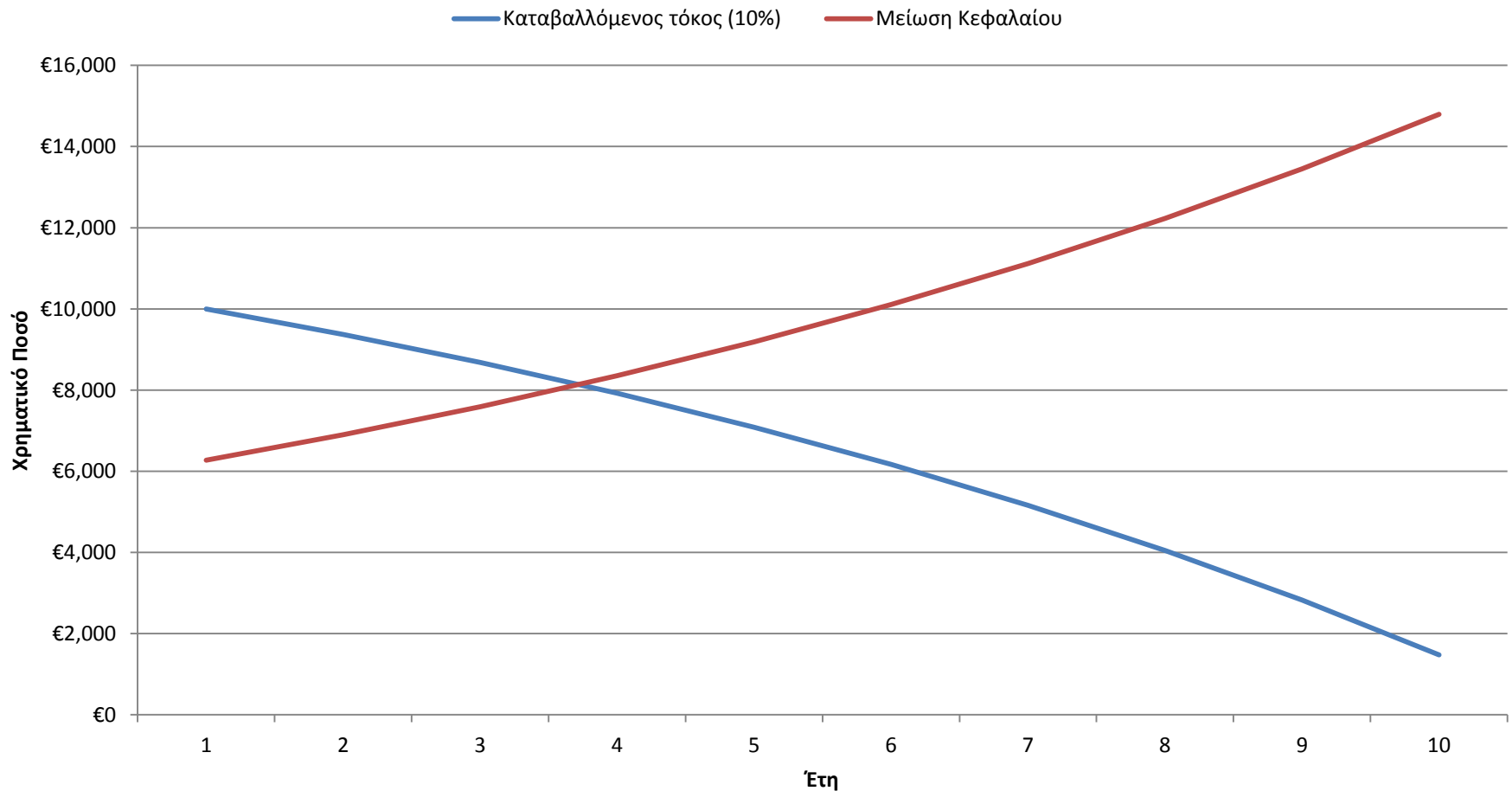
- Η αποπληρωμή ενός δανείου γίνεται σε ισόποσες δόσεις και ανά τακτά χρονικά διαστήματα, οπότε πρόκειται για μία ράντα.
- Το ποσό του δανείου αποτελεί την παρούσα αξία της ράντας και δεδομένου ότι το επιτόκιο και η χρονική περίοδος αποπληρωμής είναι γνωστά, μπορεί να υπολογισθεί το ύψος της ετήσιας καταβολής.

