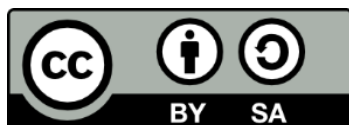


Επιχειρησιακή Έρευνα

Ενότητα 9: Δυϊκή Θεωρία

Άγγελος Σιφαλέρας

Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Δυϊκή Θεωρία

- Κάθε γραμμικό πρόβλημα με μεταβλητές x_1, x_2, \dots, x_n , συνδέεται με ένα άλλο γραμμικό πρόβλημα το οποίο έχει μεταβλητές w_1, w_2, \dots, w_m (όπου m είναι ο αριθμός των περιορισμών του αρχικού προβλήματος) το οποίο το ονομάζουμε δυϊκό (*dual*).
- Το αρχικό πρόβλημα, το οποίο ονομάζουμε πρωτεύον (*primal*), προσδιορίζει πλήρως τη μορφή του αντίστοιχου δυϊκού του.

Κανόνες σχηματισμού δυϊκών προβλημάτων

Μεγιστοποίηση

Ελαχιστοποίηση

Μεταβλητές

Περιορισμοί

Μη αρνητικές (≥ 0)

Μεγαλύτερο ή ίσο απο (\geq)

Μη θετικές (≤ 0)

Μικρότερο ή ίσο απο (\leq)

Ελεύθερες ()

Ισότητα (=)

Περιορισμοί

Μεταβλητές

Μεγαλύτερο ή ίσο απο (\geq)

Μη θετικές (≤ 0)

Μικρότερο ή ίσο απο (\leq)

Μη αρνητικές (≥ 0)

Ισότητα (=)

Ελεύθερες ()

Ασθενή δυϊκότητα (*weak duality*)

Έστω τα δυο ακόλουθα γ.π.:

Primal

$$\min z = c^T x$$

$$s.t. \quad Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

Dual

$$\max z = b^T w$$

$$s.t. \quad A^T w \leq c$$

$$w \geq 0$$

Για οποιεσδήποτε λύσεις x και w του πρωτεύοντος και δυϊκού προβλήματος αντίστοιχα, θα ισχύει ότι: $c^T x \geq b^T w$. Αυτή η σχέση είναι γνωστή ως συνθήκη ασθενούς δυϊκότητας.

Ισχυρή δυϊκότητα (*strong duality*)

- Ονομάζεται το σύνολο των αποτελεσμάτων με τα οποία μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα για την κατάσταση ενός γραμμικού προβλήματος, δηλαδή, αν είναι βέλτιστο, απεριόριστο ή αδύνατο, από την κατάσταση του δυϊκού του και αντίστροφα.

Ισχυρή δυϊκότητα

- **Θεώρημα.** Έστω (P) και (D) είναι ζευγάρι πρωτεύοντος και δυϊκού προβλήματος. Τότε ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:
- Αν το (P) είναι βέλτιστο, το (D) είναι επίσης βέλτιστο και αντιστρόφως. Επίσης, οι δυο αντικειμενικές συναρτήσεις έχουν την ίδια βέλτιστη τιμή.
- Αν το (P) είναι απεριόριστο, το (D) είναι αδύνατο και αντιστρόφως (αν το (D) είναι απεριόριστο, το (P) είναι αδύνατο).
- Αν το (P) είναι αδύνατο, το (D) μπορεί να είναι αδύνατο ή απεριόριστο και αντιστρόφως (αν το (D) είναι αδύνατο, το (P) μπορεί να είναι αδύνατο ή απεριόριστο).

Συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας (*complementary slackness*)

- Στη βέλτιστη λύση θα ισχύει η παρακάτω συνθήκη της συμπληρωματικής χαλαρότητας:

$x^* s^* = 0$, όπου s^* είναι η χαλαρή μεταβλητή του δυϊκού γ.π.

x^* είναι η βέλτιστη τιμή του πρωτεύοντος γ.π.

$w^* e^* = 0$, όπου e^* είναι η πλεονασματική μεταβλητή του πρωτεύοντος γ.π.

w^* είναι η βέλτιστη τιμή του δυϊκού γ.π.

- Άρα, μία μεταβλητή με θετικό υπολειμματικό κόστος (*reduced cost*) θα έχει μηδενική τιμή. Αντίστοιχα, μια βασική μεταβλητή (με αυστηρά θετική τιμή) θα έχει μηδενικό υπολειμματικό κόστος.

- Άρα, ένας περιορισμός της μορφής « \leq » με θετική τιμή δυϊκής μεταβλητής ($w_i \geq 0$), θα έχει μηδενική τιμή χαλαρής μεταβλητής ($x_i = 0$). Αντίστοιχα, ένας περιορισμός της μορφής « \leq » με θετική τιμή χαλαρής μεταβλητής ($x_i \geq 0$), θα έχει μηδενική τιμή δυϊκής μεταβλητής ($w_i = 0$).

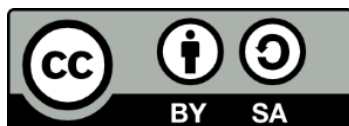
Ταχύτεροι υπολογισμοί λύνοντας δυϊκά γ.π. (*performance tuning for linear programs*)

- Μπορούμε να υπολογίσουμε τη λύση ενός γ.π. i) είτε λύνοντας κατευθείαν αυτό το γ.π., ii) είτε λύνοντας πρώτα το αντίστοιχο δυϊκό του και έπειτα χρησιμοποιώντας τις δυϊκές μεταβλητές να υπολογίσουμε τη λύση του αρχικού (πρωτεύοντος) γ.π.
- Δεδομένου ότι **ο χρόνος υπολογισμού για τον αλγόριθμο Simplex επηρεάζεται περισσότερο από τον αριθμό των περιορισμών παρά από τον αριθμό των μεταβλητών**, όταν το πρωτεύον πρόβλημα έχει περισσότερους περιορισμούς από ό, τι μεταβλητές, είναι από υπολογιστικής απόψεως καλύτερο να λύσουμε το δυϊκό γ.π., το οποίο προφανώς θα έχει λιγότερους περιορισμούς.

Ταχύτεροι υπολογισμοί λύνοντας δυϊκά γ.π. (*performance tuning for linear programs*)

- Η πλειοψηφία των πιο αποτελεσματικών επιστημονικών λυτών (π.χ., *IBM ILOG CPLEX*), παρέχει στον χρήστη ως επιλογή έναν *pre-solve dual indicator*. Με αυτόν τον τρόπο οι λύτες γνωρίζουν (*pre-solve* – πριν ακόμα λύσουν το πρόβλημα) ποιό γ.π. (πρωτεύον ή δυϊκό) θα λυθεί ταχύτερα.
- Εάν επιλεχθεί το δυϊκό γ.π., τότε μετά την επίλυση του δυϊκού γ.π. ο λύτης θα επιστρέψει στον χρήστη τη βέλτιστη λύση του γ.π. αλλά και τις τιμές των μεταβλητών του πρωτεύοντος γ.π.

Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ
Άγγελος Σιφαλέρας