ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

Ενότητα 2: Ασυμπτωτικός συμβολισμός

Μαρία Σατρατζέμη
Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

3.1 Ασυμπτωτικός συμβολισμός (Ι)

- **Οι ορισμοί που ακολουθούν μας επιτρέπουν να επιχειρηματολογούμε με ακρίβεια για την *ασυμπτωτική συμπεριφορά*. Οι $f(n)$ και $g(n)$ συμβολίζουν συναρτήσεις οι οποίες απεικονίζουν μη αρνητικούς ακεραίους σε μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς.**
- **Χρησιμοποιούμε συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ γιατί τα δεδομένα στην είσοδο έχουν να κάνουν με ακέραια μεγέθη. Επίσης, επειδή μας ενδιαφέρει ο χρόνος εκτέλεσης αλγορίθμων, όλες οι συναρτήσεις που χρησιμοποιούμε για να συμβολίζουν ρυθμούς αύξησης, θα είναι *τελικά* θετικά ορισμένες (δηλ. έχουν σύνολο τιμών το σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών R_+).**

Ασυμπτωτικός συμβολισμός (ΙΙ)

- **Συμβολισμός *O***
- **Ορισμός:** Για δεδομένη συνάρτηση *g*, συμβολίζουμε με *O*(*g*(*n*)) το *σύνολο* των συναρτήσεων

$$O(g(n)) = \left\{ f(n) : \exists c \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0,\ f(n) \leq cg(n) \right\}$$

- λέμε ότι η $g(n)$ είναι ένα **ασυμπτωτικό άνω φράγμα** της $f(n)$, ή ότι η $f(n)$ είναι $O(g(n))$, συμβολικά, $f(n) = O(g(n))$ [αν και πιο σωστά, $f(n) \in O(g(n))$].
- **Παράδειγμα:** $5n^2 + 20n = O(n^2)$
- Για να το δείξουμε, πρέπει να προσδιορίσουμε μια σταθερά c και έναν n_0 τ.ώ.

$$\forall n \geq n_0,\ 5n^2 + 20n \leq cn^2 \Leftrightarrow$$

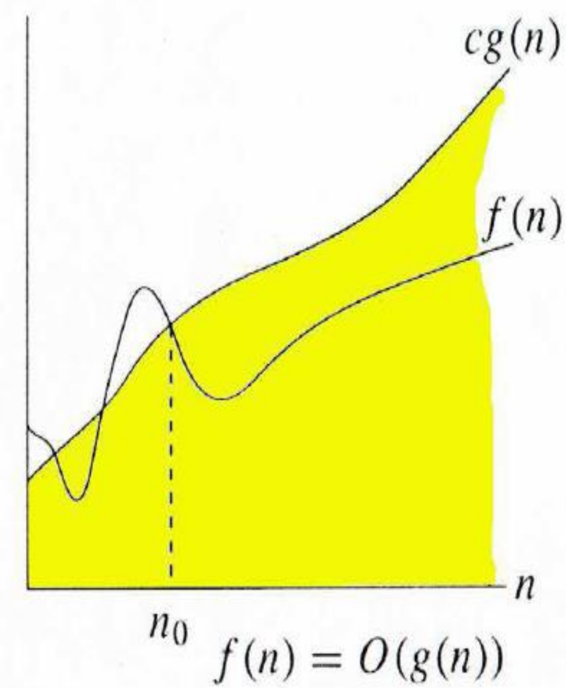
$$5 + 20/n \leq c$$

ή επειδή

$$5 + 20/n \leq c \text{ αν } c \geq 6 \text{ με } n \geq 20$$

$$\Rightarrow c = 6 \text{ και } n_0 = 20.$$

- Τα c και n_0 δεν είναι μοναδικά.



Ασυμπτωτικός συμβολισμός (III)

- **Ορισμός:** Έστω η συνάρτηση $f(n) = O(g(n))$. Αν για κάθε συνάρτηση $h(n)$ τέτοια, ώστε $f(n) = O(h(n))$ ισχύει επίσης ότι $g(n) = O(h(n))$, τότε λέμε ότι η $g(n)$ είναι ένα αυστηρό ασυμπτωτικό άνω φράγμα της $f(n)$.
- **Παράδειγμα:** Έστω $f(n) = 8n + 128$. Είναι $f(n) = O(n^2)$. Πράγματι, έχουμε

$$f(n) \leq cn^2 \Leftrightarrow 8n + 128 \leq cn^2 \Leftrightarrow cn^2 - 8n - 128 \geq 0$$

Αν $c = 1$, είναι $n^2 - 8n - 128 \geq 0 \Leftrightarrow (n + 8)(n - 16) \geq 0$, που ισχύει για κάθε $n \geq 16$. Άρα $\exists$ c (=1) και n_0 (=16) τέτοια, ώστε $f(n) \leq cn^2$ για κάθε $n \geq n_0$.

