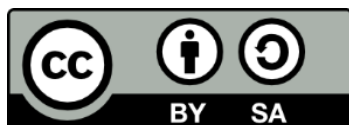


Ηλεκτρονικοί Υπολογιστές II

Ενότητα 3: Εφαρμογές Άλγεβρας Boole

Σταύρος Σουραβλάς

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άλγεβρα Boole

- Οι υπολογιστές λειτουργούν σε 2 καταστάσεις (0,1)
- Απλοποιημένη άλγεβρα με πράξεις πάνω στα σύμβολα 0 και 1

Άλγεβρα Boole (2)

- Αλγεβρική δομή που ορίζεται από
 - Ένα σύνολο τελεστών
 - Ένα σύνολο στοιχείων
 - Ένα σύνολο αξιωμάτων

Τελεστές

- Κανόνας αντιστοίχισης ενός ζεύγους στοιχείων ενός συνόλου σε ένα άλλο στοιχείο
- +
- .
- '.

Στοιχεία και Αξιώματα

- Σύνολο S αποτελούμενο από τα 0 και 1
- $S = \{0, 1\}$
- Αξιώματα: Προτάσεις που συνδυάζουν τα στοιχεία και τους τελεστές. Τα αποδεχόμαστε χωρίς απόδειξη

Άλγεβρα Boole

- Ορίζεται στο σύνολο $A = \{0, 1, +, \cdot, '\}$
- Κανόνες λειτουργίας τελεστών
- $+$ (Λογικό Ή): Δίνει αποτέλεσμα 0 αν τα 2 στοιχεία του S είναι 0 και 1 αν έστω 1 από αυτά είναι 1
- \cdot (Λογικό ΚΑΙ): Δίνει αποτέλεσμα 1 αν και τα 2 στοιχεία του S είναι 1 και 0 αν έστω 1 από αυτά είναι 0
- $'$ (Συμπλήρωμα): Για κάθε στοιχείο x στο S , αν $x=1$, $x'=0$, αν $x=0$, $x'=1$,

Πίνακες Αληθείας

- Αναπαράσταση της σχέσης ανάμεσα στις εισόδους και εξόδους ενός συστήματος

x	y	x+y	x·y	x'
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	0

Αξιώματα Άλγεβρας Boole

- Κλειστότητα: το αποτέλεσμα κάθε πράξης βρίσκεται μέσα στο S , δηλαδή είναι 0 ή 1
- Αντιμεταθετικότητα: Η διάταξη των στοιχείων δεν παίζει ρόλο: $0+1=1+0=1$ και $0\cdot 1=1\cdot 0=0$
- Προσεταιριστικότητα: $(x+y)+z=x+(y+z)$ και $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot (y\cdot z)$. Απόδειξη με πίνακα αληθείας
- Επιμεριστικότητα: $x\cdot (y+z)=xy+xz$ (επιμερισμός πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση)
- $x+(y\cdot z)=(x+y)\cdot (x+z)$ (επιμερισμός πρόσθεσης ως προς τον πολλαπλασιασμό)

Αξιώματα Άλγεβρας Boole (2)

- Ουδέτερο στοιχείο: $x+0=0+x=0$ (ουδέτερο στοιχείο πρόσθεσης)
- $x \cdot 1=1 \cdot x=x$ (ουδέτερο στοιχείο πολλαπλασιασμού)
- Συμπλήρωμα: $x + x' = 1$
- $x \cdot x' = 0$

Προτεραιότητα Τελεστών

- Παρενθέσεις
- Συμπληρώματα
- ΚΑΙ
- Ή
- Π.χ., η έκφραση $(0+1)' \cdot 0 \cdot 1+1'$. Ναδειχτεί ότι ισούται με 0.

