ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

Ενότητα 4: Αναδρομικές σχέσεις και ανάλυση αλγορίθμων

Μαρία Σατρατζέμη
Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

ανοικτά μαθήματα
opencourses
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Μεθοδολογία αναδρομικών σχέσεων (I)

- **Με επανάληψη της αναδρομής**
- **Έστω** $T(n) = rT(n-1) + a$

  όπου *r* και *a* είναι σταθερές.
- **Βρίσκουμε τη σχέση που εκφράζει**

  την $T(n)$ **συναρτήσει της** $T(n\text{-}2)$

  την $T(n)$ **συναρτήσει της** $T(n\text{-}3)$

  …
- **Γενικεύοντας βρίσκουμε την αναλυτική έκφραση της** $T(n)$**:**
- **Αρχικά σημειώνουμε ότι η** $T(n) = rT(n-1) + a$ **συνεπάγεται ότι**

$$\forall i < n, T(n-i) = rT((n-i)-1)) + a.$$

- **Οπότε**

$$
\begin{aligned}
T(n) &= rT(n-1)+a \\
&= r(rT(n-2)+a)+a \\
&= r^2T(n-2)+ra+a \\
&= r^2(rT(n-3)+a)+ra+a \\
&= r^3T(n-3)+r^2a+ra+a \\
&= r^3(rT(n-4)+a)+r^2a+ra+a \\
&= r^4T(n-4)+r^3a+r^2a+ra+a.
\end{aligned}
$$

- **Εικάζουμε ότι**

$$T(n) = r^nT(0) + a\sum_{i=0}^{n-1} r^i = \boxed{r^nb + a\sum_{i=0}^{n-1} r^i.}$$

- **Γνωστό άθροισμα:**

$$\sum_{i=0}^{n-1} r^i = \frac{1-r^n}{1-r}$$

- **Μπορούμε να κάνουμε την επανάληψη από «κάτω προς τα πάνω»**

$$T(0) = b$$
$$T(1) = rT(0) + a = rb + a$$
$$T(2) = rT(1) + a = r(rb + a) + a = r^2 b + ra + a$$
$$T(3) = rT(2) + a = r^3 b + r^2 a + ra + a$$

- **Κάτι τέτοιο θα μας οδηγούσε στην ίδια εικασία**

$$T(n) = r^n b + a \sum_{i=0}^{n-1} r^i.$$

- **Έχουμε λοιπόν ότι:**
- **Αν $r \neq 1$ και** $T(n) = rT(n-1) + a,\ T(0) = b$

➢ **τότε**

$$T(n) = r^n b + a \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

➢ **για κάθε φυσικό αριθμό *n*. (Απόδειξη με Μαθ. Επαγωγή)**

- **Χρήσιμη Πρόταση: Αν $r \neq 1$ είναι μια θετική σταθερά (ανεξάρτητη του n) και $t(n)$ είναι ο μεγαλύτερος όρος του αθροίσματος**

$$\sum_{i=0}^{n-1} r^i$$

τότε αυτό το άθροισμα (των n όρων μιας Γεωμ. Προόδου) είναι $O(t(n))$.

- **Απόδειξη:**
- **i) $r < 1$ (οπότε $t(n) = r^0 = 1$)**

> **Έχουμε** $$\sum_{i=0}^{n-1} r^i = \frac{1-r^n}{1-r} < \frac{1}{1-r}$$

> **που είναι $O(1) = O(t(n))$.**

- **Ii) $r > 1$ (οπότε $t(n) = r^{n-1}$)**

> **Έχουμε** $$\sum_{i=0}^{n-1} r^i = \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{r^n-1}{r-1} < \frac{r^n}{r-1} = r^{n-1}\frac{r}{r-1}$$

> **Άρα,**

$$\sum_{i=0}^{n-1} r^i = O\left(r^{n-1}\right) = O(t(n)).$$

- Έστω τώρα η αναδρομή

$$T(n) = rT(n-1) + g(n)$$

- Με επανάληψη της αναδρομής έχουμε

$$\begin{aligned} T(n) &= rT(n-1) + g(n) \\ &= r(rT(n-2) + g(n-1)) + g(n) \\ &= r^2T(n-2) + rg(n-1) + g(n) \\ &= r^3T(n-3) + r^2g(n-2) + rg(n-1) + g(n) \\ &\vdots \\ &= r^nT(0) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} r^i g(n-i) \end{aligned}$$

- Άρα, για θετικές σταθερές *a* και *r* και μια συνάρτηση *g*(*n*), η λύση της γραμμικής αναδρομικής σχέσης $1^{ου}$ βαθμού

$$T(n) = \begin{cases} rT(n-1) + g(n) & \text{if } n > 0 \\ a & \text{if } n = 0 \end{cases}$$

- είναι

$$T(n) = r^n a + \sum_{i=1}^{n} r^{n-i} g(i).$$

- **Παράδειγμα:**

$$T(n) = 4T(n-1) + 2^n \text{ με } T(0) = 6$$

- **Είναι**

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 6 \cdot 4^n + \sum_{i=1}^{n} 4^{n-i} \cdot 2^i \\
&= 6 \cdot 4^n + 4^n \sum_{i=1}^{n} 4^{-i} \cdot 2^i \\
&= 6 \cdot 4^n + 4^n \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{2})^i \\
&= 6 \cdot 4^n + 4^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (\frac{1}{2})^i \\
&= 6 \cdot 4^n + (1 - (\frac{1}{2})^n) \cdot 4^n \\
&= 7 \cdot 4^n - 2^n.
\end{aligned}
$$

- **Παράδειγμα:** $T(n) = 3T(n-1) + n$ με $T(0) = 10$
- **Είναι**

$$T(n) = 10 \cdot 3^n + \sum_{i=1}^{n} 3^{n-i} \cdot i$$

$$= 10 \cdot 3^n + 3^n \sum_{i=1}^{n} i \cdot 3^{-i}$$

$$= 10 \cdot 3^n + 3^n \left(-\tfrac{3}{2}(n+1)3^{-(n+1)} - \tfrac{3}{4}3^{-(n+1)} + \tfrac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{43}{4}3^n - \frac{n+1}{2} - \frac{1}{4}$$

Γνωστό άθροισμα

Για κάθε πραγμ. αριθμό $x \neq 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} ix^i = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}.$$

Μεθοδολογία αναδρομικών σχέσεων (ΙΙ)

- **Στην προηγούμενη ενότητα αναλύσαμε αναδρομικές σχέσεις της μορφής**

$$T(n) = \begin{cases} a & \text{if } n = b \\ c \cdot T(n-1) + d & \text{if } n > b \end{cases}$$

- **Πρόκειται για αναδρομές που αντιστοιχούν σε αναλύσεις αναδρομικών αλγορίθμων όπου ένα πρόβλημα μεγέθους *n* καταφεύγοντας στην αναδρομική επίλυση ενός (ή περισσοτέρων τους ενός) προβλήματος μεγέθους *n* – 1.**
- **Εξετάζουμε τώρα αναδρομές που ανακύπτουν από αναδρομικούς αλγόριθμους όπου προβλήματα μεγέθους *n* επιλύονται καταφεύγοντας στην αναδρομική επίλυση προβλημάτων μεγέθους *n*/*m* για συγκεκριμένο *m*. Πρόκειται για αναδρομικές σχέσεις της μορφής**

$$T(n) = \begin{cases} a & \text{αν } n \leq b \\ c \cdot T(n/m) + d & \text{αν } n > b \end{cases}$$

- **Μπορούμε να λύσουμε μια τέτοια αναδρομική εξίσωση με τη γνωστή μας μέθοδο επανάληψης της αναδρομής.**

- **Παραδείγματα:**

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

- **Για να λύσουμε κάποιο πρόβλημα μεγέθους *n***
  i. **λύνουμε 2 υποπροβλήματα μεγέθους *n*/2, και**
  ii. **κάνουμε *n* μονάδες επιπρόσθετου έργου**

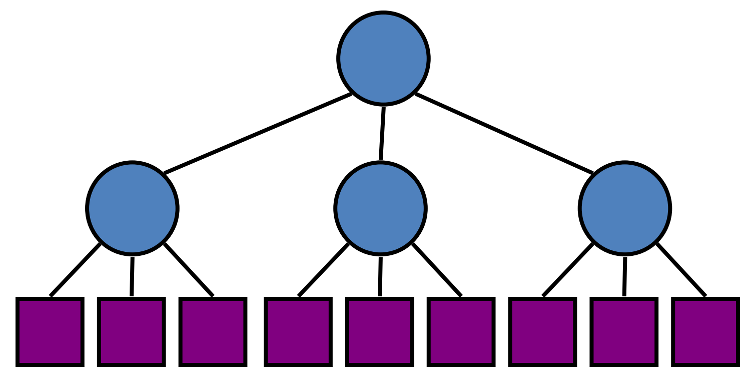
$$T(n) = T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$$

- **Για να λύσουμε κάποιο πρόβλημα μεγέθους *n***
  i. **λύνουμε 1 υποπρόβλημα μεγέθους *n*/4, και**
  ii. **κάνουμε n^2 μονάδες επιπρόσθετου έργου**

- **Τα παραδείγματα αυτά είναι ειδικές περιπτώσεις αναδρομικής σχέσης που προκύπτει κατά τη σχεδίαση ενός αλγορίθμου με τη γενική τεχνική «Διαίρει-και-Βασίλευε» (Divide and Conquer)**

Διαίρει-και-Βασίλευε (Divide-and-Conquer)

- **Διαίρει-και-Βασίλευε: γενική τεχνική σχεδίασης αλγορίθμων**
  - **Διαίρει τα εισερχόμενα δεδομένα S σε δύο ή περισσότερα ξένα υποσύνολα S_1, S_2,…**
  - **Βασίλευε τα υποπροβλήματα που σχετίζονται με τα S_1, S_2,… λύνοντάς τα αναδρομικά (ή με άμεσο τρόπο αν οι διαστάσεις τους είναι αρκετά μικρές).**
  - **Συνδύαζε τις λύσεις για S_1, S_2,… σε μια λύση για S.**
- **Το βασικό βήμα (base case) για την αναδρομή είναι υποπρόβλημα μιας σταθερής διάστασης.**
- **Η ανάλυση μπορεί να γίνει με χρήση αναδρομικών εξισώσεων**



Ανάλυση του Διαίρει-και-Βασίλευε

- **Έστω T(*n*) ο χρόνος εκτέλεσης για ένα πρόβλημα μεγέθους *n*. Αν το *n* είναι αρκετά μικρό, έστω *n* ≤ c, όπου c = σταθ., η άμεση λύση απαιτεί σταθερό χρόνο τον οποίο γράφουμε *O*(1) ή Θ(1).**