Μπορούμε τώρα να δείξουμε εύκολα ότι $f(n) = O(n)$ (βλ. και Θ.5 παρακάτω). Προφανώς το $O(n)$ είναι «αυστηρότερο» άνω φράγμα από το $O(n^2)$. Με βάση τον παραπάνω ορισμό μπορούμε να δείξουμε ότι η $g(n) = n$ είναι ένα αυστηρό ασυμπτωτικό άνω φράγμα της $f(n) = 8n + 128$.

Ιδιότητες του O

- **Θ.1** **Αν $f_1(n) = O(g_1(n))$ και $f_2(n) = O(g_2(n))$, τότε**

  $$f_1(n) + f_2(n) = O(\max(g_1(n), g_2(n)) \qquad \text{(Κανόνας Αθροίσματος)}$$

- **Θ.2** **Αν $f_1(n) = O(g_1(n))$ και $f_2(n) = O(g_2(n))$, τότε**

  $$f_1(n) \cdot f_2(n) = O(g_1(n) \cdot g_2(n)) \qquad \text{(Κανόνας Γινομένου)}$$

- **Θ.3** **Αν $f_1(n) = O(g_1(n))$ και $g_2(n)$ μια συνάρτηση με μη αρνητικές τιμές για κάθε $n \geq 0$, τότε**

  $$f_1(n) \cdot g_2(n) = O(g_1(n) \cdot g_2(n))$$

- **Θ.4** **Αν $f(n) = O(g(n))$ και $g(n) = O(h(n))$, τότε $f(n) = O(h(n))$**
- **Θ.5** **Αν $f(n) = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \ldots + a_1 n + a_0$ με $a_m > 0$, τότε**

  $$f(n) = O(n^m)$$

- **Θ.6** **Για κάθε ακέραιο $k > 1$, $\log^k n = O(n)$.**

- **Για κάθε ακέραιο $m > 1$, η λογαριθμική συνάρτηση $g(n) = \log_m(n)$ έχει τον ίδιο ρυθμό αύξηση με την $\log_2(n)$ (ή $\lg n$) γιατί :**

  Από τις ιδιότητες των λογαρίθμων ισχύει:

  $$\log_m n = \log_2 n / \log_2 m \Rightarrow \log_m n = (1/\log_2 m) \log_2 n \text{ για κάθε } n>0.$$

  Συνεπώς καθώς ο όρος $1/\log_2 m$ είναι σταθερά και ανεξάρτητη της τιμής του n, μπορούμε να παραλείπουμε τη βάση του λογαρίθμου όταν χρησιμοποιούμε το συμβολισμό *O* (και το συμβολισμό *Θ*). Αρα :

  $$\log_m n = \Theta(\log n)$$

- **Οι εκθετικές συναρτήσεις αυξάνουν ταχύτερα από τις συναρτήσεις δύναμης: συνεπώς n^k είναι $O(b^n)$, για όλα τα $b > 1$, $n > 1$, and $k \geq 0$. Οι περιορισμοί για τα b, n, και k εγγυώνται ότι και οι 2 συναρτήσεις είναι αύξουσες. (***Η απόδειξη της πρότασης μπορεί να γίνει με επαγωγή ή με τον κανόνα του ορίου του de L' Hopital*).**
- **Οι λογαριθμικές συναρτήσεις έχουν μικρότερο ρυθμό αύξησης από τις συναρτήσεις δύναμης : $\log_b n = O(n^k)$ για κάθε $b > 1$, $k > 0$. (είναι το αντίστροφο της προηγούμενης πρότασης). Αρα**

  $$\log n = O(n) \text{ και } n\log n = O(n^2).$$

Συμβάσεις

- Όταν γράφουμε μια έκφραση O παραλείπουμε όλους τους όρους εκτός από τους πλέον σημαντικούς.

  Π.χ. αντί του

  $$O(n^2 + n\log n + n + 1)$$

  γράφουμε απλά,

  $$O(n^2)$$

- Παραλείπουμε σταθερούς συντελεστές.

  Π.χ. αντί των

  $$O(3n^2),\ \ O(3)$$

  γράφουμε απλά,

  $$O(n^2),\ \ O(1)$$

- Για να είναι μια έκφραση O όσο το δυνατόν πιο χρήσιμη, καλόν είναι να βρίσκουμε ένα αυστηρό ασυμπτωτικό άνω φράγμα.
- Π.χ. αντί να γράψουμε

  $$f(n) = n = O(n^3)$$

  είναι προτιμότερο να γράψουμε

  $$f(n) = O(n)$$

Χαρακτηριστικές περιπτώσεις

Πίνακας 3.1: Ονοματολογία χαρακτηριστικών εκφράσεων O

έκφραση	όνομα
$O(1)$	σταθερή
$O(\log n)$	λογαριθμική
$O(\log^2 n)$	τετραγωνική log
$O(n)$	γραμμική
$O(n \log n)$	n log n
$O(n^2)$	τετραγωνική
$O(n^3)$	κυβική
$O(2^n)$	εκθετική