Δυϊσμός Άλγεβρας Boole

- Δυϊσμός: Κάθε αλγεβρική έκφραση ισχύει αν αλλάξουμε τα + σε \cdot και αντίστροφα και τα 0 σε 1 και αντίστροφα.
- π.χ. $x+x'=1$ και $x \cdot x'=0$
- $x+0=x$ και $x \cdot 1=x$

Θεωρήματα Άλγεβρας Boole

- Πράξεις μεταβλητής με τον εαυτό της
- Πράξεις μεταβλητής με σταθερά
- Διπλή άρνηση
- De Morgan
- Απορρόφηση

Πράξεις μεταβλητής με τον εαυτό της

- $x+x = (x+x) \cdot 1$ (ουδέτερο στοιχείο)
 - $= (x+x)(x+x')$ (συμπλήρωμα)
 - $= (x+xx')$ (επιμεριστικότητα της πρόσθεσης
ως προς τον πολλαπλασιασμό)
 - $= (x+0)$ (συμπλήρωμα)
 - $= x$ (ουδέτερο στοιχείο)
-
- Ομοίως, $x \cdot x = x$ (με διΐσμό)
 - Άλλη απόδειξη: Με πίνακες αληθείας

ΠΡΑΞΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΑ

- Πράξη μεταβλητής με σταθερά (όχι ουδέτερο στοιχείο)
- $x+1$
- $x \cdot 0$

- Τα αποτελέσματα των πράξεων είναι ίσα με τη σταθερά

ΠΡΑΞΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΑ

- Η απόδειξη του θεωρήματος $x \cdot 0=0$ γίνεται με δυισμό

$$\begin{aligned}x + 1 &= 1 \cdot (x + 1) && \text{(ουδέτερο στοιχείο, 4(\beta))} \\ &= (x + \bar{x})(x + 1) && \text{(συμπλήρωμα, 5(\alpha))} \\ &= x + \bar{x} \cdot 1 && \text{(επιμεριστική, 3(\beta))} \\ &= x + \bar{x} && \text{(ουδέτερο στοιχείο, 4(\beta))} \\ &= 1 && \text{(συμπλήρωμα, 5(\alpha))}\end{aligned}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΙΠΛΗΣ ΑΡΝΗΣΗΣ

- $(x')' = x$
- Απόδειξη 1: $x+x'=1$ και $xx'=0$ (άρα το συμπλήρωμα του x' είναι x)
- Απόδειξη 2: Με πίνακα αληθείας

ΘΕΩΡΗΜΑ De Morgan

- 1. $(x+y)' = x'y'$
- 2. $(xy)' = x'+y'$
- Απόδειξη με πίνακες αληθείας

ΘΕΩΡΗΜΑ Απορρόφησης

- 1. $x+xy=x$
- 2. $x(x+y)=x$
- 3. $x+x'y=x+y$
- 4. $x(x'+y)=xy$
- Π.χ., για την (1): $x+xy=x \cdot 1+xy=x(1+y)$
(επιμεριστική) $= x \cdot 1=x$

ΛΟΓΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

- Μία έκφραση με n μεταβλητές που περιέχει έναν ή και τους δύο τελεστές της Άλγεβρας Boole

ΠΙΝΑΚΕΣ ΑΛΗΘΕΙΑΣ

- Πίνακας που απεικονίζει τις τιμές μίας λογικής συνάρτησης για όλους τους συνδυασμούς των μεταβλητών

Πίνακας αληθείας της $F_1 = x y + x \bar{y} \bar{z}$

x	y	z	F_1
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

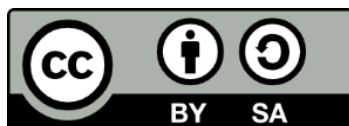
ΒΑΣΙΚΕΣ ΛΟΓΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

- 1. ΚΑΙ
- 2. Ή
- 3. ΌΧΙ ΚΑΙ
- 4. ΟΥΤΕ
- 5. Συμπλήρωμα
- 6. Αποκλειστικό Ή
- 7. Αποκλειστικό ΟΥΤΕ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Λογική έκφραση σύγκρισης 2 αριθμών τεσσάρων bit
- $(a_3 \text{ xnor } b_3) \text{ AND } (a_2 \text{ xnor } b_2) \text{ AND}$
- $(a_1 \text{ xnor } b_1) \text{ AND } (a_0 \text{ xnor } b_0)$

Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

