ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ & ΔΙΚΤΥΑΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Ενότητα 24: Ειδικές Περιπτώσεις του Προβλήματος Ροής Ελαχίστου Κόστους

Σαμαράς Νικόλαος

Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

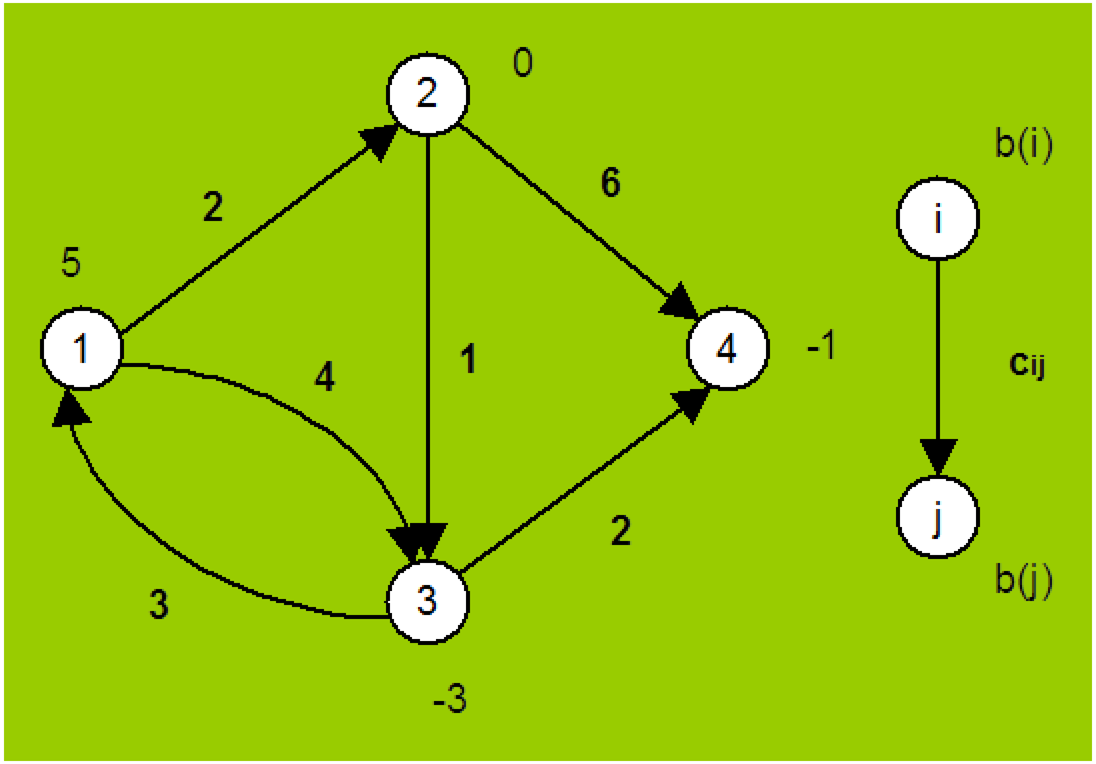
Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Παράδειγμα (1)

Να γραφεί η μαθηματική μορφή του παρακάτω προβλήματος ροής ελαχίστου κόστους και να τεθεί στην ισοζυγισμένη μορφή.



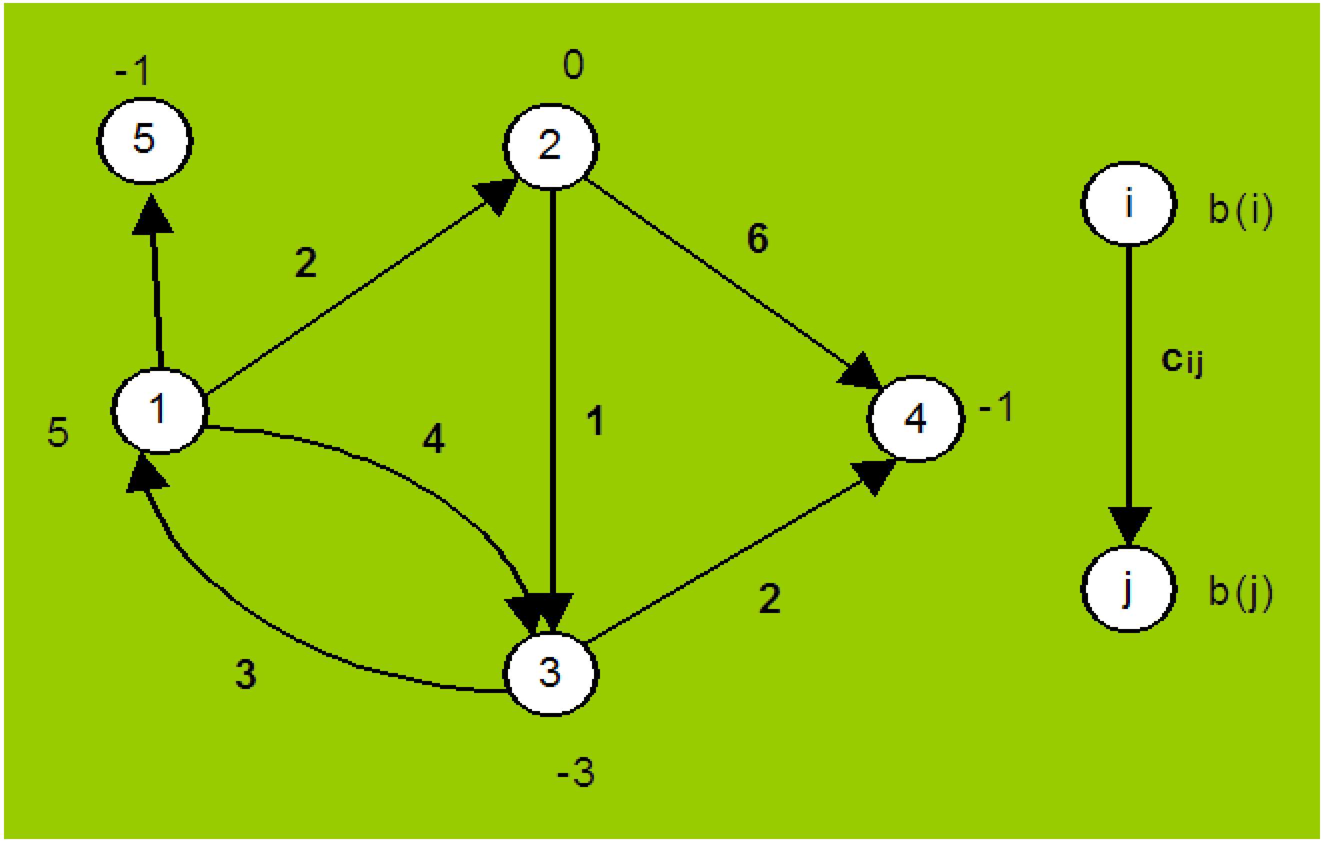
Παράδειγμα (2)