- **Ας υποθέσουμε ότι ο διαμελισμός του προβλήματος συνεπάγεται *α* υποπροβλήματα μεγέθους το καθένα 1/*b* του μεγέθους του αρχικού (συνήθως *α* = *b* = 2, π.χ Merge-Sort).**

- **Αν ο διαμελισμός απαιτεί χρόνο D(*n*) και το να συνδυαστούν οι λύσεις των υποπροβλημάτων για τη λύση του αρχικού προβλήματος απαιτεί χρόνο C(*n*) $\Rightarrow$**

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & \text{αν } n \le c \\ aT\left(\dfrac{n}{b}\right) + D(n) + C(n), & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Εφαρμογή: Ταξινόμηση με συνένωση (Merge-Sort)

- Ο Merge-Sort σε μια εισαγόμενη ακολουθία ***S*** με ***n*** στοιχεία συνίσταται στα τρία βήματα:
  - Διαίρει: διαμέρισε την ***S*** σε 2 ακολουθίες $\boldsymbol{S_1}$ ***και*** $\boldsymbol{S_2}$ με περίπου ***n***/2 στοιχεία η κάθε μία
  - Βασίλευε: αναδρομικά ταξινόμησε τις $\boldsymbol{S_1}$ και $\boldsymbol{S_2}$
  - Συνδύαζε: συνένωσε τις $\boldsymbol{S_1}$ και $\boldsymbol{S_2}$ σε μία ταξινομημένη ακολουθία

* Θεωρούμε τα στοιχεία των ακολουθιών ***S***, $\boldsymbol{S_1}$ και $\boldsymbol{S_2}$ ως στοιχεία των μονοδιάστατων πινάκων $A[1\,..\,n]$, $A[1\,..\lceil n/2\rceil]$, και $A[\lceil n/2\rceil+1\,..\,n]$ αντίστοιχα.

Ταξινόμηση με συνένωση

Merge-Sort $A[1\,.\,.\,n]$

1. Αν $n = 1$, τέλος.
2. Αναδρομικά ταξινόμησε $A[\,1\,.\,.\lceil n/2\rceil\,]$ και $A[\,\lceil n/2\rceil+1\,.\,.\,n\,]$.
3. "***Συνένωσε***" τις 2 ταξινομημένες λίστες.