$$PV_0 = CF \left[\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^N}}{i} \right] \Rightarrow \text{€}100.000 = CF \left[\frac{1 - \frac{1}{(1+0,1)^{10}}}{0,1} \right] \Rightarrow CF = \frac{\text{€}100.000}{6,145} = \text{€}16.275$$

Πίνακας 5 Ετήσια Αποπληρωμή Δανείου (€100.000 για 10 έτη με επιτόκιο 10%)

Έτος	Ποσό στη Αρχή του Έτους (1)	Ετήσια Δόση (2)	Ετήσιος Τόκος (3)	Πληρωμή Κεφαλαίου (4) = (2) - (3)	Ποσό στο Τέλος του Έτους (5) = (1) - (4)
1	€100.000	€16.275	€10.000	€6.275	€93.725
2	€93.725	€16.275	€9.373	€6.902	€86.823
3	€86.823	€16.275	€8.682	€7.592	€79.231
4	€79.231	€16.275	€7.923	€8.351	€70.880
5	€70.880	€16.275	€7.088	€9.187	€61.693
6	€61.693	€16.275	€6.169	€10.105	€51.588
7	€51.588	€16.275	€5.159	€11.116	€40.472
8	€40.472	€16.275	€4.047	€12.227	€28.245
9	€28.245	€16.275	€2.825	€13.450	€14.795
10	€14.795	€16.275	€1.480	€14.795	€0

Διάγραμμα 3 Ετήσιος Τόκος και Απομείωση Κεφαλαίου



B. Περίπτωση

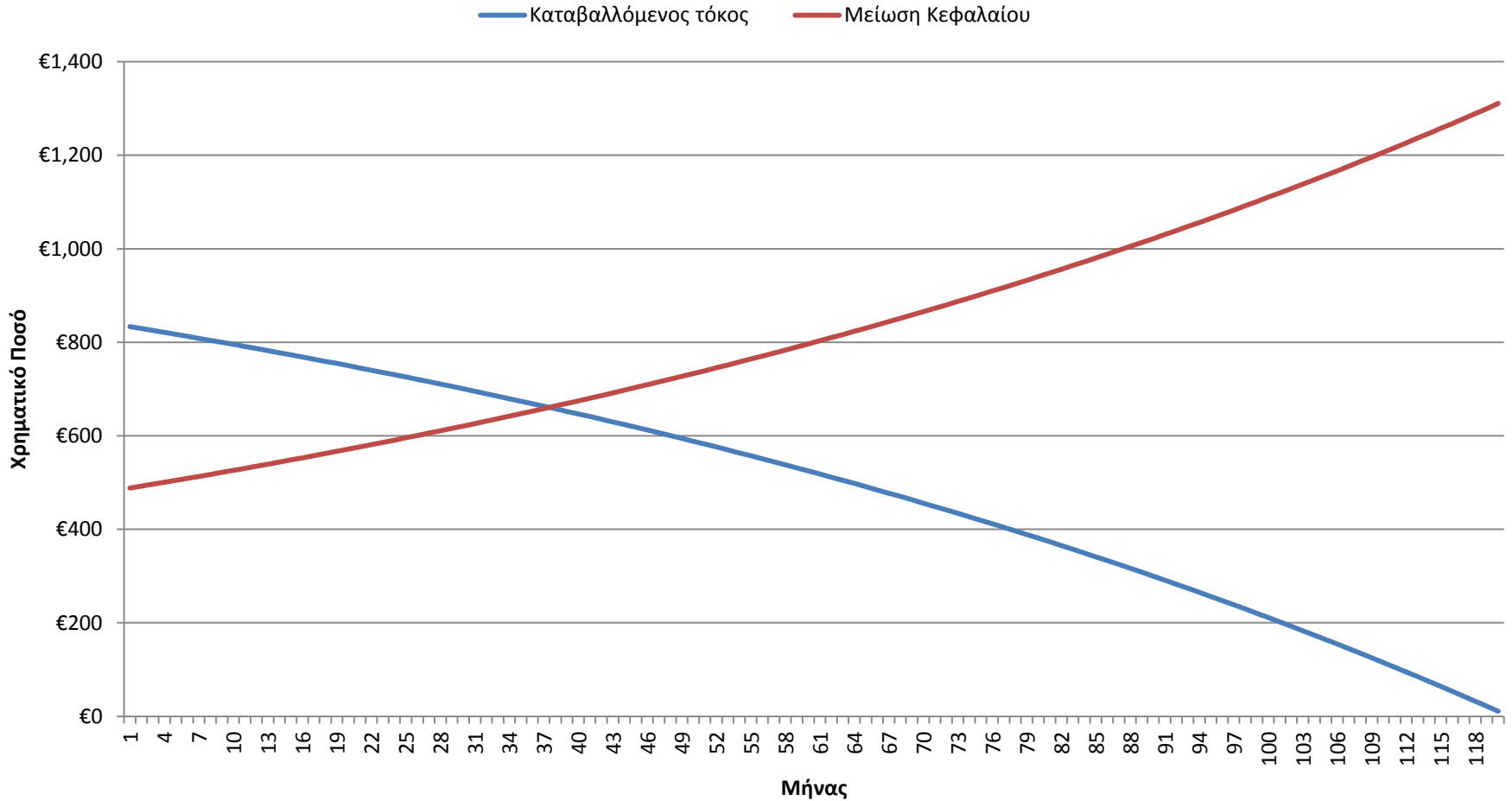
- Δεδομένου ότι η αποπληρωμή του δανείου ύψους €100.000 θα γίνει μηνιαίως, οι χρονικές περίοδοι είναι 120 (10×12) και το μηνιαίο επιτόκιο 0.833% ($10\%/12$). Συνεπώς, η μηνιαία δόση θα είναι:

$$PV_0 = CF \left[\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^N}}{i} \right] \Rightarrow €100.000 = CF \left[\frac{1 - \frac{1}{(1+0,00833)^{120}}}{0,00833} \right] \Rightarrow CF = \frac{€100.000}{75,67} = €1.322$$

Πίνακας 6 Μηνιαία Αποπληρωμή Δανείου (€100.000 για 120 μήνες με επιτόκιο 10%)

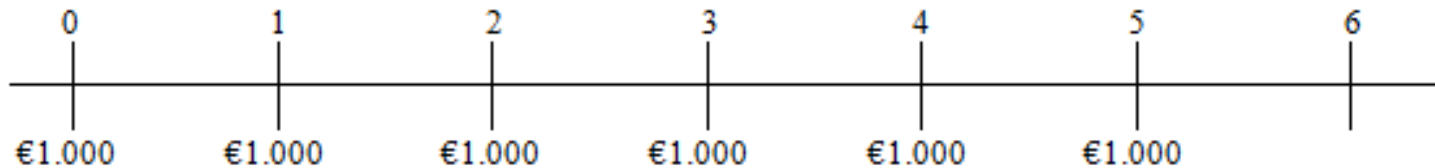
Μήνας	Ποσό στη Αρχή του Μήνα (1)	Μηνιαία Δόση (2)	Μηνιαίος Τόκος (3)	Πληρωμή Κεφαλαίου (4) = (2) - (3)	Ποσό στο Τέλος του Μήνα (5) = (1) - (4)
1	€100.000	€1.322	€833	€488	€99.512
2	€99.512	€1.322	€829	€492	€99.020
3	€99.020	€1.322	€825	€496	€98.523
4	€98.523	€1.322	€821	€500	€98.023
5	€98.023	€1.322	€817	€505	€97.518
6	€97.518	€1.322	€813	€509	€97.009
7	€97.009	€1.322	€808	€513	€96.496
8	€96.496	€1.322	€804	€517	€95.979
9	€95.979	€1.322	€800	€522	€95.457
10	€95.457	€1.322	€795	€526	€94.931
11	€94.931	€1.322	€791	€530	€94.401
12	€94.401	€1.322	€787	€535	€93.866

Διάγραμμα 4 Μηνιαίος Τόκος και Απομείωση Κεφαλαίου



Παρούσα Αξία Προκαταβλητέας Ράντας

• Στην περίπτωση της προκαταβλητέας ράντας θα πρέπει να προεξοφληθούν $(N-1)$ όροι, καθώς ο πρώτος όρος βρίσκεται ήδη σε χρόνο μηδέν (0). Ας υποθεθεί ότι ο προηγούμενος ιδιώτης επενδύει στην αρχή κάθε έτους €1.000 για 6 έτη με επιτόκιο 10%.