Μη ισοζυγισμένο ΠΡΕΚ

$$
\begin{array}{ll}
\min & 2x_{12} + 4x_{13} + 1x_{23} + 6x_{24} + 3x_{31} + 2x_{34} \\
\text{μ.π.} & x_{12} + x_{13} - x_{31} \leq 5 \\
& x_{23} + x_{24} - x_{12} = 0 \\
& x_{31} - x_{13} - x_{23} + x_{34} \leq -3 \\
& -x_{24} - x_{34} \leq -1 \\
& x_{ij} \geq 0,\ (i, j) \in A = \{(1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,1), (3,4)\}
\end{array}
$$

Παράδειγμα (3)

Δίκτυο που αντιστοιχεί στην ισοζυγισμένη μορφή του ΠΡΕΚ



Παράδειγμα (4)

Ισοζυγισμένο ΠΡΕΚ

min $2x_{12} + 4x_{13} + 1x_{23} + 6x_{24} + 3x_{31} + 2x_{34}$

μ.π. $x_{12} + x_{13} + x_{15} - x_{31} = 5$

$x_{23} + x_{24} - x_{12} = 0$

$x_{31} - x_{13} - x_{23} + x_{34} = -3$

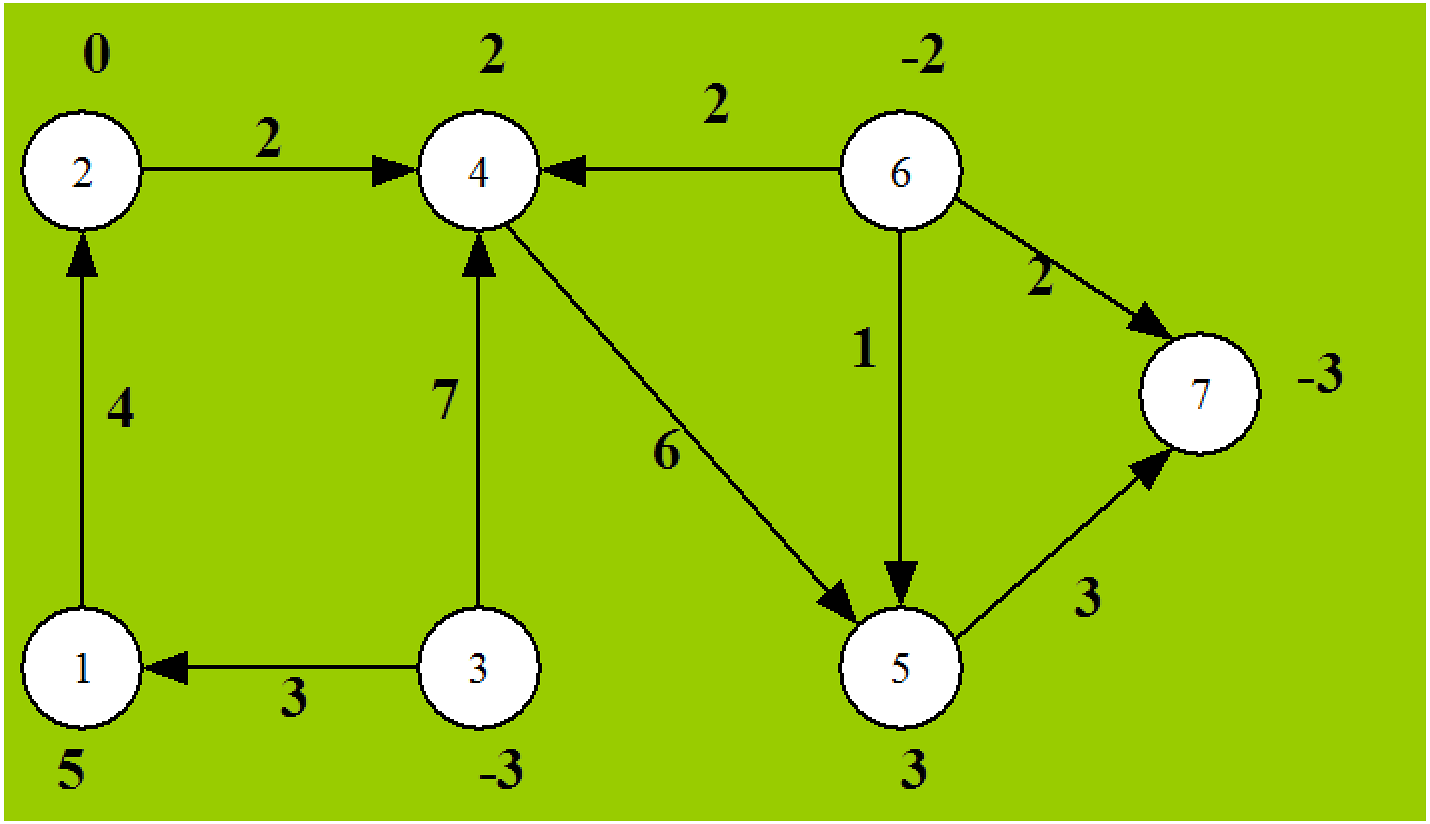
$- x_{24} - x_{34} = -1$

$- x_{15} = -1$

$x_{ij} \geq 0, (i, j) \in A = \{(1,5), (1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,1), (3,4)\}$

Άσκηση

Να γραφεί η μαθηματική μορφή του παρακάτω προβλήματος ροής ελαχίστου κόστους και να τεθεί στην ισοζυγισμένη μορφή.



Ειδικές Περιπτώσεις του ΠΡΕΚ (1)

Α) Προβλήματα ελαχίστων δρόμων (shortest path problems)

<u>Δεδομένα:</u>

$G = (N, A)$ ένα δίκτυο,

c_{ij} – το μήκος του τόξου $(i, j) \in A$,

Κόμβος s – Κόμβος πηγή με $b(s) = 1$

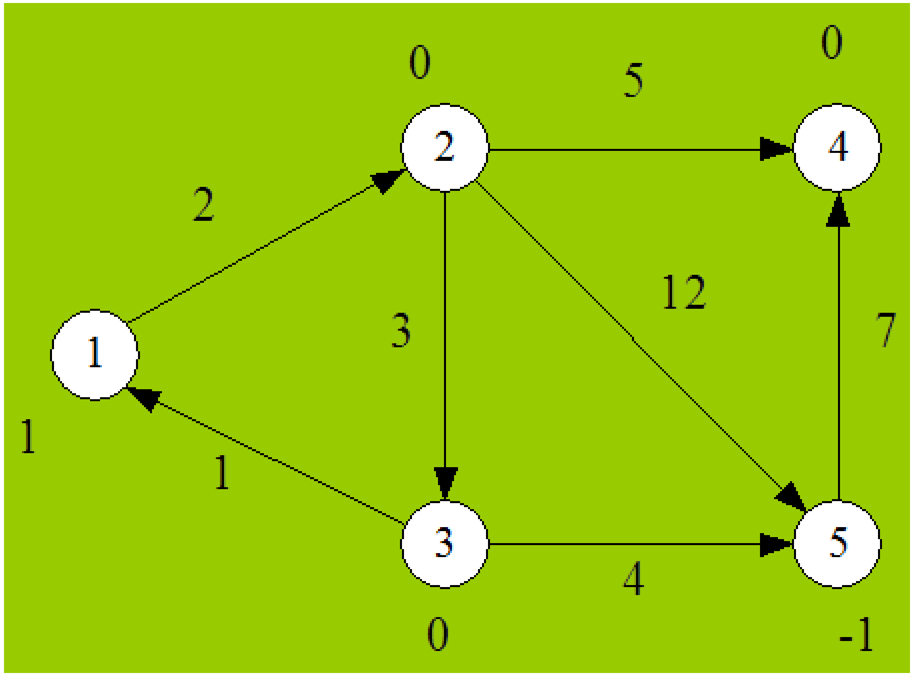
Κόμβος t – Κόμβος προορισμού με $b(t) = -1$