- **Στον Πιν. 3.1 οι εκφράσεις είναι κατά σειρά αύξοντος μεγέθους**

Συμβολισμός Ω

- **Συμβολισμός *Ω***

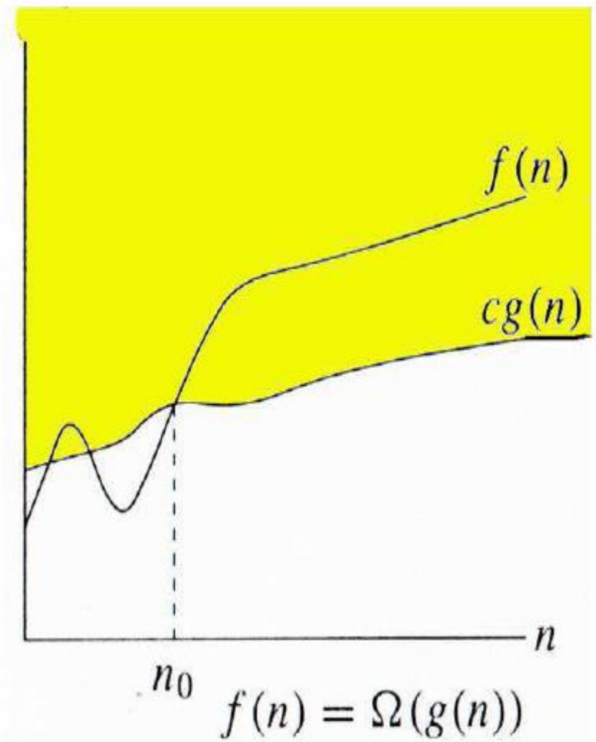
- **Για δεδομένη συνάρτηση *g*, συμβολίζουμε με Ω(*g*(*n*)) το σύνολο των συναρτήσεων**

$$\Omega(g(n)) = \left\{ f(n) : \exists c \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, cg(n) \leq f(n) \right\}$$

- **λέμε ότι η *g*(*n*) είναι ένα ασυμπτωτικό κάτω φράγμα της *f*(*n*), ή ότι η *f*(*n*) είναι Ω(*g*(*n*)), συμβολικά, *f*(*n*) = Ω(*g*(*n*)).**

- **Παράδειγμα: *n* = Ω(ln *n*).**

- **Πράγματι, είναι $\forall n \geq 1$, $n > \ln n$ (δηλ. $c = 1$, $n_0 = 1$).**

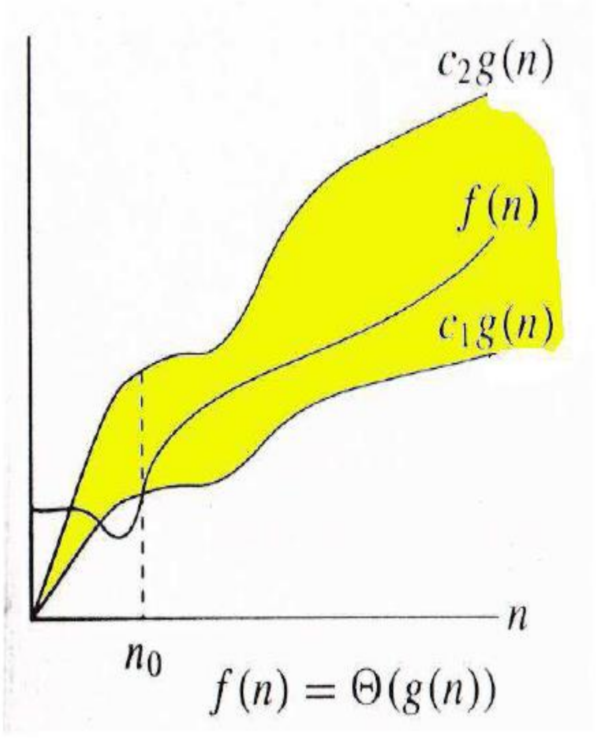


Συμβολισμός Θ

- **Συμβολισμός Θ**
- **Για δεδομένη συνάρτηση *g*, συμβολίζουμε με Θ(*g*(*n*)) το σύνολο των συναρτήσεων**

$$\Theta(g(n)) = \left\{ f(n) : \exists c_1, c_2 \in \mathrm{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \right\}$$

- **με άλλα λόγια, η *f* (*n*) είναι «ίση» με την *g*(*n*), με προσέγγιση σταθερού συντελεστή και λέμε ότι η *g*(*n*) είναι ένα ασυμπτωτικό φράγμα της *f*(*n*).**
- **Πρόταση:**
- **Για δύο συναρτήσεις *f*(*n*) και *g*(*n*) ισχύει η ισοδυναμία**
  ***f*(*n*) = Θ(*g*(*n*)) $\Leftrightarrow$ *f*(*n*) = O(*g*(*n*)) και *f*(*n*) = Ω(*g*(*n*))**



Συμβολισμός Θ

- **Παράδειγμα:** $5n^2 + 20n = \Theta(n^2)$.