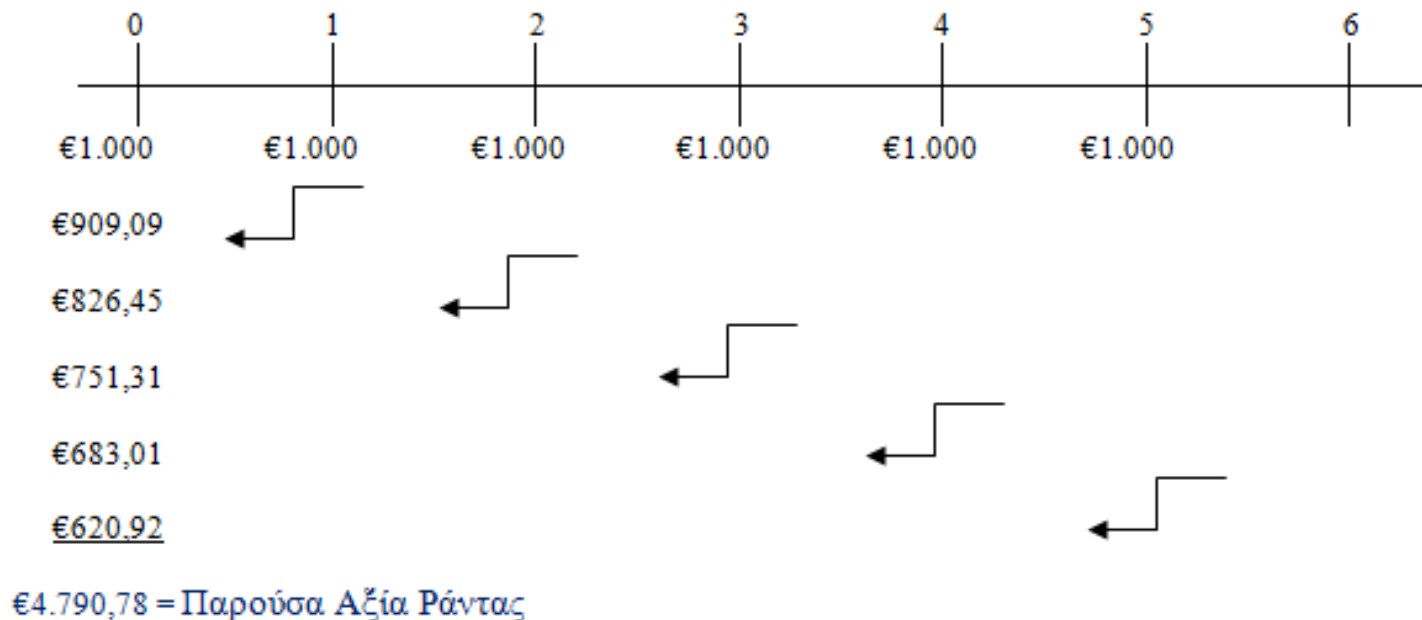


• Για τον κάθε όρο της ράντας υπολογίζεται η παρούσα αξία:

<u>Έτος Καταβολής</u>	<u>Παρούσα Αξία Όρου Ράντας</u>
1	$PV_0 = €1.000(1,1)^{-0} = €1.000$
2	$PV_0 = €1.000(1,1)^{-1} = €909,09$
3	$PV_0 = €1.000(1,1)^{-2} = €826,45$
4	$PV_0 = €1.000(1,1)^{-3} = €751,31$
5	$PV_0 = €1.000(1,1)^{-4} = €683,01$
6	$PV_0 = €1.000(1,1)^{-5} = €620,92$
<u>Παρούσα Αξία Ράντας</u>	<u>€4.790,78</u>

Παρούσα Αξία Προκαταβλητέας Ράντας (συν.)

- Ο υπολογισμός της παρούσας αξίας της ράντας στον άξονα του χρόνου καταγράφεται ως εξής:



Παρούσα Αξία Προκαταβλητέας Ράντας (συν.)

- Δεδομένου ότι η Εξίσωση υπολογισμού παρούσας αξίας ληξιπρόθεσμης ράντας υπολογίζει την παρούσα της ράντας μία περίοδο πριν από την πρώτη χρηματική ροή, για τον υπολογισμό της παρούσας αξίας της προκαταβλητέας ράντας η πρώτη Εξίσωση θα πρέπει να πολλαπλασιασθεί με $(1+i)$:

$$PV_0 (\text{προκαταβλητέα ράντα}) = PV_0 (\text{ληξιπρόθεσμη ράντα}) \times (1+i) = €4.355,3 \times (1+0,1) = €4.790,8$$