$b(i) = 0, i \neq \{t, s\}$

<u>Ζητούμενο:</u>

Να βρεθεί ο προσανατολισμένος δρόμος από τον κόμβο s στον κόμβο t με το ελάχιστο μήκος. *Μήκος (length)* ενός δρόμου είναι το άθροισμα των μηκών των τόξων του.

Ειδικές Περιπτώσεις του ΠΡΕΚ (2)



Κόμβος πηγή: s=1

Κόμβος προορισμού: t=5

Προσανατολισμένος δρόμος: {(1,2), (2,3), (3,5)}
Ελάχιστο μήκος δρόμου: {2+3+4}=9

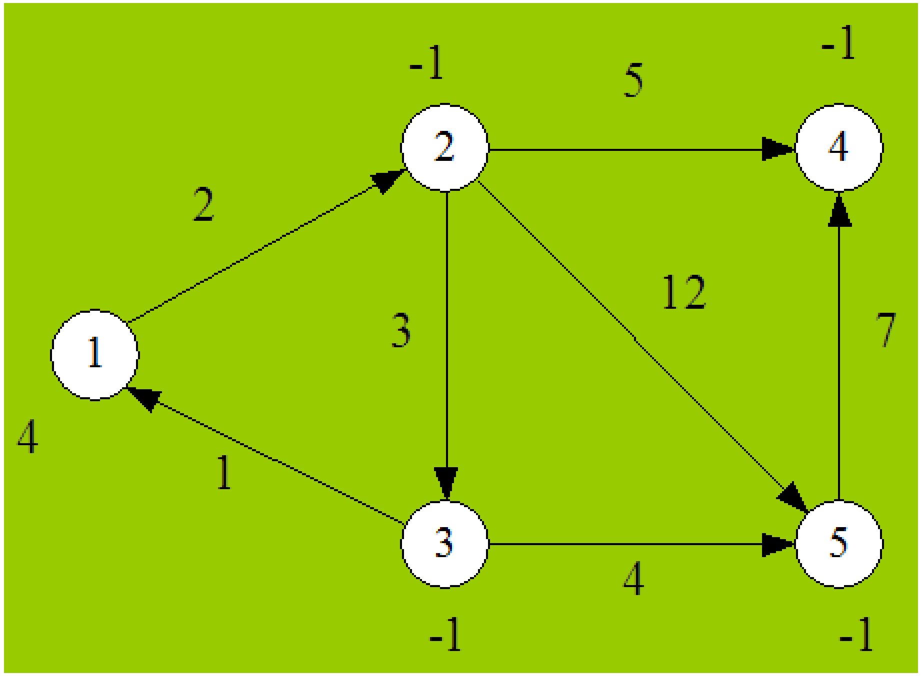
Ειδικές Περιπτώσεις του ΠΡΕΚ (3)

Μια πιο γενική παραλλαγή του προβλήματος ελαχίστων δρόμων είναι η εύρεση όλων των προσανατολισμένων δρόμων ελάχιστου μήκους, που συνδέουν τον κόμβο s με όλους τους υπόλοιπους κόμβους.

<u>Δεδομένα:</u>

$G = (N, A)$ ένα δίκτυο,
c_{ij} – το μήκος του τόξο $(i, j) \in A$,
Κόμβος s – Κόμβος πηγή με $b(s) = n-1$
$b(i) = -1, i \neq s$

Ειδικές Περιπτώσεις του ΠΡΕΚ (4)

