ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

Τίτλος Μαθήματος: ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

Ενότητα 5: Ασκήσεις

Μαρία Σατρατζέμη

Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ασκήσεις (2)

Άσκηση 1

Υποθέστε ότι συγκρίνουμε την υλοποίηση της ταξινόμησης με εισαγωγή και της ταξινόμησης με συγχώνευση στον ίδιο υπολογιστή. Για εισόδους μεγέθους n, η ταξινόμηση με εισαγωγή απαιτεί $8n^2$ βήματα ενώ η ταξινόμηση με συγχώνευση $64n\lg n$. Για ποιες τιμές του n ταξινόμηση με εισαγωγή υπερτερεί της ταξινόμησης με συγχώνευση; (Χρησιμοποιήστε, αν κρίνετε σκόπιμο, όποιο υπολογιστικό πρόγραμμα θέλετε.)

Άσκηση 2

i) Αν $f(n) = 3n^2 - n + 4$ και $g(n) = n\log n + 5$, δείξτε ότι $f(n) + g(n) = O(n^2)$.

ii) Αν $f(n) = \sqrt{n}$ και $g(n) = \log n$, δείξτε ότι $f(n) + g(n) = O(\sqrt{n})$.

iii) Δείξτε ότι $(n + a)^k = \Theta(n^k)$, όπου a και k είναι πραγματικές σταθερές με $k > 0$.

iv) Εξηγήστε αν είναι σωστοί οι εξής ισχυρισμοί:

α) $2^{n+1} = O(2^n)$

β) $2^{2n} = O(2^n)$

Άσκηση 3

Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f(n)$ και $g(n)$ πίνακα

$f(n)$	$g(n)$
$10n$	$n^2 - 10n$
n^3	$n^2 \log n$
$n\log n$	$n + \log n$
$\log n$	$\sqrt[k]{n}$
$\ln n$	$\log n$
$\log(n+1)$	$\log n$
$\log\log n$	$\log n$
2^n	10^n
n^m	m^n

εξηγήστε αν $f(n) = O(g(n))$, και αν $g(n) = O(f(n))$.

Άσκηση 4

Λύστε κάθε μία από τις ακόλουθες αναδρομικές σχέσεις

1. $T(n) = \begin{cases} O(1) & n = 0; \\ aT(n-1) + O(1) & n > 0; \quad a > 1. \end{cases}$

2. $T(n) = \begin{cases} O(1) & n = 0; \\ aT(n-1) + O(n) & n > 0; \quad a > 1. \end{cases}$

3. $T(n) = \begin{cases} O(1) & n = 1; \\ aT(\lfloor n/a \rfloor) + O(1) & n > 1; \quad a \geq 2. \end{cases}$

4. $T(n) = \begin{cases} O(1) & n = 1; \\ aT(\lfloor n/a \rfloor) + O(n) & n > 1; \quad a \geq 2. \end{cases}$

Άσκηση 5

Υπολογίστε αυστηρά ασυμπτωτικά O φράγματα για τους χρόνους εκτέλεσης των Προγραμμάτων 1.1, 1.2, 1.3, 2.5 και 2.6 (διαφάνειες (1) των παραδόσεων του μαθήματος).

Άσκηση 6

Αλγόριθμος: *Υπολογισμός κατά όρους της τιμής ενός πολυωνύμου*

// Ο αλγόριθμος αυτός υπολογίζει την τιμή ενός πολυωνύμου $a[n]x^n + a[n-1]x^{n-1}$

//$+\cdots+ a[2]x^2 + a[1]x + a[0]$ με υπολογισμό κάθε όρου του πολυωνύμου ξεχωριστά,

//αρχίζοντας από τον $a[0]$, και προσθέτοντάς τον σε ένα συνολικό άθροισμα.]

//**Είσοδος:** n [ένας μη αρνητικός ακέραιος],

// $a[0], a[1], a[2], \ldots, a[n]$ [μια συστοιχία πραγματικών αριθμών],

// x [ένας πραγματικός αριθμός]

//**Έξοδος:** η τιμή polyval του πολυωνύμου.

$$
\begin{array}{l}
\mathit{polyval} := a[0] \\
\textbf{for } i := 1 \textbf{ to } n \\
\quad \mathit{term} := a[i] \\
\quad \textbf{for } j := 1 \textbf{ to } i \\
\qquad \mathit{term} := \mathit{term} \cdot x \\
\mathit{polyval} := \mathit{polyval} + \mathit{term}
\end{array}
$$

i) Έστω $S(n)$ το πλήθος των προσθέσεων και πολλαπλασιασμών που πρέπει να πραγματοποιηθούν κατά την εκτέλεση του Αλγορίθμου για ένα πολυώνυμο βαθμού n. Εκφράστε το $S(n)$ συναρτήσει του n.

ii) Εκφράστε την πολυπλοκότητα $S(n)$ του Αλγορίθμου στον συμβολισμό O.

Άσκηση 7

Αλγόριθμος *Horner*

// Ο αλγόριθμος αυτός υπολογίζει την τιμή ενός πολυωνύμου $a[n]x^n + a[n-1]x^{n-1} +\cdots+ a[2]x^2$

//$+ a[1]x + a[0]$ με διαδοχικές προσθέσεις και πολλαπλασιασμούς, όπως φαίνεται στην παρά-

//σταση $((\cdots((a[n]x + a[n-1])x + a[n-2])x +\cdots+ a[2])x + a[1])x + a[0]$.

//Σε κάθε βήμα, με αρχή το $a[n]$, η τρέχουσα τιμή της μεταβλητής polyval πολλαπλασιάζεται

//με x και ο επόμενος μικρότερος συντελεστής προστίθεται στη μεταβλητή.]

//**Είσοδος**: n [ένας μη αρνητικός ακέραιος]

//$a[0], a[1], a[2], \ldots, a[n]$ [μια συστοιχία πραγματικών αριθμών],

//x [ένας πραγματικός αριθμός]

//**Έξοδος:** η τιμή polyval του πολυωνύμου.

$$
\begin{array}{l}
\mathit{polyval} := a[n] \\
\textbf{for } i := 1 \textbf{ to } n \\
\quad \mathit{polyval} := \mathit{polyval} \cdot x + a[n-i]
\end{array}
$$

i) Έστω $M(n)$ το πλήθος των προσθέσεων και πολλαπλασιασμών που πρέπει να γίνουν κατά την εκτέλεση του Αλγορίθμου για ένα πολυώνυμο βαθμού n. Εκφράστε το $M(n)$ συναρτήσει του n.

ii) Εκφράστε την πολυπλοκότητα $M(n)$ του Αλγορίθμου στον συμβολισμό O.

iii) Πώς συγκρίνεται η πολυπλοκότητα αυτή με την πολυπλοκότητα του Αλγορίθμου της Άσκησης 6;