Χαρακτηριστική υπορουτίνα: **Merge**

Συνένωση δύο ταξινομημένων ακολουθιών

20	12
13	11
7	9
2	1

Συνένωση δύο ταξινομημένων ακολουθιών

20	12
13	11
7	9
2	1

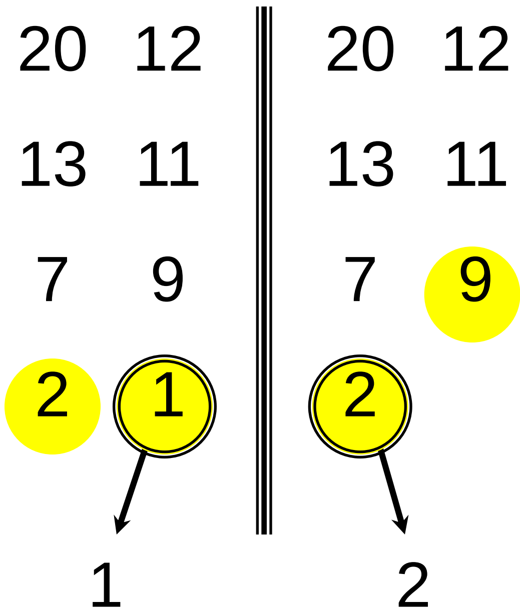
1

Συνένωση δύο ταξινομημένων ακολουθιών

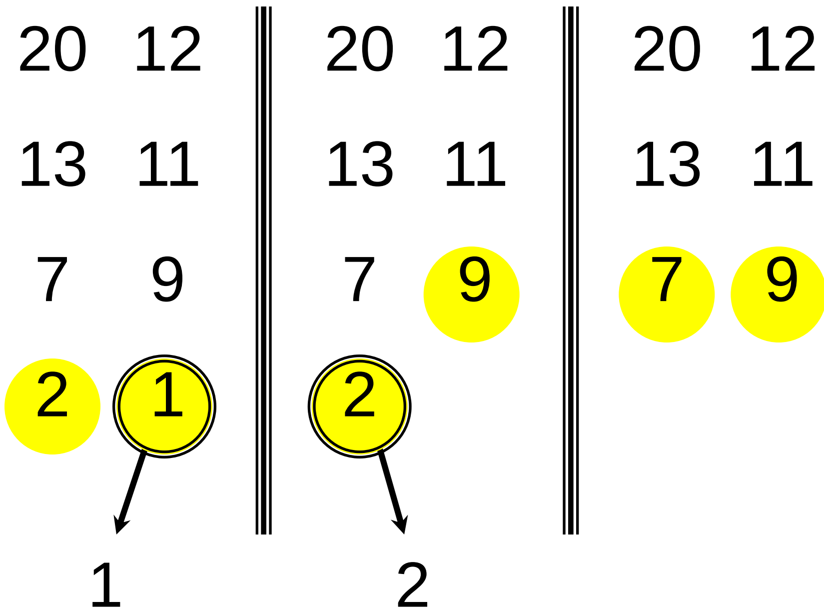
20	12	20	12
13	11	13	11
7	9	7	9
2	1	2	

1

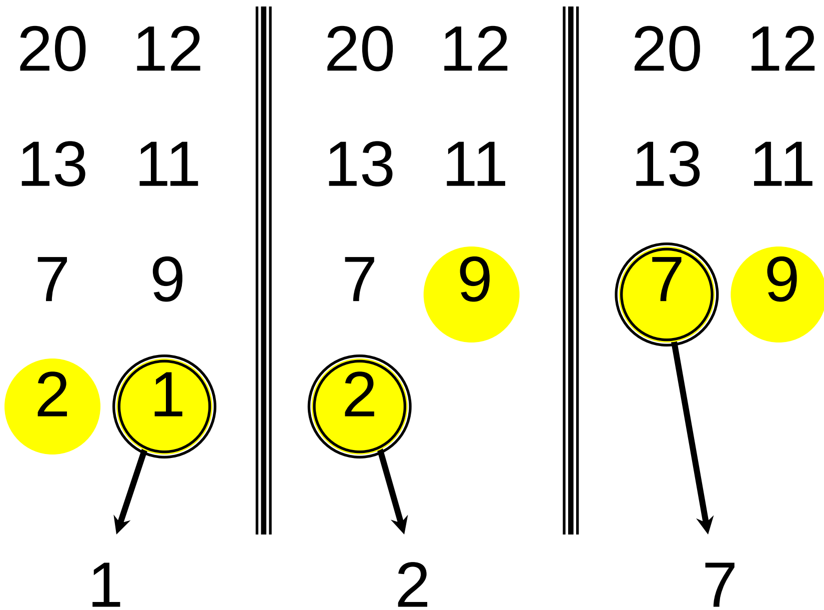
Συνένωση δύο ταξινομημένων ακολουθιών



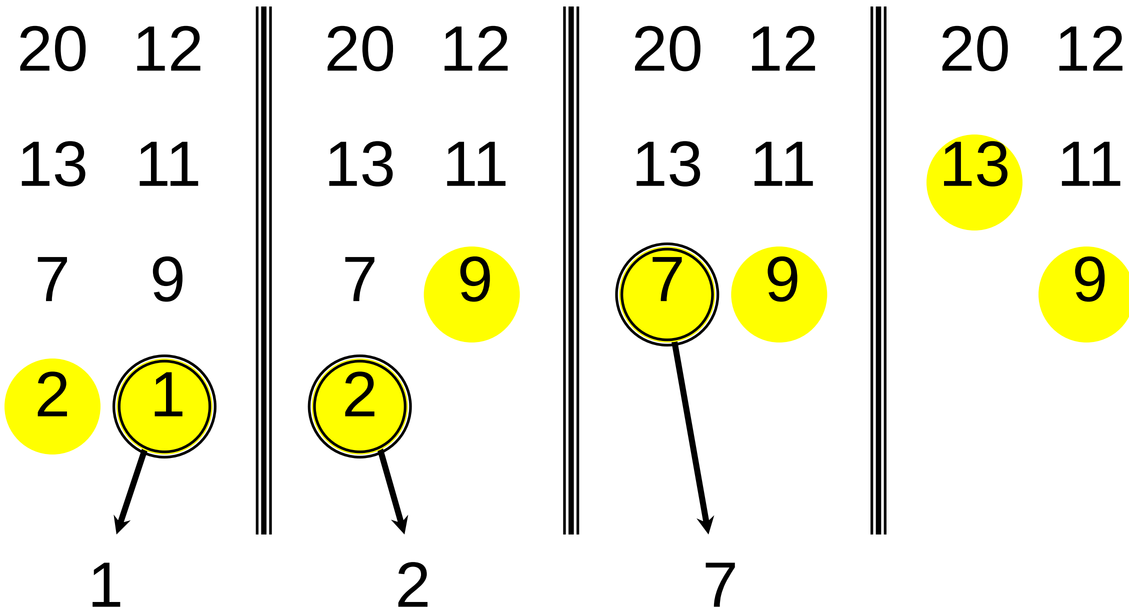
Συνένωση δύο ταξινομημένων ακολουθιών



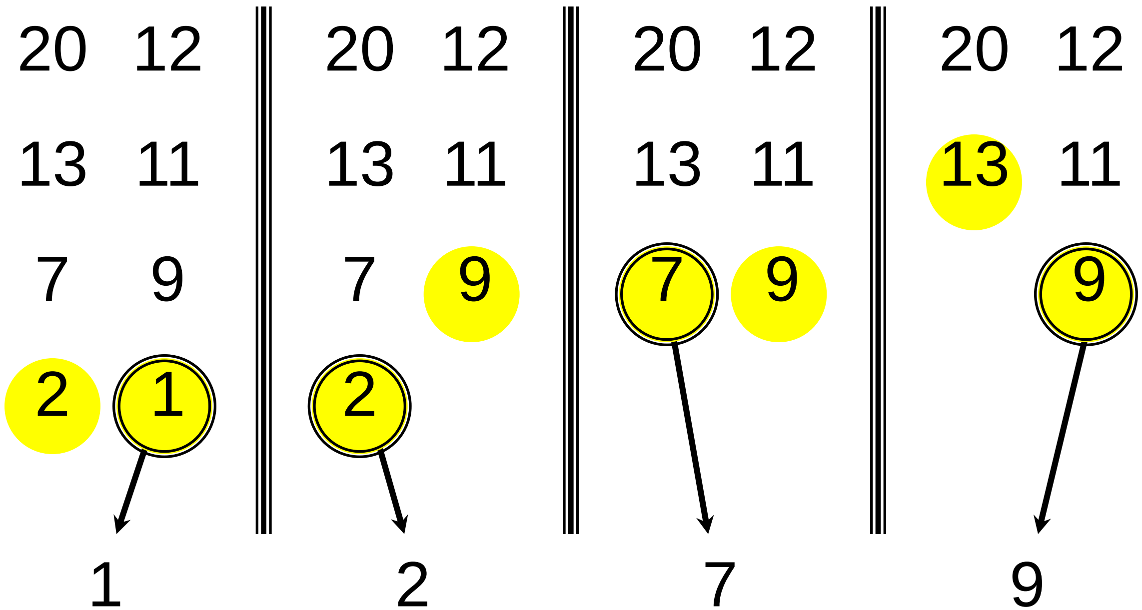
Συνένωση δύο ταξινομημένων ακολουθιών



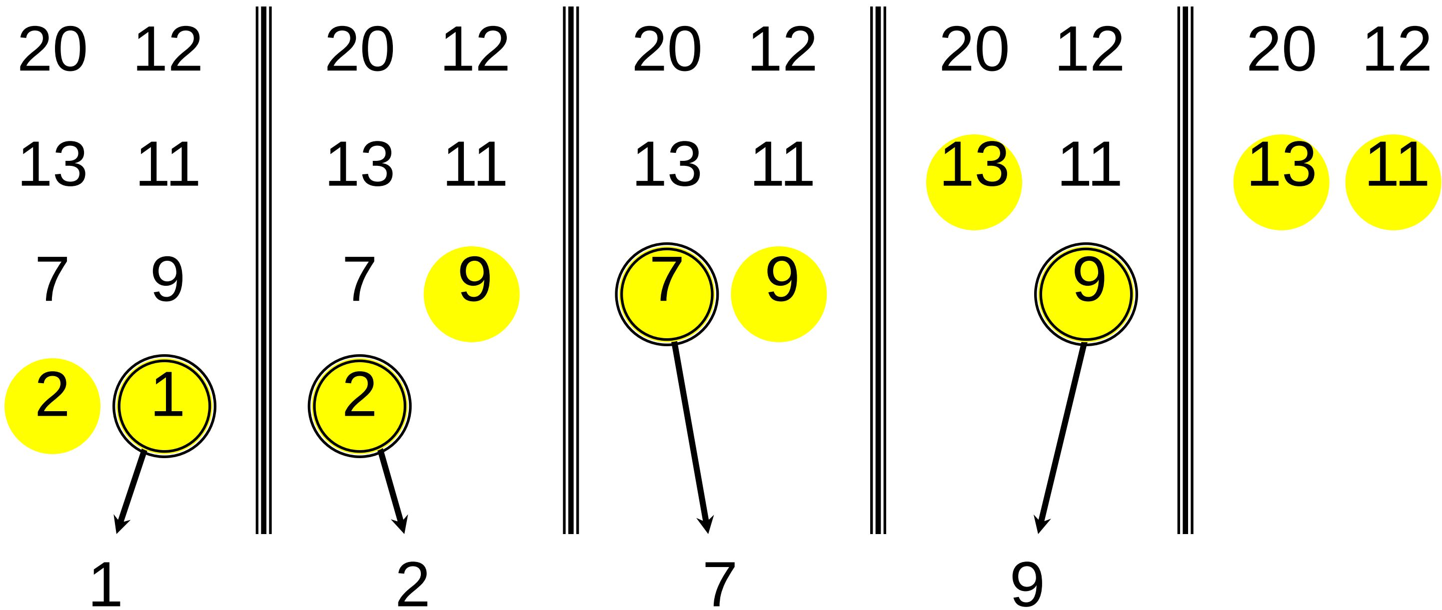
Συνένωση δύο ταξινομημένων ακολουθιών



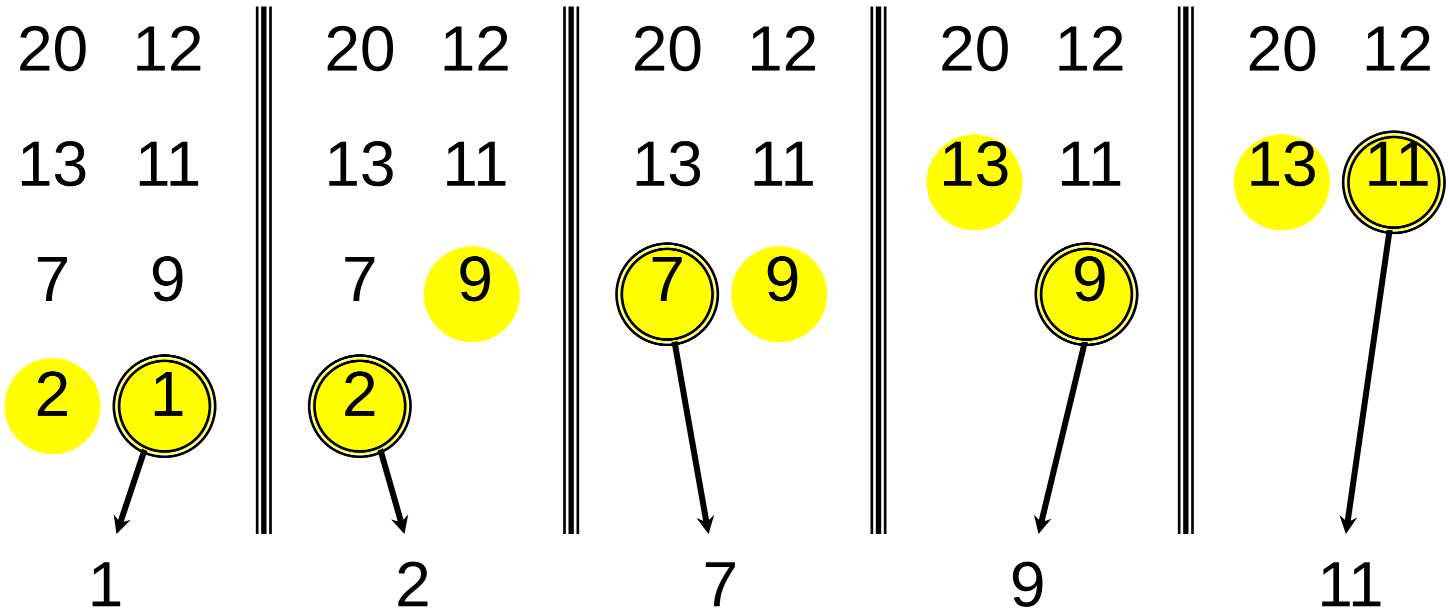
Συνένωση δύο ταξινομημένων ακολουθιών



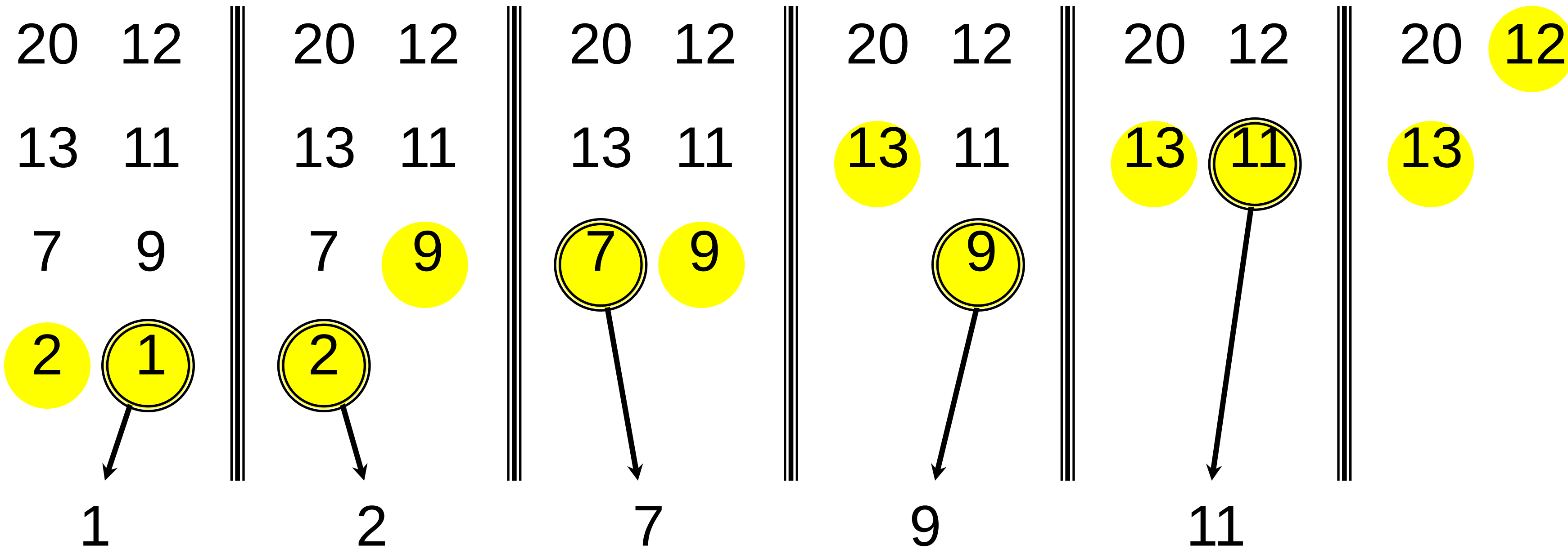
Συνένωση δύο ταξινομημένων ακολουθιών



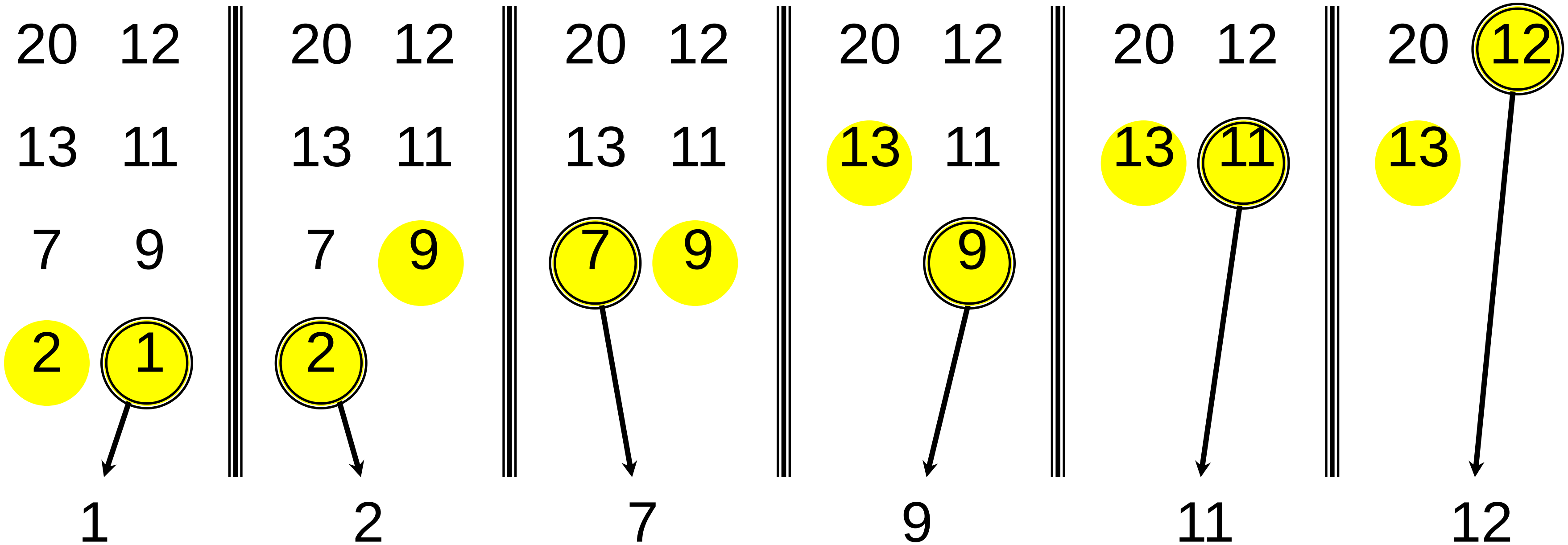
Συνένωση δύο ταξινομημένων ακολουθιών



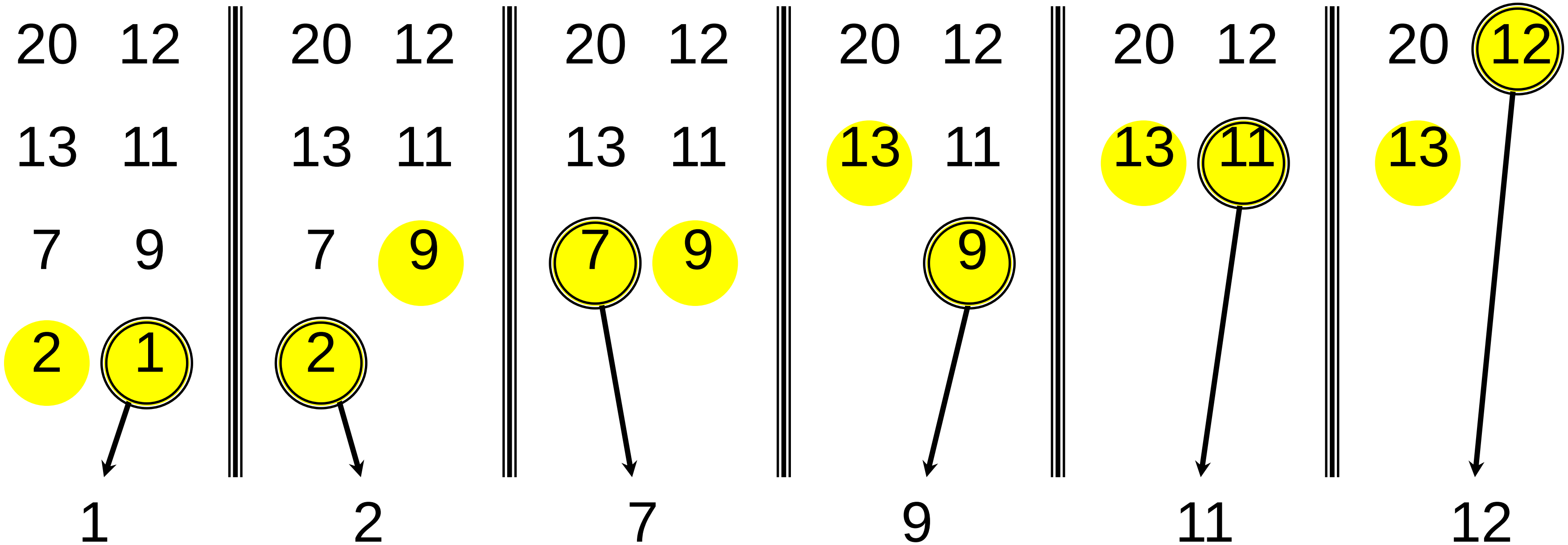
Συνένωση δύο ταξινομημένων ακολουθιών



Συνένωση δύο ταξινομημένων ακολουθιών



Συνένωση δύο ταξινομημένων ακολουθιών



Υπολογιστικά, κάθε βήμα απαιτεί σταθερό χρόνο επειδή απλά συγκρίνουμε δύο στοιχεία (τα πρώτα κάθε φορά). Επειδή εκτελούμε *n* το πολύ βήματα, η συνένωση απαιτεί χρόνο Θ(*n*).

Χρόνος = Θ(*n*) για συνένωση συνολικά *n* στοιχείων.

Merge

- **Η διαδικασία που περιγράψαμε υποθέτει ότι οι δύο (υπο)συστοιχίες είναι ταξινομημένες και τις συνενώνει σε μία (υπο)συστοιχία.**
- **Δύο δείκτες αρχικοποιούνται για να δείχνουν στα πρώτα στοιχεία των υπό συνένωση συστοιχιών. Στη συνέχεια αυτά τα δύο στοιχεία συγκρίνονται, με το μικρότερο να προστίθεται στη νέα υπό διαμόρφωση συστοιχία και μετά ο δείκτης του μικρότερου στοιχείου αυξάνεται κατά 1 για να δείχνει στο αμέσως επόμενο στοιχείο της (υπο)συστοιχίας από την οποία αντιγράφηκε.**
- **Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται μέχρις ότου μια από τις (υπο)συστοιχίες εξαντληθεί οπότε τα εναπομείναντα στοιχεία της άλλης (υπο)συστοιχίας αντιγράφονται στο τέλος της νέας (υπο)συστοιχίας.**

Αλγόριθμος *Merge* (A, p, q, r)

```
Merge(A, p, q, r) {
  i = p                                        //δείκτης στο A[p .. q]
  m = q + 1                                    //δείκτης στο A[q+1 .. r]