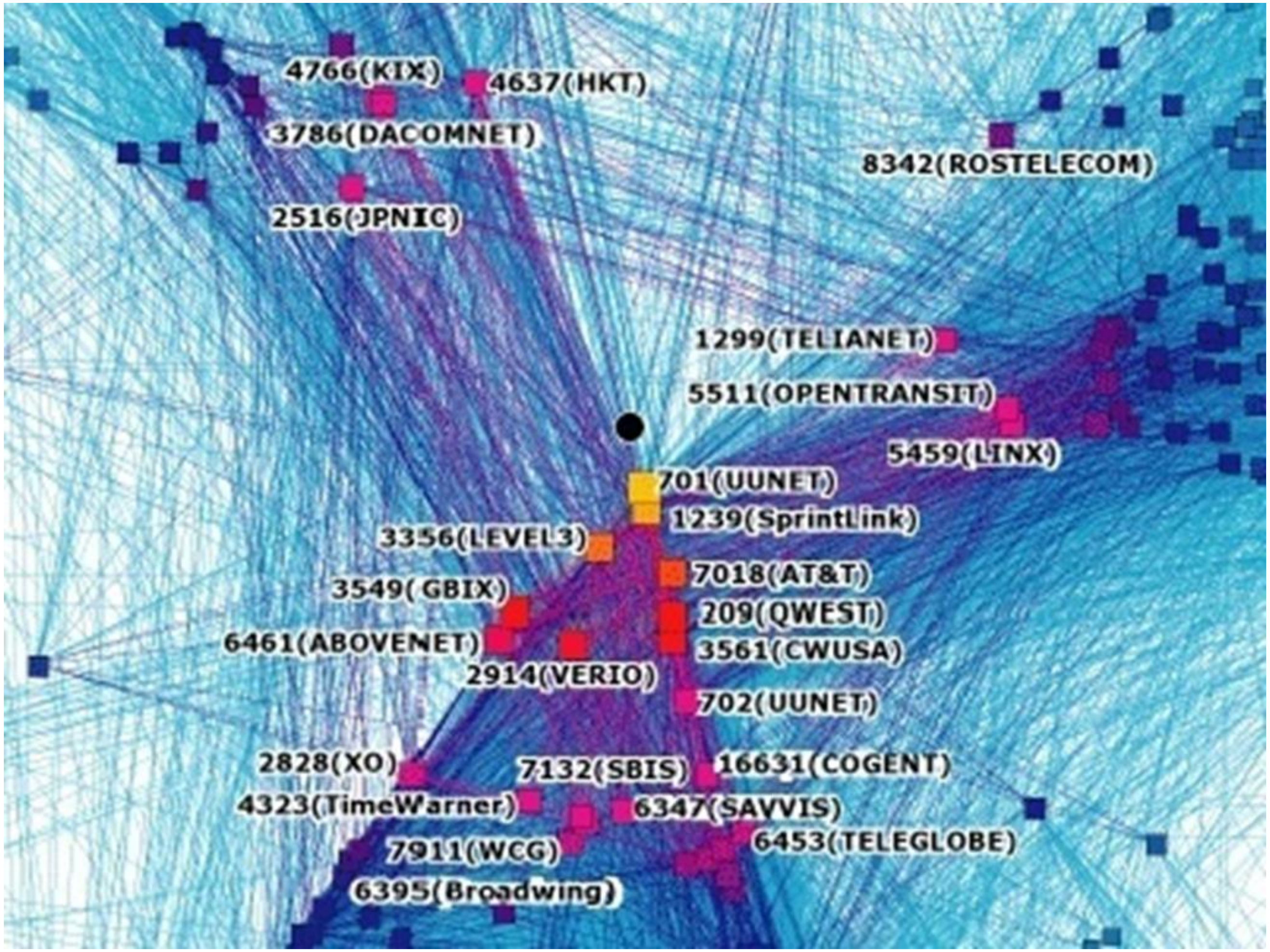


Κόμβος πηγή: s=1

Κόμβος προορισμού:
t=2, 3, 4, 5

Προς κόμβο 2	Προς κόμβο 3	Προς κόμβο 4	Προς κόμβο 5
Κόστος 2	Κόστος 5	Κόστος 7	Κόστος 9

Ειδικές Περιπτώσεις του ΠΡΕΚ (5)



This graph reflects 1,134,634 IP addresses and 2,434,073 IP links (immediately adjacent addresses in a traceroute-like path) of topology data gathered from 25 monitors probing approximately 865,000 destinations spread across 76,000 (62% of the total) globally routable network prefixes.

Ειδικές Περιπτώσεις του ΠΡΕΚ (6)

Β) Πρόβλημα Μεταφοράς (Transportation problem)

<u>Δεδομένα:</u>

G = (N, A) ένας διμερής γράφος,

S, D – δύο σύνολα κόμβων : $S \cup D = N$ και $S \cap D = \varnothing$

$|S| = m$, $|D| = n$

a(i) >0 – διαθέσιμη ποσότητα προϊόντος στον κόμβο $i \in S$

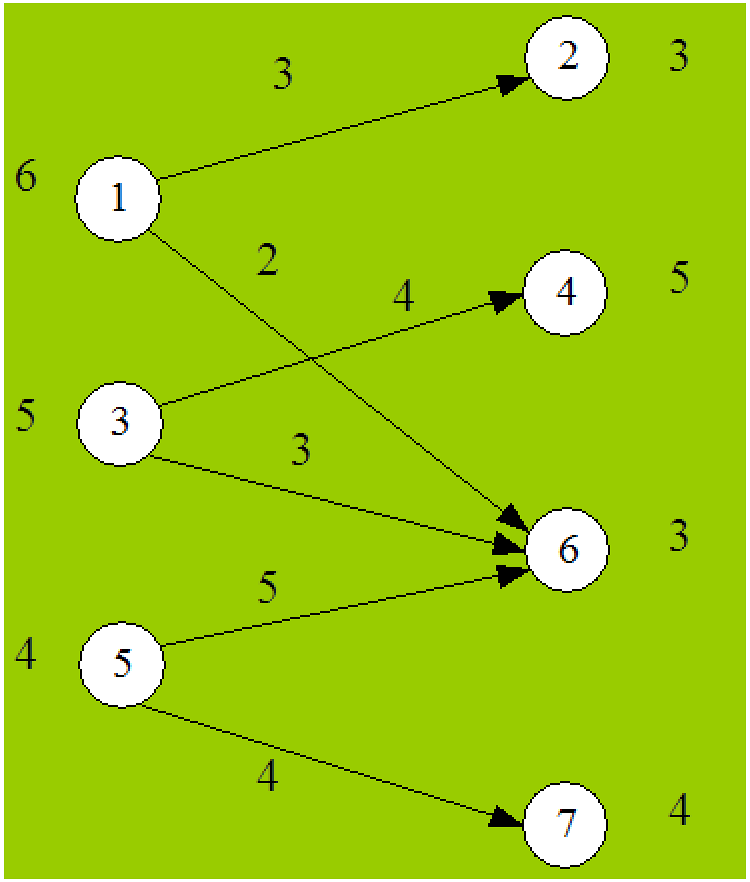
b(j) >0 – ζητούμενη ποσότητα προϊόντος στον κόμβο $j \in D$

c_{ij} – το κόστος μεταφοράς από τον $i \in S$ προς τον $j \in D$,

<u>Ζητούμενο:</u>

Το σχέδιο μεταφοράς όλης της ποσότητας του προϊόντος από τους κόμβους του συνόλου S στους κόμβους του συνόλου D έτσι ώστε να ικανοποιηθεί η ζήτηση και το συνολικό κόστος μεταφοράς να είναι ελάχιστο.

Ειδικές Περιπτώσεις του ΠΡΕΚ (7)



N={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

S={1, 3, 5}, D={2, 4, 6, 7}

Ισχύει επίσης,

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\mu.\pi. \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a(i), i \in S$$

$$-\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = -b(j), j \in D$$

$$x_{ij} \geq 0, i \in S, j \in D$$

Ειδικές Περιπτώσεις του ΠΡΕΚ (8)

Γ) Πρόβλημα Αντιστοίχησης (Assignment problem)

Δεδομένα:

$G = (N, A)$ ένας διμερής γράφος,

S, D – δύο σύνολα κόμβων : $S \cup D = N$ και $S \cap D = \emptyset$

$|S| = m$, $|D| = n$ και $m=n$

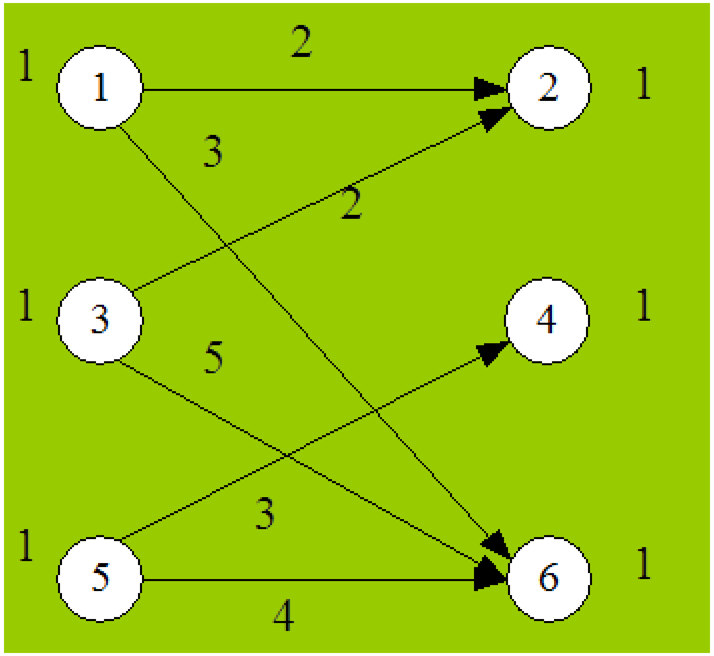
$a(i) = b(j) = 1$

c_{ij} – το κόστος ανάθεσης από τον $i \in S$ προς τον $j \in D$,

Ζητούμενο:

Το σχέδιο ανάθεσης όλων των εργασιών (ή έργων) του συνόλου S σε όλους τους ανάδοχους του συνόλου D έτσι ώστε να εκτελεστούν όλες οι εργασίες και το συνολικό κόστος ανάθεσης να είναι ελάχιστο.