➢ **Για να το δείξουμε, πρέπει να προσδιορίσουμε σταθερές c_1, c_2 και n_0 τ.ώ.**

$$n \geq n_0,\ c_1 n^2 \leq 5n^2 + 20n \leq c_2 n^2$$

ή

$$c_1 \leq 5 + 20/n \leq c_2$$

ή επειδή

$$c_1 \leq 5 + 20/n \text{ αν } c_1 \leq 5 \text{ με } n > 1$$

και

$$5 + 20/n \leq c_2 \text{ αν } c_2 \geq 6 \text{ με } n \geq 20$$

➢ **έχουμε $c_1 = 5$, $c_2 = 6$ και $n_0 = 20$.**

❖ **Τα c_1, c_2 και n_0 δεν είναι μοναδικά.**

- **Παρατήρηση: $f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$**

  αφού, $\Theta(g(n)) \subseteq O(g(n))$.

❑ **Πρόταση: Αν $f(n) = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \ldots + a_1 n + a_0$ με $a_m > 0$, τότε $f(n) = \Theta(n^m)$.**

❑ **Ιδιότητα:**

$$\sum_{k=1}^{n} \Theta\big(f(k)\big) = \Theta\left(\sum_{k=1}^{n} f(k)\right).$$

Κανόνας του ορίου

- **Ένα ισχυρό και χρήσιμο εργαλείο για να αποδείξει κανείς ότι κάποιες συναρτήσεις είναι της τάξης κάποιων άλλων, όπως επίσης και για να αποδείξει το αντίθετο, είναι ο *κανόνας του ορίου, ο οποίος μας λέει ότι δοθέντων δύο συναρτήσεων f και g: N→ R+, έχουμε***

1. αν $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \in \mathbb{R}_+^*$, τότε $f(n) = O(g(n))$ και $g(n) = O(f(n))$,

2. αν $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, τότε $f(n) = O(g(n))$ αλλά $g(n) \neq O(f(n))$ και

3. αν $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$, τότε $f(n) \neq O(g(n))$ αλλά $g(n) = O(f(n))$.

(ή αλλιώς) Κανόνας του ορίου

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\begin{cases}0 & \text{then } f(n)\in\mathcal{O}(g(n))\\ c>0 & \text{then } f(n)\in\Theta(g(n))\\ \infty & \text{then } f(n)\in\Omega(g(n))\end{cases}$$

Αν τα όρια πηλίκου οδηγούν σε απροσδιόριστες μορφές 0/0 ή ∞/ ∞ εφαρμόζεται ο κανόνας του de l’ Hopital

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{f'(n)}{g'(n)}$$

Ένα παράδειγμα

Εστω οι συναρτήσεις $f(n) = 2^n$ και $g(n) = 3^n$ υπολογίστε το ασυμπτωτικό φράγμα για την $f(n)$.

Η απόδειξη θα γίνει με τον κανόνα του ορίου.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{2^n}{3^n}$$

Με τον κανόνα του de L' Hopital έχουμε

$$\frac{2^{n\prime}}{3^{n\prime}} = \frac{(\ln 2)2^n}{(\ln 3)3^n}$$

Όμως και με τον κανόνα του de L' Hopital δε μπορούμε να προχωρήσουμε καθώς και ο αριθμητής και ο παρονομαστής συνεχίζουν να αποκλίνουν.

Οπότε για

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha < 1 \\ 1 & \text{if } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{if } \alpha > 1 \end{cases}$$

Το αποτέλεσμα της διαίρεσης συγκλίνει στο 0 άρα

$$2^n \in \mathcal{O}(3^n)$$

Ασυμπτωτική Εκτίμηση

Χρόνος εκτέλεσης αλγόριθμου Α:

- **Αύξουσα συνάρτηση του *T(n) που εκφράζει σε πόσο χρόνο* ολοκληρώνεται ο Α όταν εφαρμόζεται σε στιγμ. μεγέθους *n.***
- **Ενδιαφέρει η τάξη μεγέθους *T(n) και* όχι ακριβής εκτίμηση *T(n).***
- **Ακριβής εκτίμηση είναι συχνά δύσκολη και εξαρτάται από υπολογιστικό περιβάλλον, υλοποίηση, ...**
- **Τάξη μεγέθους είναι εγγενής ιδιότητα του αλγόριθμου.**
  - **Δυαδική αναζήτηση έχει λογαριθμικό χρόνο.**
  - **Γραμμική αναζήτηση έχει γραμμικό χρόνο.**
- **Ασυμπτωτική εκτίμηση αγνοεί σταθερές και εστιάζει σε τάξη μεγέθους χρόνου εκτέλεσης.**

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός Ο, Ω, Θ

- **… εκφράζει τα αποτελέσματα ασυμπτωτικής εκτίμησης.**

- ***Θ*( ) δηλώνει την ακριβή εκτίμηση τάξης μεγέθους.**

$$\Theta(g(n)) = \{ f(n) : \exists c_1, c_2 \in \mathrm{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \}$$

- ***Θ*(*g(n)) σύνολο συναρτήσεων* ίδιας τάξης μεγέθους με *g(n).***

- ***O*( ) δηλώνει άνω φράγμα στην τάξη μεγέθους.**

$$O(g(n)) = \{ f(n) : \exists c \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, f(n) \leq c g(n) \}$$