  s = p                                        // δείκτης στο A[p .. r-p+1]
  while( i <= q && m <= r) {
        //αντέγραψε μικρότερη τιμή στο C
        if ( A[i] <= A[m] ) {
            C[s] = A[i]
             i = i + 1
        }
        else {
            C[s] = A[m]
            m = m + 1
        }
        s = s + 1
        //αντέγραψε το υπόλοιπο, αν υπάρχει, της πρώτης υποσυστοιχίας στο C
        while( i <= q ) {
                   C[s] = A[i]
                   i = i + 1
                   s = s + 1
         }
         // αντέγραψε το υπόλοιπο, αν υπάρχει, της δεύτερης υποσυστοιχίας στο C
         while( m <= r ) {
                C[s] = A[m]
                m = m + 1
                      s = s + 1
         }
         //αντέγραψε το C στο A
         for s = p to r
               A[s] = C[s]
 }
```

Merge

```
Αλγόριθμος Merge(A, p, q, r)
n1 ← q – p + 1
n2 ← r – p
δημιούργησε μονοδ. πίνακες L[1 .. n1 + 1] και R[1 .. n2 + 1]
for i ← 1 to n1
        do L[i] ← A[p + i - 1]
for j ← 1 to n2
        do R[j] ← A[q + j]
L[n1 + 1] ← M
R[n2 + 1] ← M
i ← 1
j ← 1
for k ← p to r
         do if L[i] ≤ R[j]
                 then A[k] ← L[i]
                         i ← i + 1
                 else A[k] ← R[j]
                         j ← j + 1
```

(CLRS)

Μεθοδολογία αναδρομικών σχέσεων (ΙΙΙ)

- **Επανερχόμαστε στην επίλυση μιας αναδρομικής εξίσωσης με τη μέθοδο επανάληψης της αναδρομής.**
- **Παράδειγμα 1: (υποθέτουμε ότι το *n* είναι μια δύναμη του 2, δηλ. *n* = 2*^k^*)**

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n = 2\left(2T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{n}{2}\right) + n \\
&= 4T\left(\frac{n}{4}\right) + 2n = 4\left(2T\left(\frac{n}{8}\right) + \frac{n}{4}\right) + 2n \\
&= 8T\left(\frac{n}{8}\right) + 3n \\
&\;\;\vdots \qquad\qquad \vdots \\
&= 2^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + in \\
&\;\;\vdots \\
&= 2^{(\log_2 n)} T\left(\frac{n}{2^{(\log_2 n)}}\right) + (\log_2 n)\, n
\end{aligned}
$$

Τέλος όταν

$i = \log_2 n$

$$= nT(1) + n\log_2 n$$

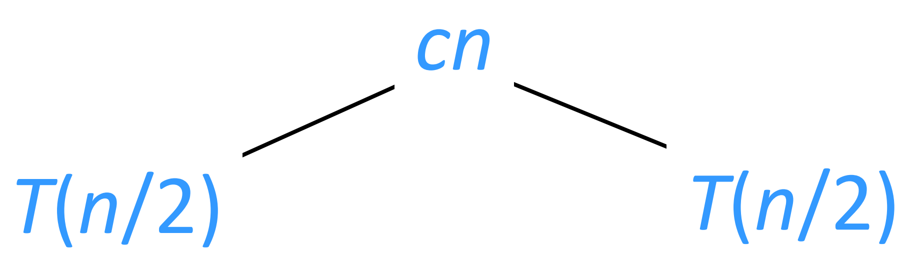
Δέντρο Αναδρομής

Επίλυση της $T(n) = 2T(n/2) + cn$, όπου $c > 0$ (σταθ.)

