

Επιχειρησιακή Έρευνα

Ενότητα 10: Το πρόβλημα μεταφοράς: μαθηματικό μοντέλο και μεθοδολογία επίλυσης

Άγγελος Σιφαλέρας
Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Το πρόβλημα μεταφοράς (*transportation problem*)

- Αποστολή αγαθών προερχόμενα από διάφορες προελεύσεις/πηγές (*origins/sources*) σε διάφορους προορισμούς (*destinations*).
- **Προελεύσεις**: π.χ. εργοστάσια, αποθήκες, σημεία φόρτωσης, κ.α.
- **Προορισμοί**: π.χ. κέντρα κατανάλωσης, πόλεις, αποθήκες, πελάτες, σημεία εκφόρτωσης, κ.α.
- **Βέλτιστο σχέδιο μεταφοράς** (*optimal transportation plan*) = βέλτιστος τρόπος μεταφοράς.
- Το **κριτήριο βελτιστοποίησης** είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους μεταφοράς των αγαθών από τις διάφορες πηγές στους διάφορους προορισμούς.
- **Περιορισμοί** προκύπτουν στην διαθέσιμη προσφορά από κάθε πηγή και την υπάρχουσα ζήτηση σε κάθε προορισμό.

Γενική μορφή του μαθηματικού μοντέλου του προβλήματος μεταφοράς

- Το πρόβλημα μεταφοράς μπορεί να μοντελοποιηθεί με τη βοήθεια δικτύων/γραφημάτων. Έστω, ότι το δίκτυο του προβλήματος μας είναι το $G=(V,E)$, όπου V = το σύνολο των κόμβων και E = το σύνολο των τόξων. Έστω, S το υποσύνολο των κόμβων προσφοράς και D = το υποσύνολο των κόμβων ζήτησης. Συμβολίζουμε με a_i την ποσότητα του προϊόντος που υπάρχει στον κόμβο προσφοράς i . Επίσης, με b_j συμβολίζουμε την ποσότητα του προϊόντος που ζητείται από τον κόμβο ζήτησης j .

$$\min z = \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij}$$

μ.π.

$$\sum_{(i,j) \in E} x_{ij} \leq a_i, \quad i \in S$$

$$\sum_{(i,j) \in E} x_{ij} \geq b_j, \quad j \in D$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i \in S, \quad j \in D$$

Μέθοδοι ξεκινήματος για το πρόβλημα μεταφοράς

- Βορειοδυτική γωνία (*Northwest corner method*)
- Μέθοδος *Vogel*
- Μέθοδος του *Russell*
- κ.α.

Ο αλγόριθμος *Simplex* για το πρόβλημα μεταφοράς

- Χρήση μιας εξειδίκευσης του αλγορίθμου *Simplex* για το γραμμικό πρόβλημα.
- Περιγραφή νέων συνθηκών βελτιστότητας του προβλήματος μεταφοράς.
- Οι δυϊκές μεταβλητές του προβλήματος μεταφοράς θα συμβολίζονται τώρα με:
 - u_i = η δυϊκή μεταβλητή που αντιστοιχεί στη γραμμή $i \in S$
 - v_j = η δυϊκή μεταβλητή που αντιστοιχεί στη στήλη $j \in D$
- Η εφικτή λύση x είναι βέλτιστη, αν είναι $s \geq 0$ και $s^T x = 0$

Ο αλγόριθμος *Simplex* για το πρόβλημα μεταφοράς

- Για να ξεκινήσουμε την εφαρμογή του αλγορίθμου χρειαζόμαστε τις τιμές των δυϊκών μεταβλητών u_i και v_j , ώστε να υπολογιστούν στη συνέχεια τα μειωμένα κόστη:
- $s_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$
- Αρχικά, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων:
- $u_i + v_j = c_{ij}$, για κάθε βασική μεταβλητή x_{ij}
- (έχουμε $n+m$ μεταβλητές και $n+m-1$ εξισώσεις, οπότε θέτουμε αυθαίρετα $u_1 = 0$)
- Προφανώς, λύνοντας το σύστημα προκύπτουν τιμές ώστε να ισχύει:
- $s_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j = 0$, για κάθε βασική μεταβλητή x_{ij}

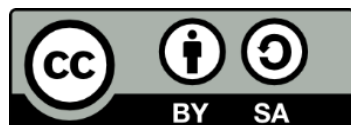
Άλλες περιπτώσεις του προβλήματος μεταφοράς

- Μη ισορροπημένο πρόβλημα μεταφοράς.
- Εκφυλισμένες λύσεις.
- Αποκλεισμός διαδρομών.

Βιβλιογραφία σε μεθόδους επίλυσης προβλημάτων μεταφοράς

- Storozhyshina, N., Pargar, F., & Vasko, F. J. (2011). A comprehensive empirical analysis of 16 heuristics for the transportation problem. *OR Insight*, 24(1), 63-76.
- Klinz, B., & Woeginger, G. J. (2011). The Northwest corner rule revisited. *Discrete Applied Mathematics*, 159(12), 1284-1289.
- Russell, E. J. (1969). Letters to the Editor-Extension of Dantzig's Algorithm to Finding an Initial Near-Optimal Basis for the Transportation Problem. *Operations Research*, 17(1), 187-191.
- Charnes, A., & Cooper, W. W. (1954). The stepping stone method of explaining linear programming calculations in transportation problems. *Management Science*, 1(1), 49-69.
- G. B. Dantzig, "Application of the Simplex Method to a Transportation Problem", Chap. XXIII of T. C. Koopmans (Ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*, Cowles Commission Monograph, No. 13, Wiley, New York, 1951.

Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ
Άγγελος Σιφαλέρας