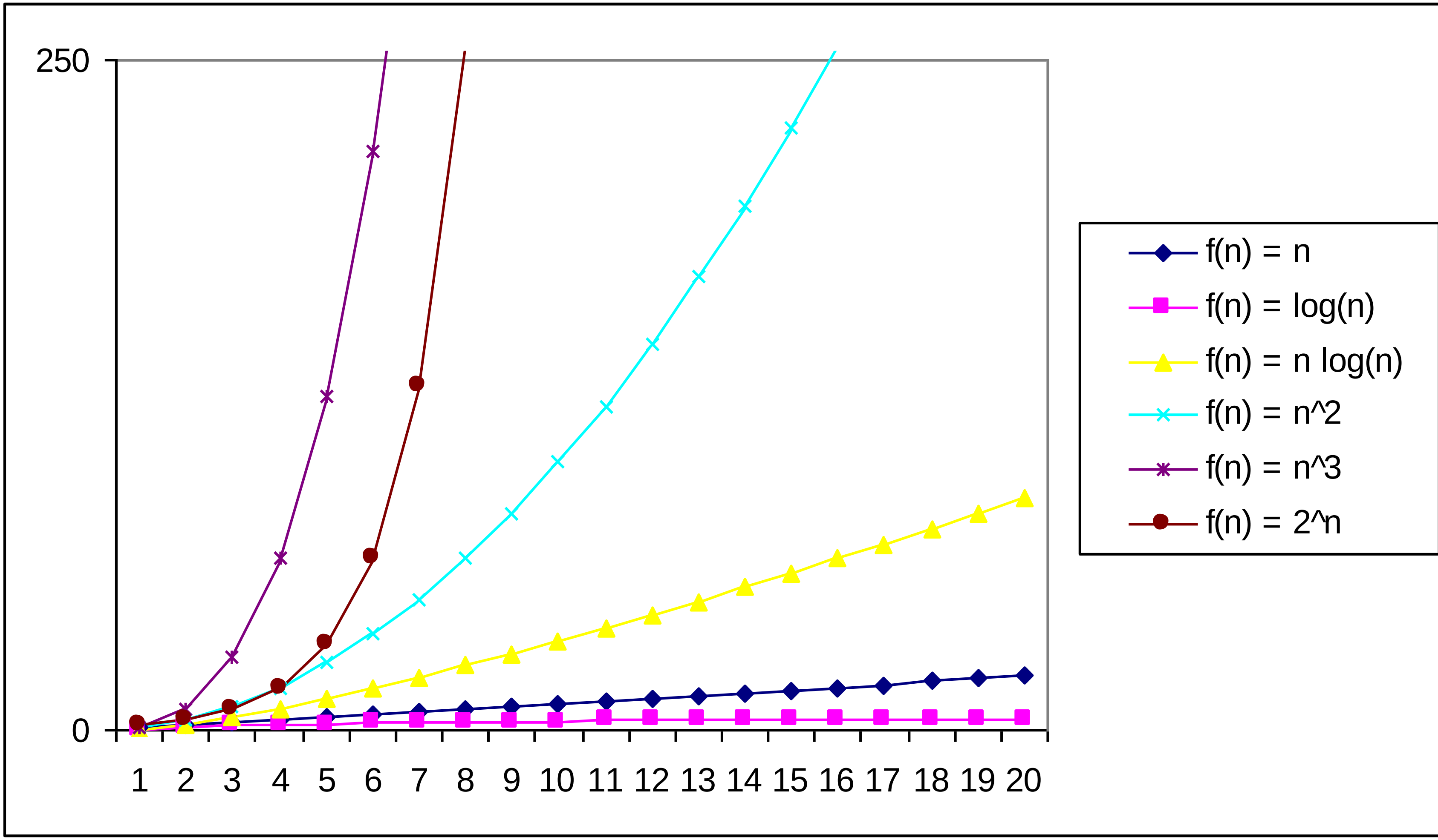
- ***O*(*g(n)) σύνολο συναρτήσεων* με τάξη μεγέθους που δεν υπερβαίνει τάξη μεγέθους *g(n).***