- **Σχηματίζω ένα δένδρο αναδρομής που δείχνει τις διαδοχικές αναδιπλώσεις της αναδρομής**

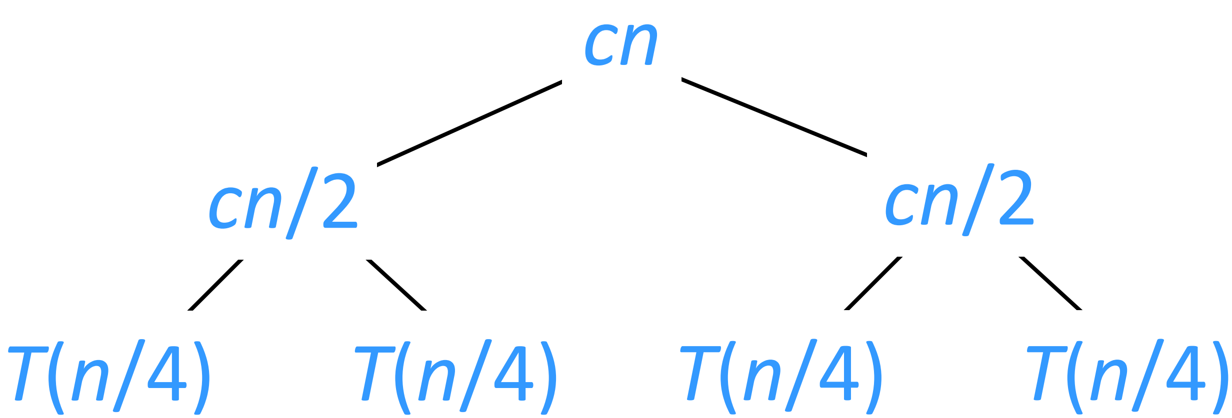
Δέντρο Αναδρομής

Αρχικά έχουμε το ‘‘κόστος’’ *cn* συν τα δύο υποπροβλήματα με κόστος το καθένα *T*(*n*/2)



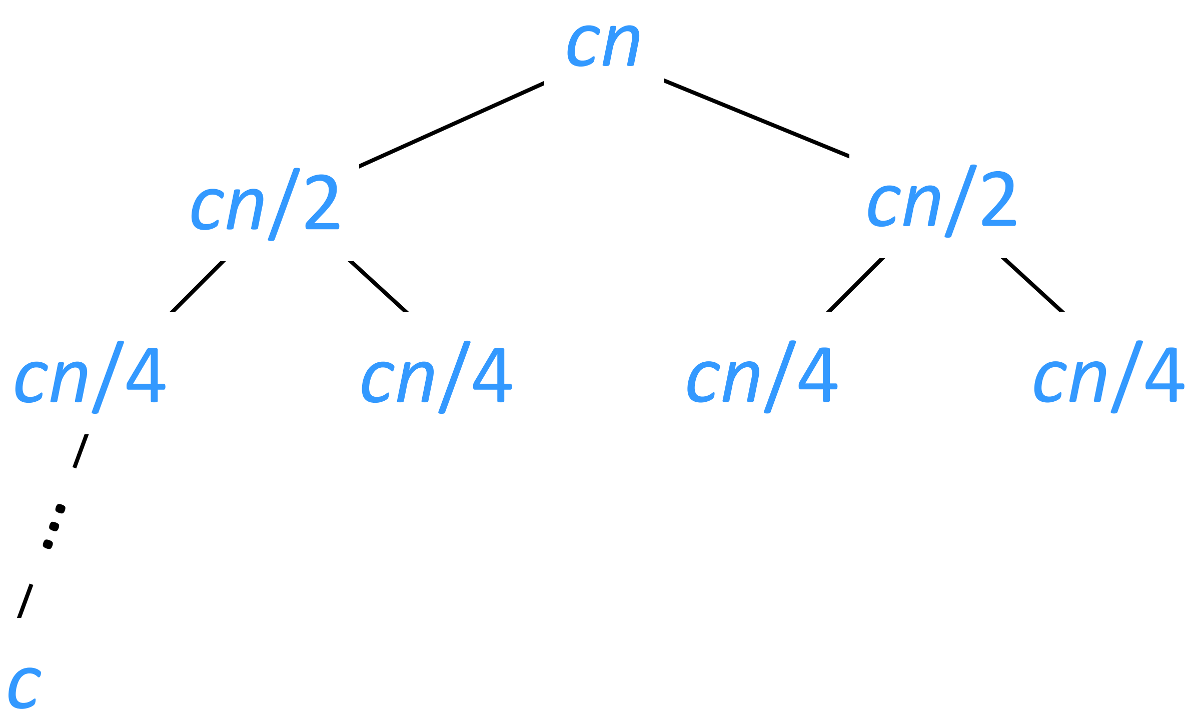
Δέντρο Αναδρομής

Για κάθε υποπρόβλημα μεγέθους *n*/2 έχουμε ένα κόστος *n*/2 συν δύο υποπροβλήματα με κόστος το καθένα *T*(*n*/4)