Ειδικές Περιπτώσεις του ΠΡΕΚ (9)



$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν το εργο i} \rightarrow \text{j} \\ 0, & \text{διαφορετικα} \end{cases}$$

N={1, 2, 3, 4, 5, 6}

S={1, 3, 5}, D={2, 4, 6}

Ισχύει επίσης,

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{μ.π.} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i \in S$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, j \in D$$

$$x_{ij} \geq 0 \vee 1, i \in S, j \in D$$

Ειδικές Περιπτώσεις του ΠΡΕΚ (10)

Δ) Πρόβλημα Κυκλοφορίας (Circulation problem)

Δεδομένα:
Ίδια με του ΠΡΕΚ
b(i) = 0 (κόμβοι μεταφόρτωσης)

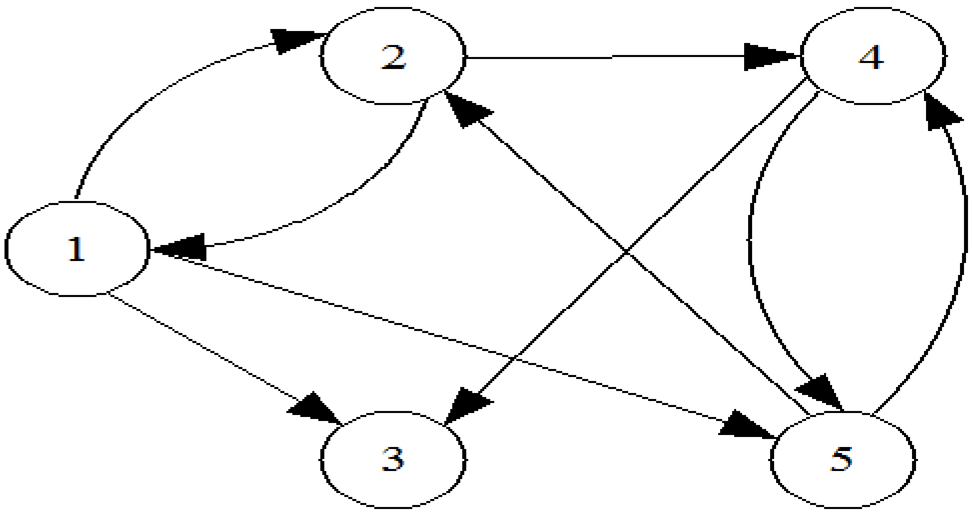
Ζητούμενο:
Η κυκλοφοριακή ροή που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.

Ε) Πρόβλημα Μεγίστης Ροής (Maximum Flow problem)

Ζητείται να βρεθεί η μέγιστη ροή από τον κόμβο s στον κόμβο t. Όλη η ροή επανέρχεται από τον κόμβο t στον κόμβο s δια μέσου του τόξου (t, s).

Βασικές Έννοιες Γραφημάτων (9)

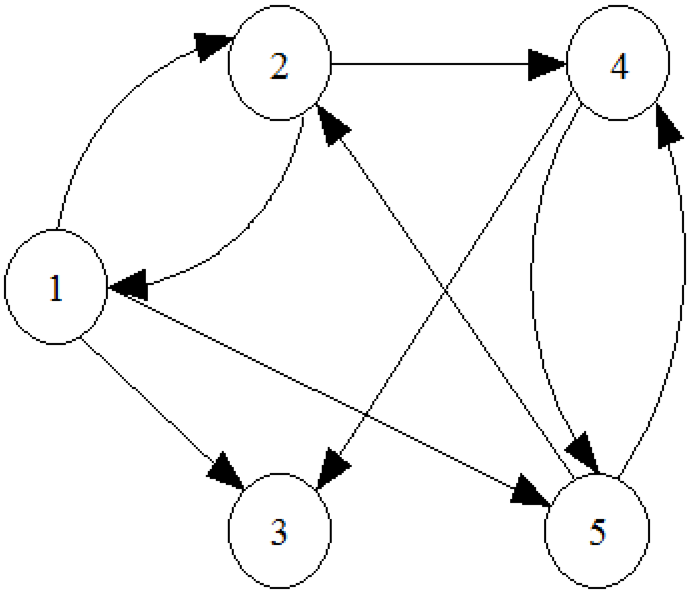
Βαθμός (degree) ενός κόμβου i είναι το πλήθος των τόξων ή ακμών που προσπίπτουν στον κόμβο i



d(1)=4, d(3)=2, d(5)=4

Βασικές Έννοιες Γραφημάτων (10)

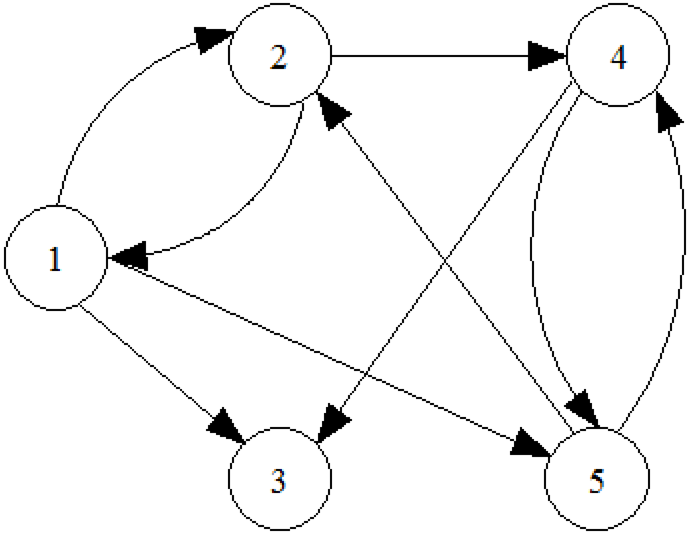
Έξω βαθμός (out degree) ενός κόμβου i είναι το πλήθος των τόξων που έχουν αρχή (ουρά) τον κόμβο i



$d^+(1)=3$, $d^+(3)=0$, $d^+(5)=2$

Βασικές Έννοιες Γραφημάτων (11)

Έσω βαθμός (in degree) ενός κόμβου i είναι το πλήθος των τόξων που έχουν τέλος (κεφάλι) τον κόμβο i