- ***Ω*( ) δηλώνει κάτω φράγμα στην τάξη μεγέθους.**

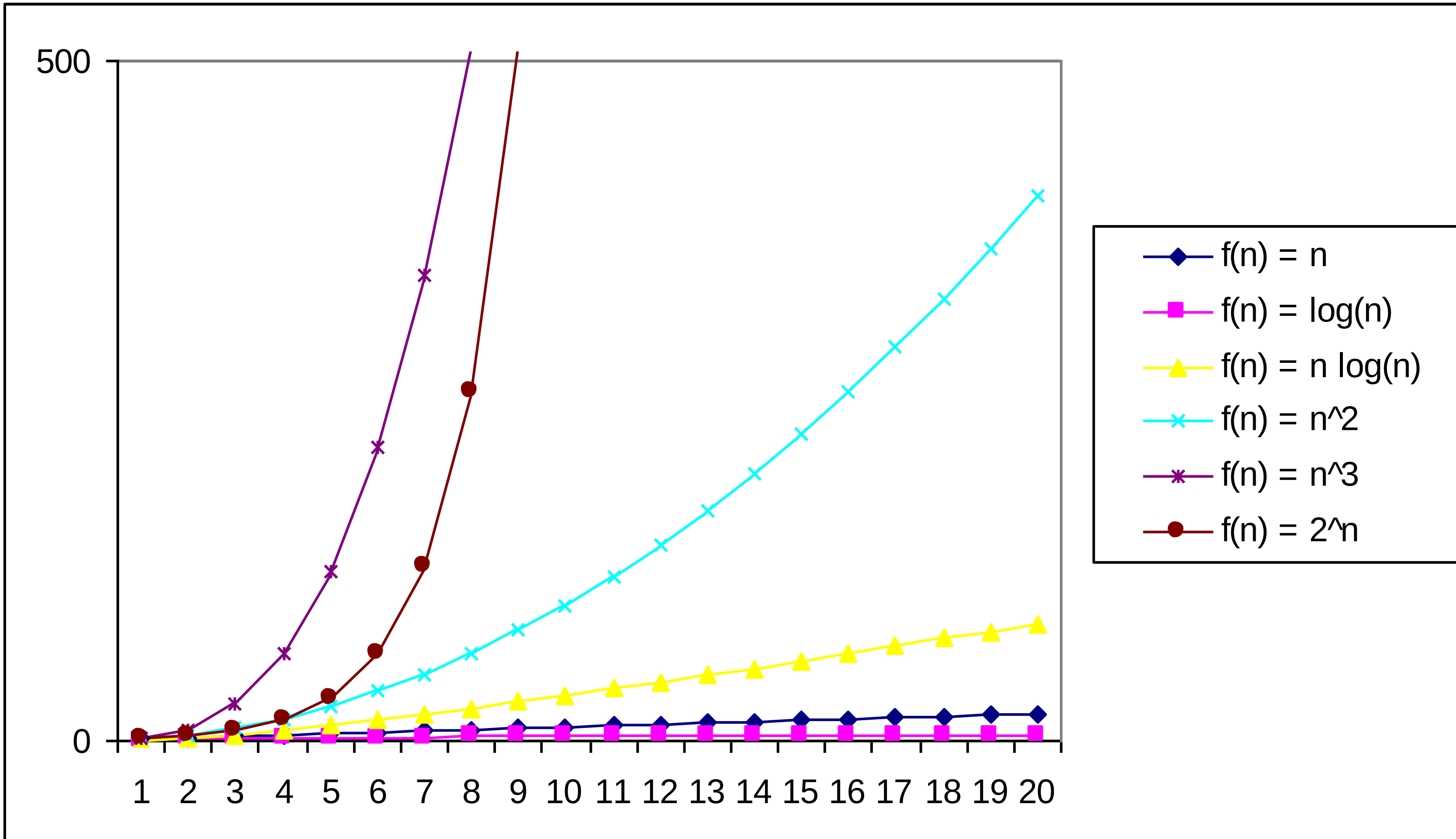
$$\Omega(g(n)) = \{ f(n) : \exists c \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, c g(n) \leq f(n) \}$$

- ***Ω*(*g(n)) σύνολο συναρτήσεων* με τάξη μεγέθους που δεν υπολείπεται τάξης μεγέθους *g(n).***