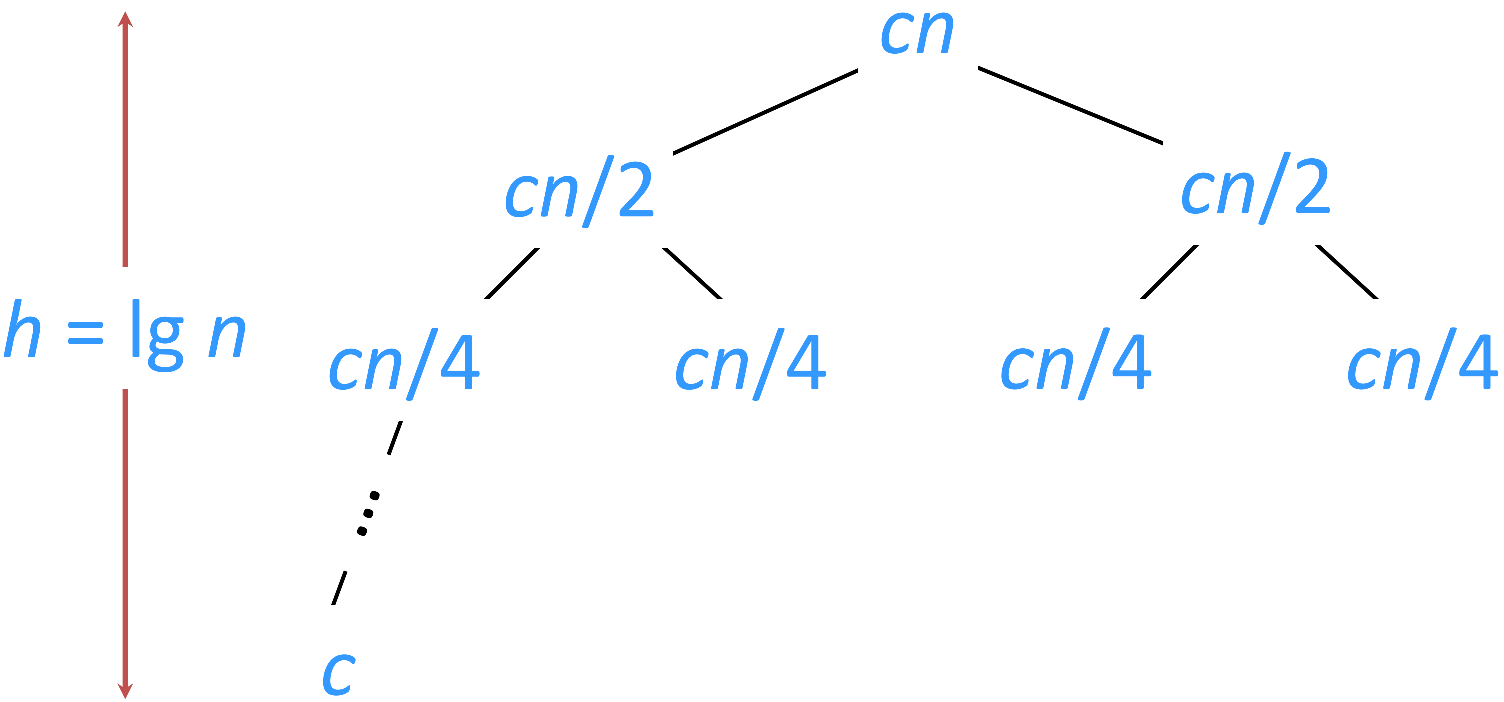
Δέντρο Αναδρομής

Συνεχίζουμε την αναδίπλωση μέχρι να γίνει το μέγεθος των υπο-προβλημάτων = 1



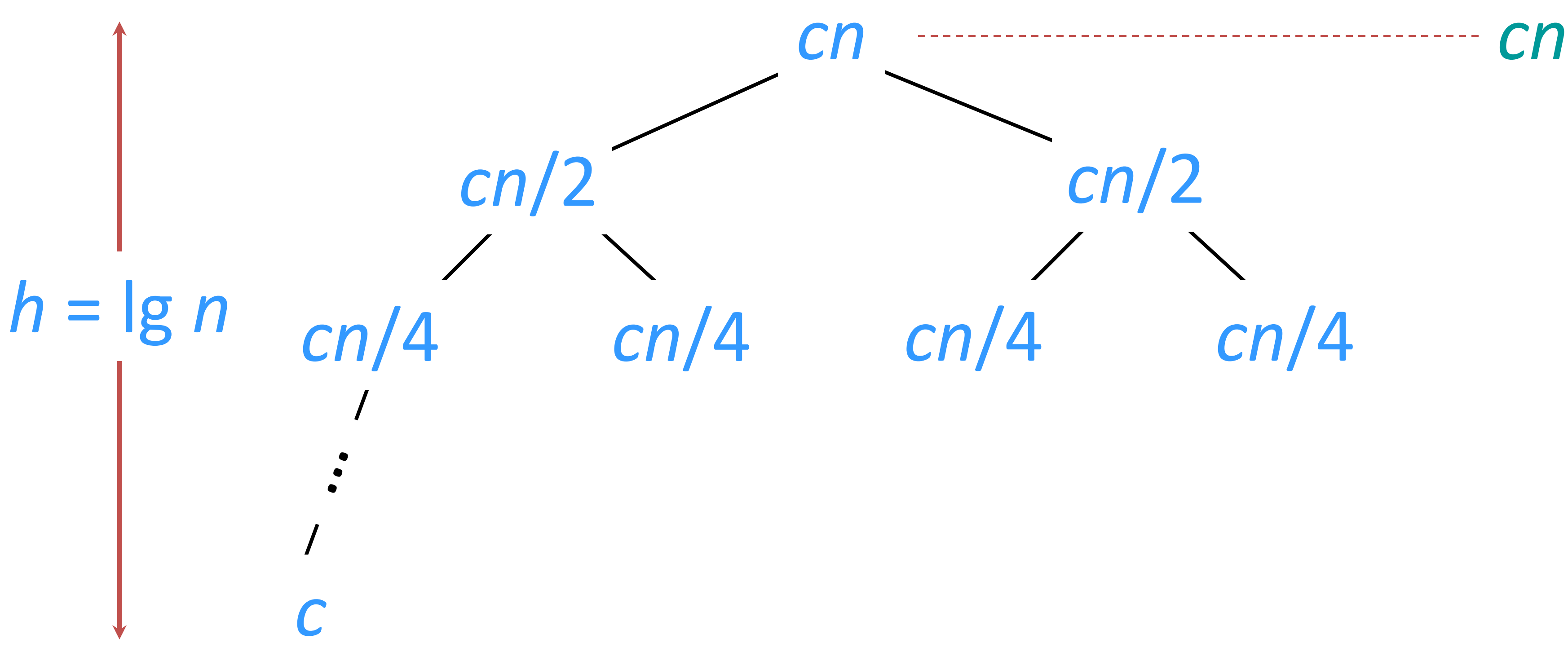
Δέντρο Αναδρομής

$n/2^i = 1 \Leftrightarrow i = \log_2 n := \lg n$



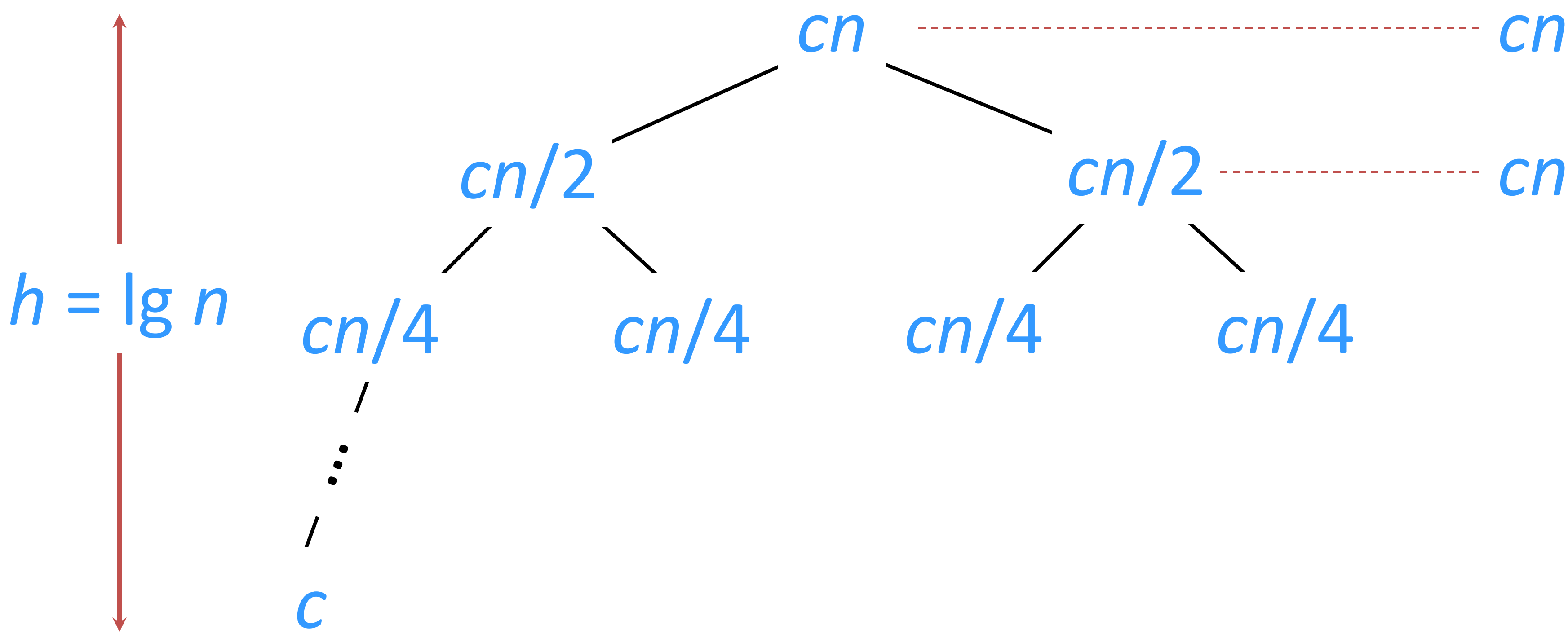
Δέντρο Αναδρομής

Επίλυση της $T(n) = 2T(n/2) + cn$, όπου $c > 0$ (σταθ.)



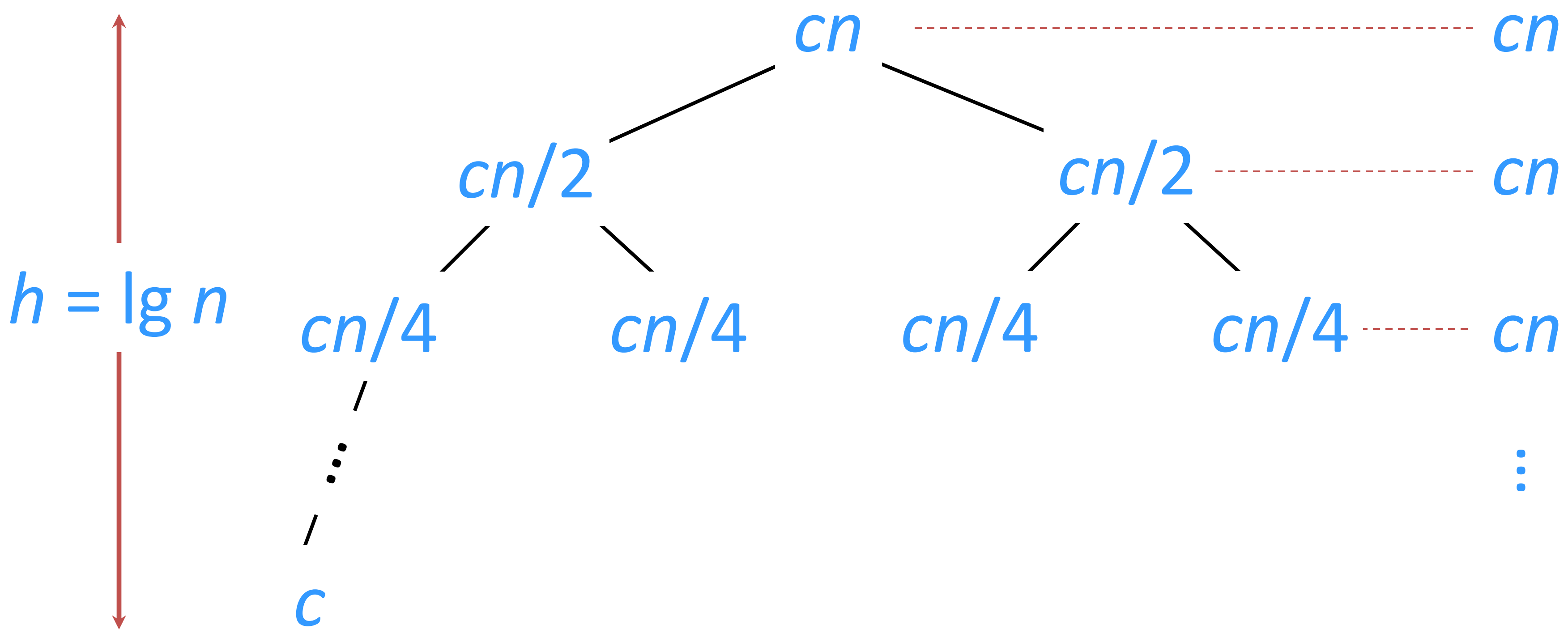
Δέντρο Αναδρομής

Επίλυση της $T(n) = 2T(n/2) + cn$, όπου $c > 0$ (σταθ.)



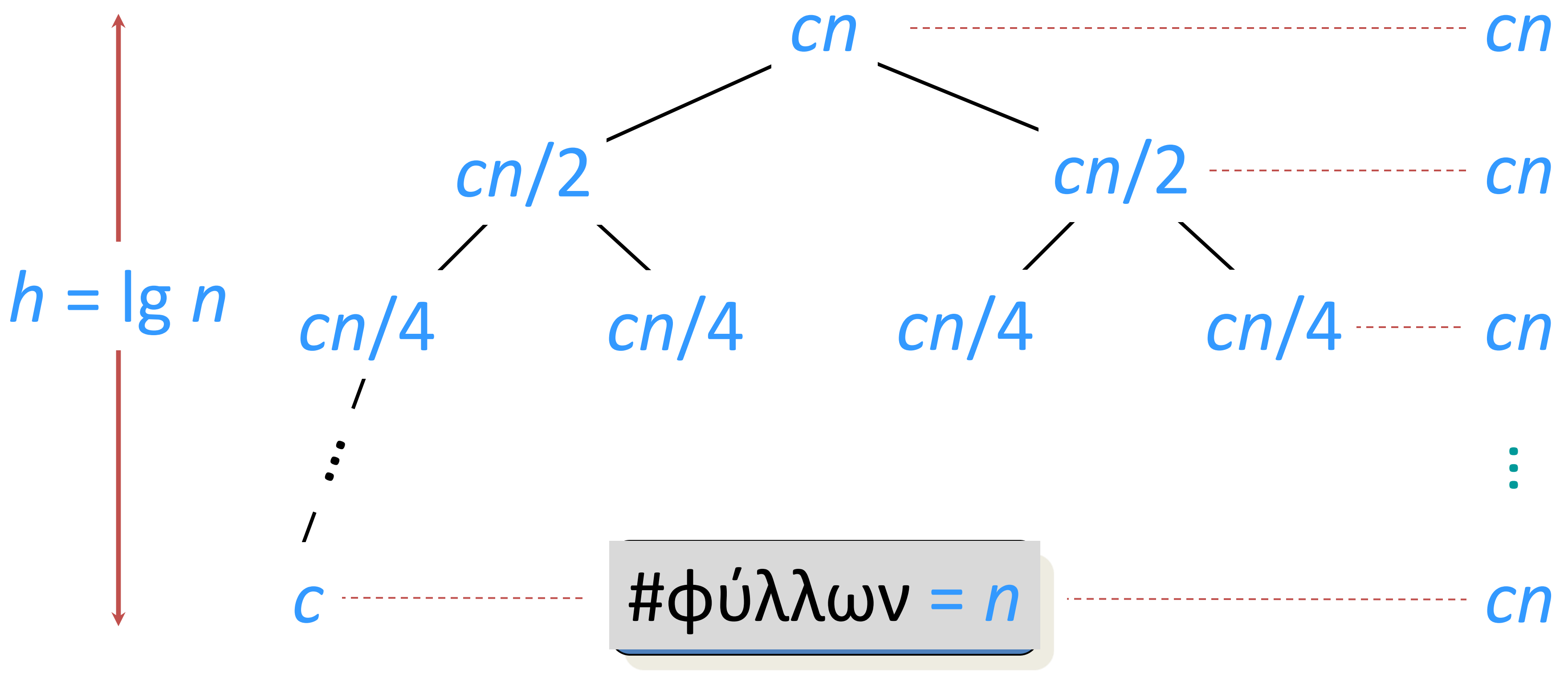
Δέντρο Αναδρομής

Επίλυση της $T(n) = 2T(n/2) + cn$, όπου $c > 0$ (σταθ.)