- Γενικότερα, η Εξίσωση υπολογισμού της παρούσας αξίας μιας προκαταβλητέας ράντας είναι:

$$PV_0 = CF \sum_{t=1}^N \frac{1}{(1+i)^{N-t}} = CF \left[\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^N}}{i} \right] (1+i)$$

Διηνεκείς Ράντες

- Λαμβάνοντας υπόψη πως το πλήθος των όρων μιας διηνεκούς ράντας τείνει στο άπειρο ($N \rightarrow \infty$), ο αριθμητής του συντελεστή παρούσας αξίας ράντας θα ισούται με τη μονάδα:

$$\left[\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^N}}{i} \right]$$

- Συνεπώς, η Εξίσωση υπολογισμού της παρούσας αξίας μιας διηνεκούς ράντας θα είναι:

$$PV_0 = \frac{CF}{i}$$

Ονομαστικά και Πραγματικά Επιτόκια

- Στην έως τώρα ανάλυση υποτέθηκε ότι οι χρονικές ροές πραγματοποιούνται ανά έτος και συνεπώς ο ανατοκισμός ήταν ετήσιος.
- Συχνά, ωστόσο, οι καταβολές μπορεί να γίνονται σε μικρότερα χρονικά διαστήματα του έτους και συγκεκριμένα ανά εξάμηνο, τρίμηνο, μήνα ή εβδομάδα.
- Το ονομαστικό επιτόκιο αναφέρεται στο ετήσιο επιτόκιο, λαμβάνοντας υπόψη ότι ο ανατοκισμός γίνεται σε ετήσια βάση.
- Σε περίπτωση που ο ανατοκισμός γίνεται σε διαστήματα μικρότερα του έτους, τότε η αξία της επένδυσης μεγαλώνει γρηγορότερα και θα πρέπει να υπολογίζεται το *ετήσιο πραγματικό επιτόκιο*.

Ονομαστικά και Πραγματικά Επιτόκια (συν.)

Ας υποθεθεί ότι επενδύονται €1.000 για 10 έτη με ετήσιο επιτόκιο 10% και εξάμηνο ανατοκισμό. Η τελική αξία της επένδυσης για $n=20$ και $i=5\%$ θα είναι:

$$FV_n = PV_0(1+i)^n \Rightarrow FV_{20} = €1.000(1+0,05)^{20} = €2.653,3$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η αρχική επένδυση των €1.000 αυξάνεται σε €2.653,3 έπειτα από 10 έτη, το ετήσιο πραγματικό επιτόκιο θα είναι:

$$i = \sqrt[n]{\frac{FV_n}{PV_0}} - 1 = \sqrt[10]{\frac{€2.653,3}{€1.000}} - 1 = 10.25\%$$

Γενικότερα, η σχέση μεταξύ ονομαστικού και πραγματικού επιτοκίου εκφράζεται από την Εξίσωση:

$$r = \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n - 1$$

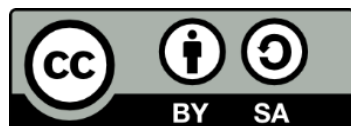
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Ένας ιδιώτης καταθέτει €1.000 με ονομαστικό επιτόκιο 10%. Να υπολογισθεί η τελική αξία και το ετήσιο πραγματικό επιτόκιο εάν ο ανατοκισμός γίνεται ανά έτος, εξάμηνο, τρίμηνο, μήνα, ημέρα, συνεχώς.

– Λύση:

	Περίοδος Ανατοκισμού	Τελική Αξία	Ετήσιο Πραγματικό Επιτόκιο
i	Έτος	$€1.100 = €1.000(1 + 0,1)$	10%
ii	Εξάμηνο	$€1.102,5 = €1.000(1 + 0,1/2)^2$	$10.25\% = (1 + 0,1/2)^2 - 1$
iii	Τρίμηνο	$€1.103,81 = €1.000(1 + 0,1/4)^4$	$10.381\% = (1 + 0,1/4)^4 - 1$
iv	Μήνα	$€1.104,71 = €1.000(1 + 0,1/12)^{12}$	$10.471\% = (1 + 0,1/12)^{12} - 1$
v	Ημέρα	$€1.105,16 = €1.000(1 + 0,1/365)^{365}$	$10.516\% = (1 + 0,1/365)^{365} - 1$
vi	Συνεχώς	$€1.105,17 = €1.000 \times e^{0,1}$	$10.517\% = e^{0,1} - 1$

Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