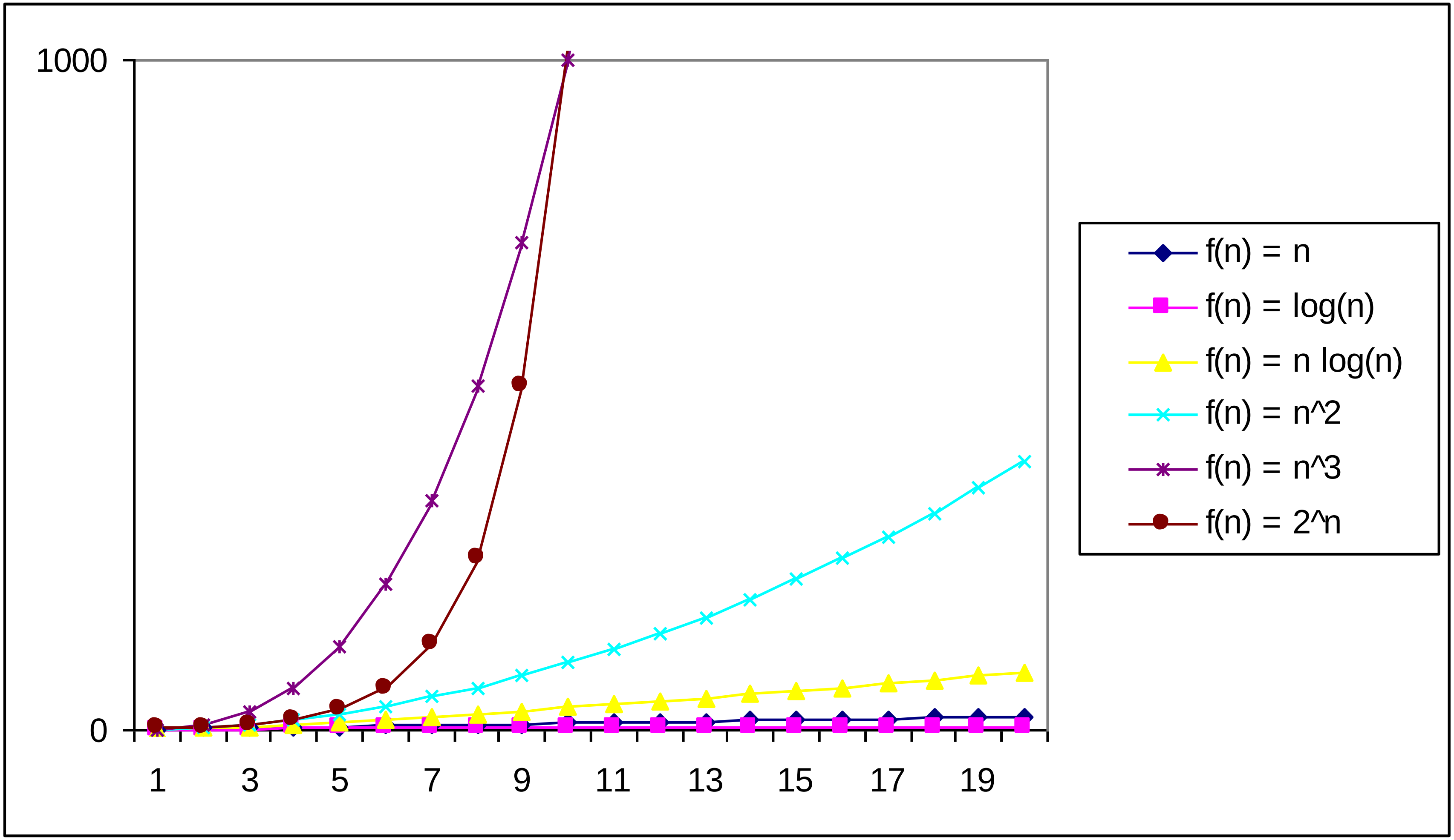
Practical Complexity



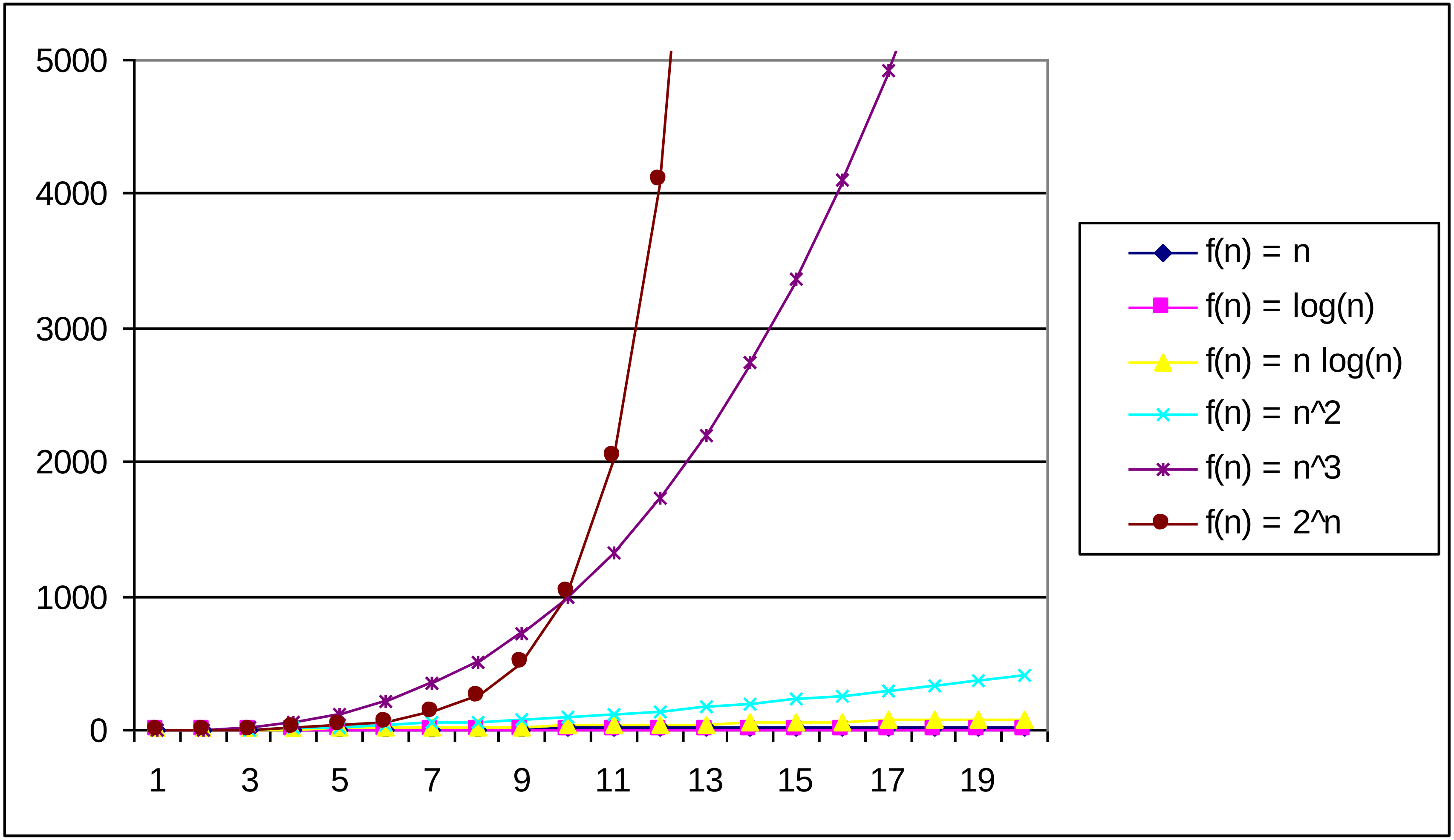
Practical Complexity