$d^{-}(1)=1$, $d^{-}(3)=2$, $d^{-}(5)=2$

Βασικές Έννοιες Γραφημάτων (12)

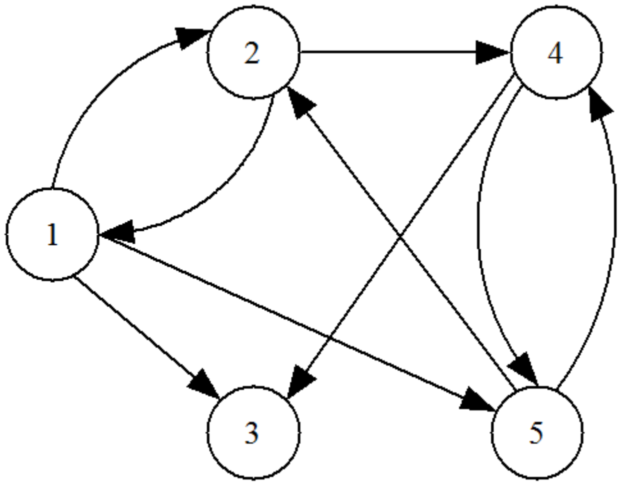
Σε μη προσανατολισμένους γράφους ορίζεται μόνο η έννοια του βαθμού. Γιατί?

Σε προσανατολισμένους γράφους ισχύει

$$\boxed{d(i) = d^{+}(i) + d^{-}(i)}$$

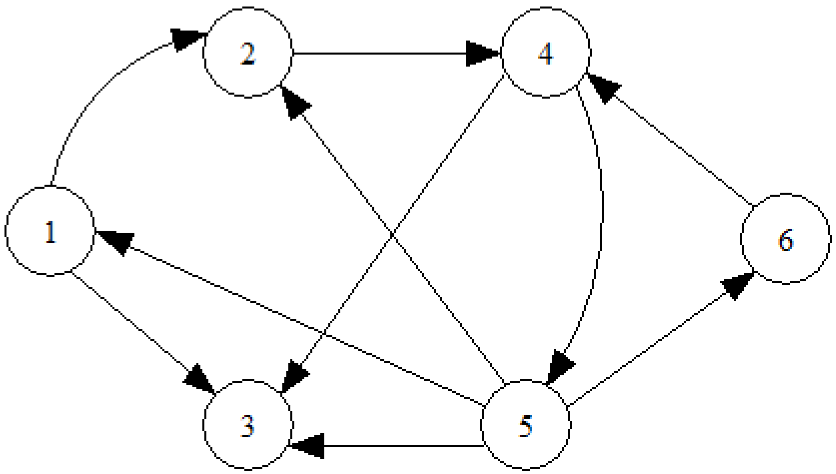
Βασικές Έννοιες Γραφημάτων (13)

$$
\begin{array}{ll}
+ & d^{-}(1)=1,\ d^{-}(3)=2,\ d^{-}(5)=2 \\
\hline
 & d(1)=4,\quad d(3)=2,\quad d(5)=4
\end{array}
$$



Άσκηση

Στο παρακάτω γράφημα να υπολογιστούν οι έσω, έξω βαθμοί για τους κόμβους 2, 5 και 6.



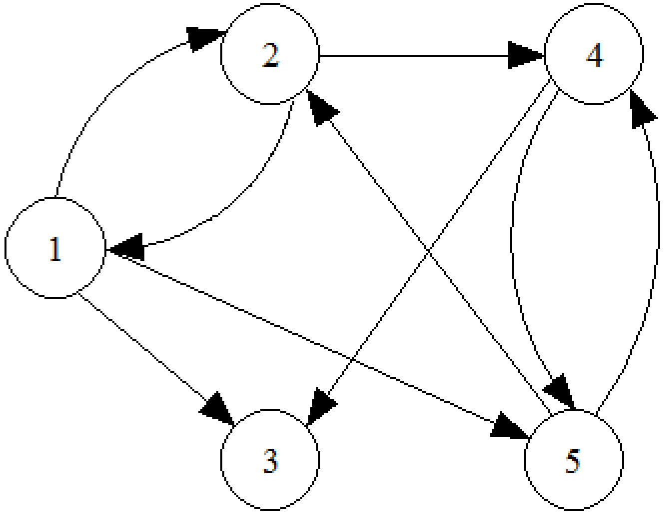
d(2)=3, d(5)=5, d(6)=2

$d^+(2)=1$, $d^+(5)=4$, $d^+(6)=1$

$d^-(2)=2$, $d^-(5)=1$, $d^-(6)=1$

Βασικές Έννοιες Γραφημάτων (14)

Γειτονιά (neighborhood) = έσω γειτονιά ∪ έξω γειτονιά



έσω γειτονιά κόμβου 2 = {1, 5}

έξω γειτονιά κόμβου 2 = {1, 4}

γειτονιά κόμβου 2 = {1, 4, 5}

Αποθήκευση Γράφων και Δικτύων (1)

Τέσσερις δυνατοί τρόποι αποθήκευσης ενός γράφου και δικτύου

- Μήτρα πρόσπτωσης κόμβων – τόξων
- Μήτρα πρόσπτωσης κόμβων – κόμβων ή μήτρα γειτονιάς
- Αποθήκευση με συνδεδεμένες λίστες
- Αστεροειδής αποθήκευση

Αποθήκευση Γράφων και Δικτύων (2)

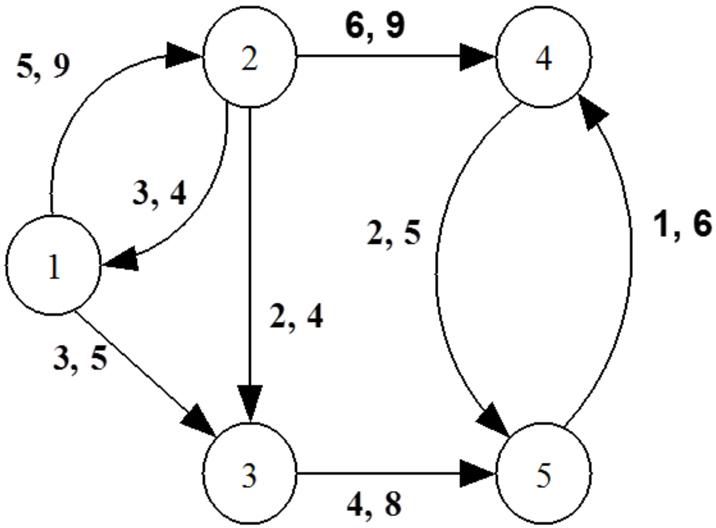
- Μήτρα πρόσπτωσης κόμβων – τόξων (node – arc incidence matrix)

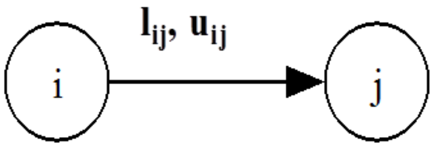
$A=[a_{ij}]$, $i=1, 2, \ldots, m$, $j=1, 2, \ldots, n$, $m=|N|$, $n=|A|$