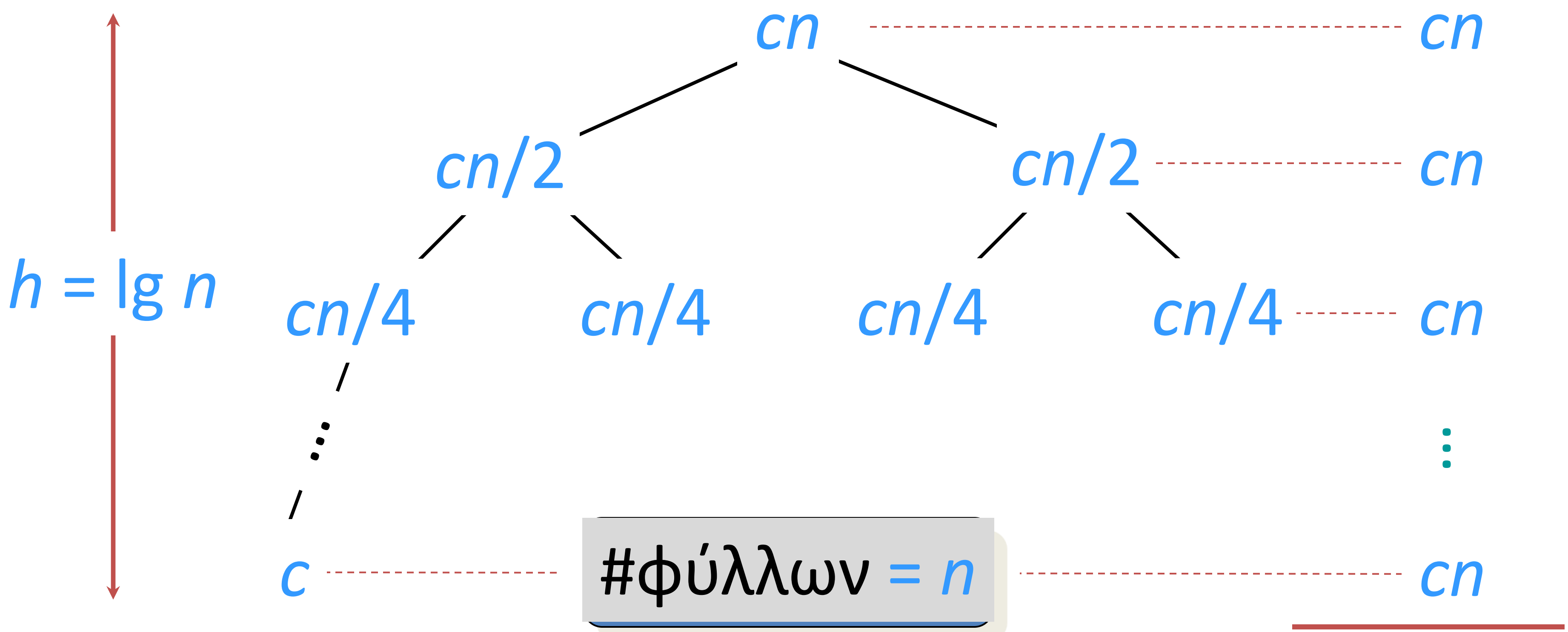
Δέντρο Αναδρομής

Επίλυση της $T(n) = 2T(n/2) + cn$, όπου $c > 0$ (σταθ.)



Δέντρο Αναδρομής

Επίλυση της $T(n) = 2T(n/2) + cn$, όπου $c > 0$ (σταθ.)

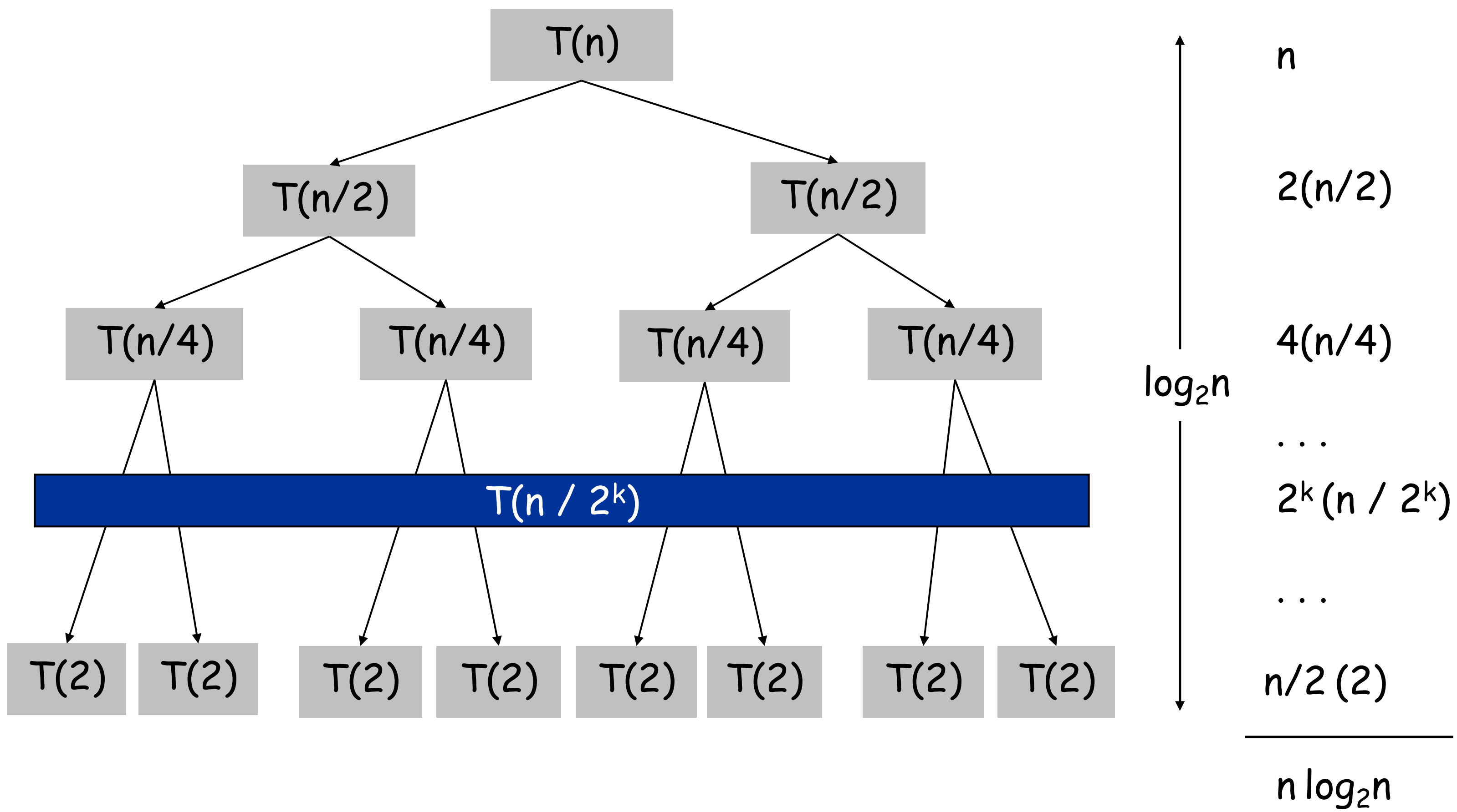


$cn\lg n$
$= \Theta(n\lg n)$

Δείτε Σημειώσεις->
Συνήθεις_τύποι_αναδρομικών_σχέσεων_στην_Ανάλυση_Αλγορίθμων_2013.pdf

Απόδειξη με το δένδρο αναδρομής

$$T(n)=\begin{cases} 0 & \text{if } n=1 \\ \underbrace{2T(n/2)}_{\text{ταξινόμηση των 2 μισών τμημάτων}} + \underbrace{n}_{\text{merging}} & \text{otherwise} \end{cases}$$



Παράδειγμα 2

- Έστω η αναδρομική σχέση $$T(n) = \begin{cases} T(n/2) + n & \text{if } n \geq 2, \\ 1 & \text{if } n = 1. \end{cases}$$
- Με τη μέθοδο της επανάληψης έχουμε (υποθέτοντας ότι *n* = δύναμη του 2)

$$\begin{aligned} T(n) &= T\left(\frac{n}{2}\right) + n \\ &= T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{n}{2} + n \\ &= T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{n}{2^2} + \frac{n}{2} + n \\ &\vdots \\ &= T\left(\frac{n}{2^i}\right) + \frac{n}{2^{i-1}} + \ldots + \frac{n}{2^2} + \frac{n}{2} + n \\ &\vdots \\ &= T\left(\frac{n}{2^{\log_2 n}}\right) + \frac{n}{2^{\log_2 n - 1}} + \ldots + \frac{n}{2^2} + \frac{n}{2} + n \end{aligned}$$

- **Έχουμε,** $$n+\frac{n}{2}+\frac{n}{2^2}+\frac{n}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^{\log_2 n-1}}$$

$$=n\left(\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{\log_2 n-1}}\right)$$

$$=n\sum_{i=0}^{\log_2 n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^i$$ **Αλλά**: $$\sum_{i=0}^{\log_2 n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^i=O(1)$$

$$T(n)=T(1)+n\sum_{i=0}^{\log_2 n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^i=1+n\sum_{i=0}^{\log_2 n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^i$$

$$T(n)=nO(1)=O(n)$$

δες σελίδα 5, το άθροισμα των n όρων μιας Γεωμ. Προόδου είναι O(t(n)), όπου t(n) ο μεγαλύτερος όρος του αθροίσματος.
Στην περίπτωση μας ο t(n) =1/2 < 1, άρα t(n)=1, i = 0.