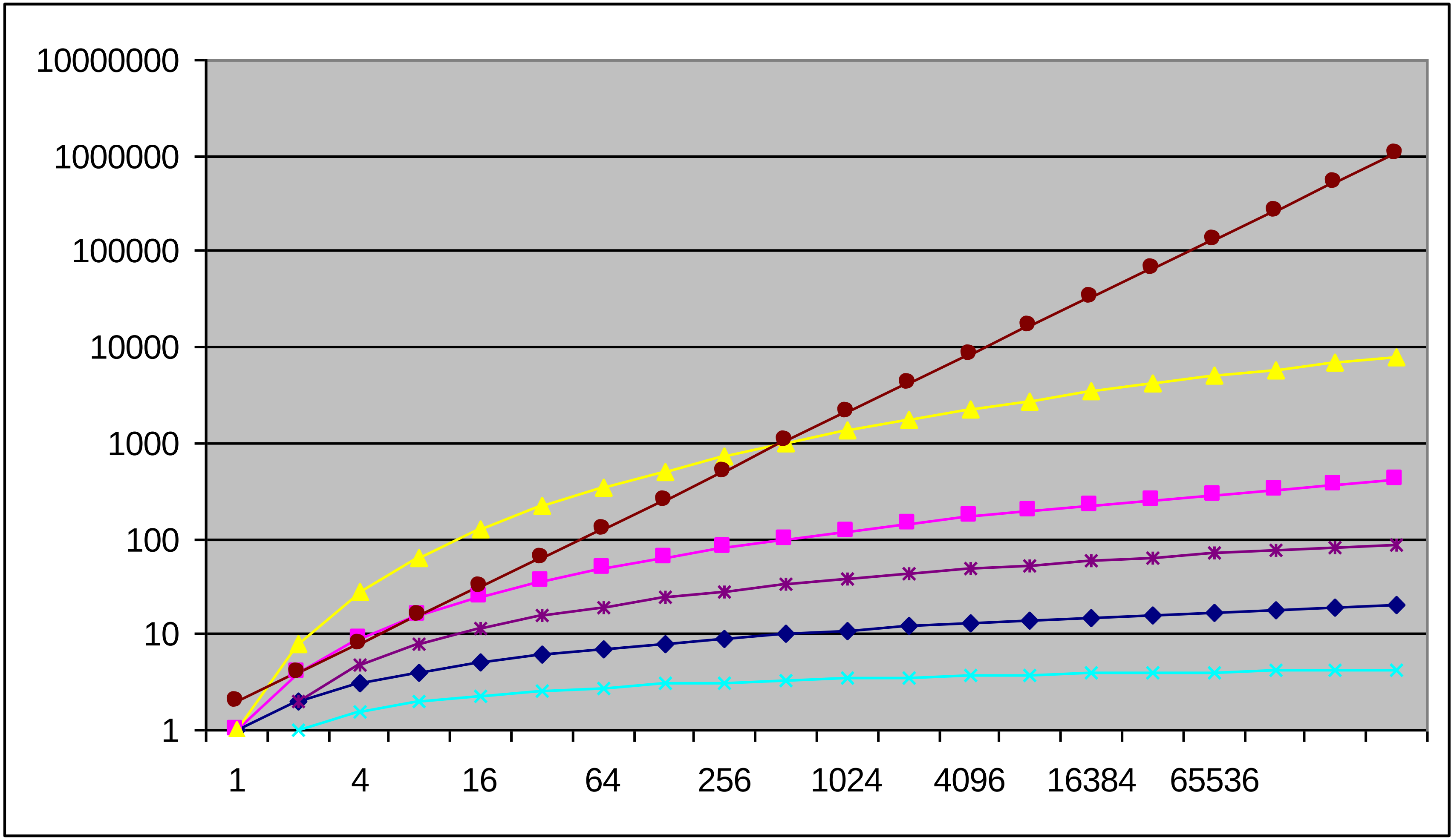
Practical Complexity



Practical Complexity



Practical Complexity



Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