Αν a_k, $1 \leq k \leq n$ η στήλη η οποία αντιστοιχεί στο τόξο (i, j)

$$a_{tk} = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ t = i \\ -1, & \alpha\nu\ t = j \\ 0, & \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\alpha \end{cases}$$

Αποθήκευση Γράφων και Δικτύων (3)

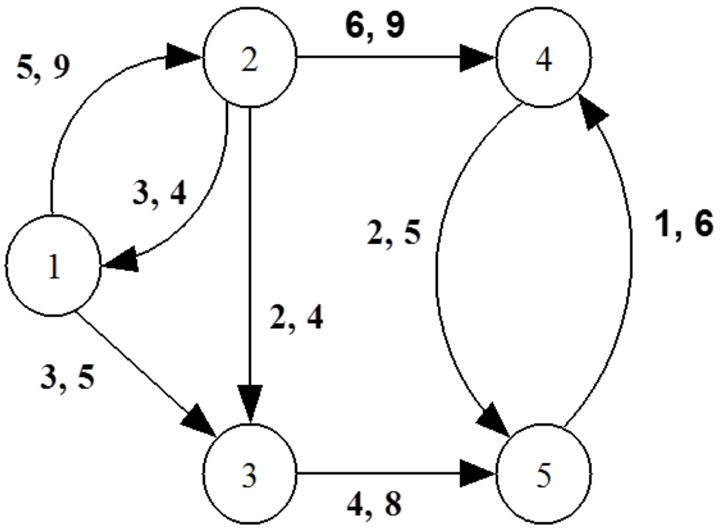


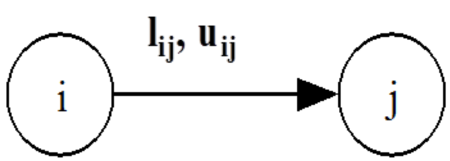


Τόξο k	1	2	3	4	5	6	7	8
Αρχή Τόξου	1	2	1	2	2	3	4	5
Τέλος Τόξου	2	1	3	3	4	5	5	4

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Αποθήκευση Γράφων και Δικτύων (4)





Τόξο k	1	2	3	4	5	6	7	8
Αρχή Τόξου	1	2	1	2	2	3	4	5
Τέλος Τόξου	2	1	3	3	4	5	5	4
$l_{ij} \rightarrow$	5	3	3	2	6	4	2	1
$u_{ij} \rightarrow$	9	4	5	4	9	8	5	6

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

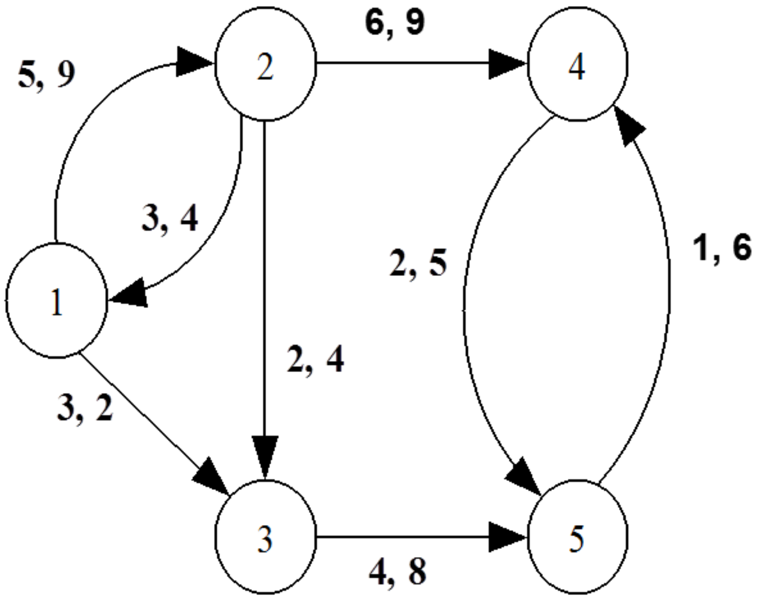
Αποθήκευση Γράφων και Δικτύων (5)

- Μήτρα πρόσπτωσης κόμβων – κόμβων (node – node incidence matrix) ή μήτρα γειτονιάς (adjacency matrix)

$A=[a_{ij}]$, $i=1, 2, \ldots, m$, $j=1, 2, \ldots, m$, $m=|N|$

$$\boxed{a_{ij} = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ (i,j) \in A \\ 0, & \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\alpha \end{cases}}$$

Αποθήκευση Γράφων και Δικτύων (6)



$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Αποθήκευση Γράφων και Δικτύων (7)

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

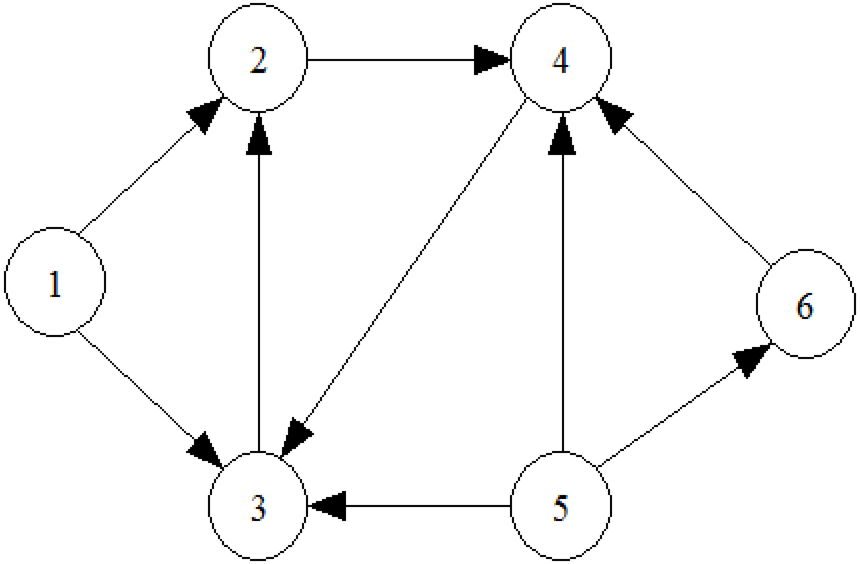
Έξω – γειτονιά
$\Gamma^{+}(1) = \{2, 3\}$

Γειτονιά
$\Gamma(5) = ?$

Έσω – γειτονιά
$\Gamma^{-}(3) = \{1, 2\}$

Άσκηση

Ο παρακάτω γράφος να αποθηκευτεί χρησιμοποιώντας τη μήτρα κόμβων-κόμβων, και να βρεθεί η γειτονιά του κόμβου i=4.



Αποθήκευση Γράφων και Δικτύων (8)

Σε πολλές *πρακτικές εφαρμογές* χρησιμοποιούνται μήτρες τα στοιχεία των οποίων τα περισσότερα είναι μηδενικά και πολύ λίγα είναι μη μηδενικά. Στατιστικές μελέτες έχουν δείξει ότι το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων που αντιστοιχούν σε μήτρες πραγματικών προβλημάτων αποτελεί το 1% ως 10% του συνόλου όλων των στοιχείων.