Παράδειγμα 3

$$T(n) = \begin{cases} 3T(n/3) + n & \text{if n} \geq 3, \\ 1 & \text{if n} < 3. \end{cases}$$

- **Με τη μέθοδο της επανάληψης έχουμε (υποθέτοντας ότι *n* = δύναμη του 3)**

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{3}\right) + n \qquad = 3\left(3T\left(\frac{n}{3^2}\right) + \frac{n}{3}\right) + n$$

$$= 3^2T\left(\frac{n}{3^2}\right) + 2n \qquad = 3^2\left(3T\left(\frac{n}{3^3}\right) + \frac{n}{3^2}\right) + 2n$$

$$= 3^3T\left(\frac{n}{3^3}\right) + 3n$$

$$\vdots$$

$$= 3^iT\left(\frac{n}{3^i}\right) + in$$

$$\vdots$$

$$= 3^{\log_3 n}T\left(\frac{n}{3^{\log_3 n}}\right) + n\log_3 n$$

$$= \boxed{n + n\log_3 n}$$

- **Ας γενικεύσουμε λίγο: Ελάττωση κατά έναν σταθερό παράγοντα**

$$T(n) = T(n/b) + f(n)$$

- **1ο. Λύνω τη σχέση για $n = b^k$, $k \in N^*$**
- **2ο. Η ασυμπτωτική λύση (για κάθε n) βρίσκεται με τη βοήθεια του θεωρήματος ομαλής συνάρτησης (βλ. παρακάτω).**
- **Για $n = b^k$:**
- $T(b^k) = T(b^{k-1}) + f(b^k)$

$$\begin{aligned} &= T(b^{k-2}) + f(b^{k-1}) + f(b^k) \\ &= \ldots \\ &= T(1) + \sum_{i=1}^{k} f\left(b^i\right) \end{aligned}$$

- **Για παράδειγμα,**
- $f(n) = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} f\left(b^i\right) = k = \log_b n$
- $f(n) = n \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} f\left(b^i\right) = \sum_{i=1}^{k} b^i = b\,\frac{b^k - 1}{b-1} = b\,\frac{n-1}{b-1}$

Κριτήριο Ομαλότητας

- **Ορισμός:** Η μη αρνητική συνάρτηση f, ορισμένη στο σύνολο των φυσικών αριθμών, λέγεται **ομαλή** (smooth) αν $f(n) \leq f(n+1)$, για κάθε $n \geq n_0$, και $f(2n) = \Theta(f(n))$.
- **Παράδειγμα:** Η συνάρτηση $f(n) = n \log n$ είναι ομαλή, αφού εύκολα μπορούμε να δούμε ότι
- ✓ είναι αύξουσα, και
- ✓ $f(2n) = 2n \log(2n) = 2n(\log 2 + \log n) = (2\log 2)n + 2n \log n = \Theta(n \log n)$.
- ➢ **Θεώρημα:** Αν f ομαλή, τότε $f(bn) = \Theta(f(n))$, για κάθε ακέραιο $b \geq 2$.
- **Παραδείγματα:** $\log n$, n, $n \log n$, n^a με $a \geq 0$, ενώ a^n με $a \geq 1$, και $n!$ **όχι**.
- **Θεώρημα (κριτήριο ομαλότητας):** Έστω T συνάρτηση τελικά αύξουσα και f μια ομαλή συνάρτηση. Αν $T(n) = \Theta(f(n))$ για τιμές του n που είναι δυνάμεις του b, με $b \geq 2$, τότε

  ➢ $T(n) = \Theta(f(n)),\ n \in \mathbb{N}$.

❖ **Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν για τις περιπτώσεις των O και Ω.**

Κύριο Θεώρημα (Master Theorem)

- **Το κύριο θεώρημα αποτελεί «συνταγή» για την επίλυση αναδρομικών σχέσεων την μορφής**

$$T(n) = aT(n/b) + f(n), \qquad (1)$$

όπου $a \geq 1$, $b > 1$ σταθερές και $f(n)$, μια ασυμπτωτικά θετική συνάρτηση.

- **Το Κ.Θ. απαιτεί την απομνημόνευση 3 περιπτώσεων και έτσι μπορεί να προσδιορίζει εύκολα τη λύση πολλών αναδρομικών σχέσεων.**
- **Η αναδρομική σχέση (1) περιγράφει τη χρονική εκτέλεση ενός αλγόριθμου που διαιρεί το δεδομένο πρόβλημα μεγέθους n σε a υποπροβλήματα το καθένα μεγέθους n/b, όπου a και b θετικές σταθερές.**
- **Τα a το πλήθος υποπροβλήματα επιλύονται αναδρομικά το καθένα σε χρόνο $T(n/b)$. Το κόστος της διαίρεσης του προβλήματος και του συνδιασμού των αποτελεσμάτων των υποπροπροβλημάτων δίνεται από τη συνάρτηση $f(n)$.**
- **Οσον αφορά το ζήτημα της τεχνικής αρτιότητας η αναδρομική σχέση στην πραγματικότητα δεν είναι καλά ορισμένη γιατί η ποσότητα n/b πιθανόν να μην έχει ακέραια τιμή. Η αντικατάσταση καθενός από τους όρους $T(n/b)$ είτε από $T(\lfloor n/b \rfloor)$ είτε από $T(\lceil n/b \rceil)$ δεν επηρεάζει την ασυμπτωτική συμπεριφορά, γι’ αυτό το λόγο παραλείπουμε τα ανώφλια και τα κατώφλια από αναδρομικές σχέσεις τύπου «διαίρει-και-βασίλευε» χάριν απλότητας.**

Κύριο Θεώρημα (Master Theorem)

- **Πολλές «Διαίρει-και-Βασίλευε» αναδρομικές σχέσεις έχουν τη μορφή:**

$$T(n)=\begin{cases} c & \text{αν } n\le d \\ aT(n/b)+f(n) & \text{αν } n>d \end{cases}$$

- **Έστω a, b ακέραιοι τέτοιοι, ώστε $a\ge 1$, $b>1$. Έστω επίσης ότι n/b συμβολίζει το $\lfloor n/b \rfloor$ ή το $\lceil n/b \rceil$. Το $T(n)$ μπορεί να φραγεί ασυμπτωτικά:**

$$T(n)=\begin{cases} \Theta\left(n^{\log_b a}\right) & \text{αν} \quad f(n)=O\left(n^{\log_b a-\varepsilon}\right) \\ \Theta\left(n^{\log_b a}\log n\right) & \text{αν} \quad f(n)=\Theta\left(n^{\log_b a}\right) \\ \Theta\left(f(n)\right) & \text{αν} \quad f(n)=\Omega\left(n^{\log_b a+\varepsilon}\right). \text{ και αν} \\ & af(n/b)<cf(n) \text{ για μεγάλα } n \end{cases} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \begin{matrix}\varepsilon>0\\ c<1\end{matrix}$$

Κύριο Θεώρημα (Master Theorem)

- **Σε καθεμία από τις 3 περιπτώσεις συγκρίνουμε τη συνάρτηση $f(n)$ με τη συνάρτηση** $n^{\log_b a}$
- **Σε ποιοτικό επίπεδο, η λύση της αναδρομικής σχέσης καθορίζεται από τη μεγαλύτερη από τις δυο συναρτήσεις.**
- **Περίπτωση 1. αν η μεγαλύτερη είναι η** $n^{\log_b a}$ **τότε η λύση είναι**

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$$

- **Περίπτωση 3. αν η μεγαλύτερη είναι η $f(n)$ τότε η λύση είναι**

$$T(n) = \Theta(f(n))$$

- **Περίπτωση 2. αν οι δυο συναρτήσεις είναι ισομεγέθεις πολλαπλασιάζουμε με ένα λογαριθμικό παράγοντα**

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \lg n\right) = \Theta(f(n) \lg n)$$

Κύριο Θεώρημα (Master Theorem)

- **Στην περ. 1 δεν αρκεί η $f(n)$ να είναι μικρότερη από την $n^{\log_b a}$ αλλά θα πρέπει να είναι πολυωνυμικά μικρότερη , δηλαδή η $f(n)$ θα πρέπει να είναι ασυμπτωτικά μικρότερη της $n^{\log_b a}$ κατά ένα παράγοντα n^{ε} για κάποια σταθερά $\varepsilon > 0$.**
- **Στην περ. 3 δεν αρκεί η $f(n)$ να είναι μεγαλύτερη από την $n^{\log_b a}$ αλλά θα πρέπει να είναι πολυωνυμικά μεγαλύτερη και να ικανοποιεί το κριτήριο ομαλότητας $f(n/b) \le cf(n)$.**
  Η συνθήκη αυτή ικανοποιείται από τις περισσότερες πολυωνυμικά φραγμένες συναρτήσεις που θα μελετήσουμε.
- **Οι 3 περιπτώσεις δεν καλύπτουν όλες τις δυνατότητες για την $f(n)$. Μεταξύ των περιπτώσεων 1 και 2 υπάρχει ένα χάσμα, και ανάλογα χάσμα μεταξύ των περιπτώσεων 2 και 3.**

Κύριο Θεώρημα: Παραδείγματα (I)

- $T(n) = 9T(n/3) + n$
  - $a = 9, b = 3, f(n) = n$
  - $n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = \Theta(n^2)$
  - $f(n) = O(n^{\log_3 9 - \varepsilon})$, όπου ε = 1, οπότε περίπτωση 1:

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right) \text{εφόσον } f(n) = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$$

$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^2)$

Κύριο Θεώρημα: Παραδείγματα (II)

- $T(n) = T(2n/3) + 1$
  - $a = 1$, $b = 3/2$, $f(n) = 1$
  - $n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1$
  - $f(n) = \Theta(n^{\log_b \alpha}) = \Theta(1)$, οπότε περίπτωση 2:

$$T(n) = \Theta(\lg n)$$

Κύριο Θεώρημα: Παραδείγματα (ΙΙΙ)

- $T(n) = 3T(n/4) + n\lg n$
  - $a = 3$, $b = 4$, $f(n) = n\lg n$
  - $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = O(n^{0,703})$
  - $f(n) = \Omega(n^{\log_4 3+\varepsilon})$, **όπου** $\varepsilon \approx 0.2$, **ισχύει η περίπτωση 3, υπό την προϋπόθεση ότι ισχύει και το κριτήριο ομαλότητας για τη συνάρτηση** $f(n)$ **.**

    Για αρκετά μεγάλα n **έχουμε ότι**

$$af(n/b) = 3(n/4)\lg(n/4) \leq (3/4)n\lg n = cf(n)$$

για c **= 3/4.**

Σύμφωνα με την περίπτωση 3 η λύση της αναδρομικής σχέσης είναι $T(n) = \Theta(n\lg n)$

Κύριο Θεώρημα: Παραδείγματα (IV)

Το κύριο θεώρημα δε μπορεί να εφαρμοσθεί για αυτή την αναδρομική σχέση

- $T(n) = 2T(n/2) + n\lg n$
  - $a = 2$, $b = 2$, $f(n) = n\lg n$
  - $n^{\log_b a} = n$
  - Εκ πρώτης όψεως φαίνεται ότι η σχέση εμπίπτει στην περίπτωση 3, δεδομένου ότι η $f(n) = n\lg n$ είναι ασυμπτωτικά μεγαλύτερη της $n^{\log_b a} = n$
  - Το πρόβλημα είναι ότι δεν είναι πολυωνυμικά μεγαλύτερη.

    Ο λόγος $f(n)/\, n^{\log_b a} = (n\lg n)\,/n = \lg n$, είναι ασυμπτωτικά μικρότερος του n^{ε} για οποιαδήποτε θετική σταθερά ε. Άρα η αναδρομική σχέση βρίσκεται στο χάσμα μεταξύ των περιπτώσεων 2 και 3.

Τέλος Ενότητας