Τέτοιες μήτρες στη γλώσσα των μαθηματικών και της πληροφορικής ονομάζονται *αραιές (sparse matrices)*. Αντίθετα μήτρες με πολλά μη μηδενικά στοιχεία ονομάζονται *πυκνές (dense matrices)*.

Αποθήκευση Γράφων και Δικτύων (9)

Ο χειρισμός προβλημάτων των οποίων οι μήτρες των συντελεστών είναι αραιές προσφέρει πολλά υπολογιστικά πλεονεκτήματα. Τα πλεονεκτήματα αυτά έχουν να κάνουν με την *πολυπλοκότητα χρόνου και χώρου (time and space complexity)*.

Είναι υπολογιστικά προτιμότερο να αποθηκεύονται και να εκτελούνται πράξεις μόνο με τα μη μηδενικά στοιχεία τέτοιων μητρών και να παραλείπεται η αποθήκευση των μηδενικών στοιχείων.

Αποθήκευση Γράφων και Δικτύων (10)

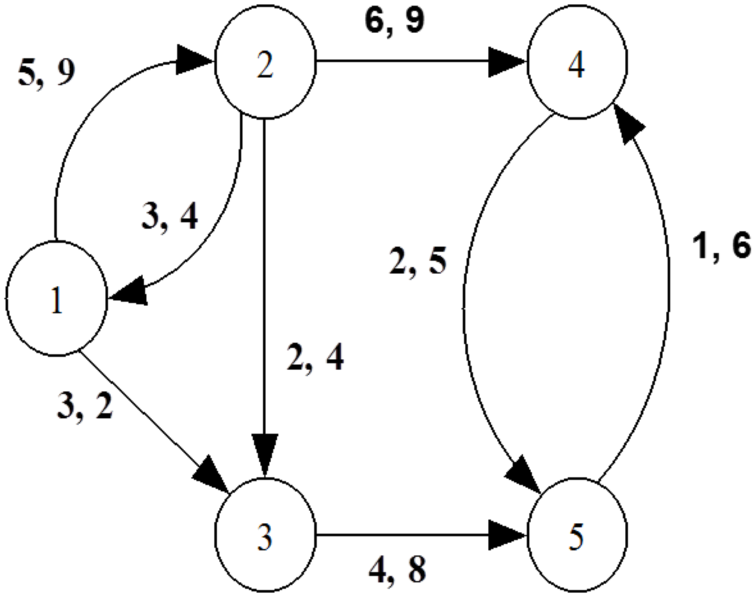
Ένας προσανατολισμένος γράφος $G=(N, A)$, $m=|N|$, $n=|A|$ περιέχει το πολύ $m(m–1)$ τόξα.

Έστω k το πλήθος των τόξων ενός γράφου G.

$d = k/(m(m–1)) \Rightarrow$ αραιότητα (sparsity) ή
πυκνότητα (density) του γράφου

Αν $0 < d \leq ½ \Rightarrow G$ είναι αραιός (sparse)
Αν $½ < d \leq 1 \Rightarrow G$ είναι πυκνός (dense)

Αποθήκευση Γράφων και Δικτύων (11)



m=5, n=8

d=8/(5(5-1))=8/20=0.4

Ο γράφος G είναι αραιός

Αποθήκευση Γράφων και Δικτύων (12)

A =

0	1	1	0	0
1	0	1	1	0
0	0	0	0	1
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0

```
>> whos
  Name      Size                    Bytes  Class
    A         5x5                     200  double array
Grand total is 25 elements using 200 bytes
```

Αποθήκευση Γράφων και Δικτύων (13)

```
>> B=sparse(A)
B =
   (2,1)        1
   (1,2)        1
   (1,3)        1
   (2,3)        1
   (2,4)        1
   (5,4)        1
   (3,5)        1
   (4,5)        1

>> whos
  Name      Size                    Bytes  Class
    A        5x5                    200  double array
    B        5x5                    120  double array (sparse)
Grand total is 33 elements using 320 bytes
```

Αποθήκευση Γράφων και Δικτύων (14)

• Coordinate Format

Anz : Περιλαμβάνει τις πραγματικές τιμές a_{ij}, i, j=1, 2, …, n της μήτρας A. Η αποθήκευση των πραγματικών τιμών a_{ij} γίνεται με οποιαδήποτε σειρά. Το πλήθος των στοιχείων της A είναι nz.

JR : Λίστα με ακέραιες τιμές η οποία περιλαμβάνει τους δείκτες των γραμμών των μη-μηδενικών στοιχείων a_{ij} με τη σειρά που αποθηκεύονται στη λίστα Anz. Το πλήθος των στοιχείων της λίστας JR είναι nz.

Αποθήκευση Γράφων και Δικτύων (15)

JC : Λίστα με ακέραιες τιμές η οποία περιλαμβάνει τους δείκτες των στηλών των μη-μηδενικών στοιχείων a_{ij} με τη σειρά που αποθηκεύονται στη λίστα Anz. Το πλήθος των στοιχείων της λίστας JC είναι nz.

Συνολικό Κόστος Αποθήκευσης: ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Anz=[12 9 7 5 1 2 11 3 6 4 8 10]

JR=[5 3 3 2 1 1 4 2 3 2 3 4]

JC=[5 5 3 4 1 4 4 1 1 2 4 3]

Αποθήκευση Γράφων και Δικτύων (16)

• Compressed Sparse Row (CSR)

Anz : Περιλαμβάνει τις πραγματικές τιμές a_{ij}, i, j=1, 2, …, n της μήτρας A. Η αποθήκευση των πραγματικών τιμών a_{ij} γίνεται «σαρώνοντας» τις γραμμές i=1 ως i=n. Το πλήθος των στοιχείων της A είναι nz.

JA : Λίστα με ακέραιες τιμές η οποία περιλαμβάνει τους δείκτες των στηλών των μη-μηδενικών στοιχείων a_{ij} με τη σειρά που αποθηκεύονται στη λίστα Anz. Το πλήθος των στοιχείων της λίστας JA είναι nz.

Αποθήκευση Γράφων και Δικτύων (17)

IA : Λίστα με ακέραιες τιμές η οποία περιλαμβάνει τους δείκτες οι οποίοι προσδιορίζουν την αρχή κάθε γραμμής στις λίστες Anz και JA. Το πλήθος των στοιχείων της λίστας IA είναι n+1, όπου IA(n+1)=nz+1.

HINT! Η δημιουργία των λιστών Anz, JA και IA γίνεται ταυτόχρονα κατά την ανάγνωση της μήτρας A.

Παράδειγμα

Έστω η μήτρα $$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 \end{bmatrix}$$

Να αποθηκευτεί σε μορφή CSR

Anz = [-4 -2 1 1 1 -5 -9]

JA = [2 1 3 3 2 5 4]

IA = [1 2 4 5 7 8]

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης