ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ & ΔΙΚΤΥΑΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Ενότητα 23: Κλασική Ανάλυση Ευαισθησίας, Βασικές Έννοιες Γραφημάτων

Σαμαράς Νικόλαος

Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

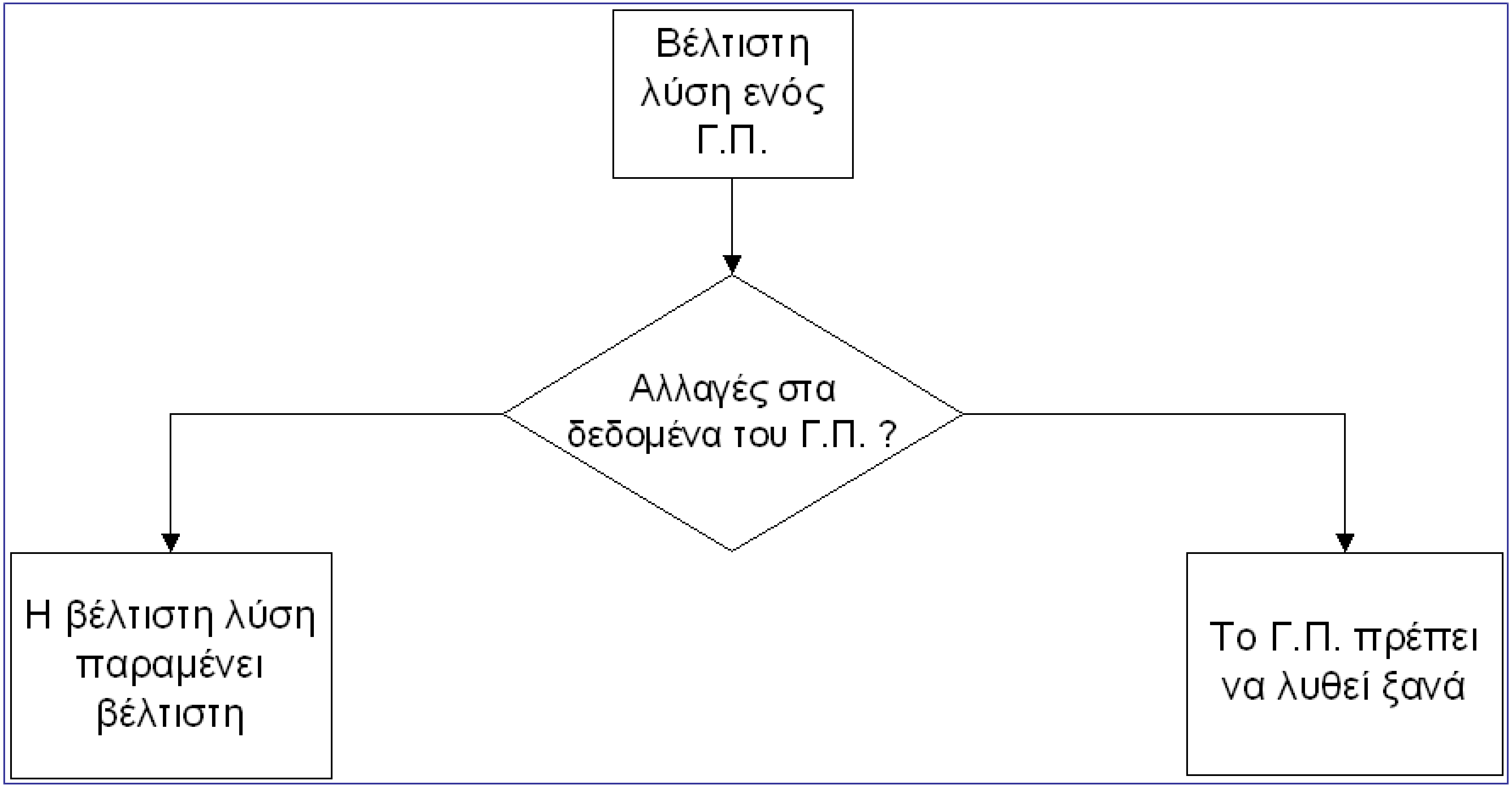
- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Η κλασική Ανάλυση Ευαισθησίας (1)



Η κλασική Ανάλυση Ευαισθησίας (2)

<u>Αλλαγή στα Δεδομένα:</u>

- Αλλαγές στις τιμές των συντελεστών κόστους
- Αλλαγές στο δεξιό μέρος
- Αλλαγές στη μήτρα συντελεστών
- Προσθήκη νέας μεταβλητής
- Διαγραφή μιας μεταβλητής
- Προσθήκη νέου περιορισμού
- Διαγραφή ενός περιορισμού

Η κλασική Ανάλυση Ευαισθησίας (3)

Ελλειμματικό κόστος (reduced cost) μιας μεταβλητής x_j (συντελεστές c_j) ονομάζεται η βέλτιστη τιμή της s_j

Σκιερή τιμή (shadow price) ενός τεχνολογικού περιορισμού (δεξιό μέρος b_i) ονομάζεται η βέλτιστη τιμή της w_i

Με Δc_j, Δb_i, Δa_{ij} συμβολίζονται οι μεταβολές των τιμών των συντελεστών c_j, b_i, a_{ij}. Οι νέες τιμές συμβολίζονται με $c_j+\Delta c_j$, $b_i+\Delta b_i$, $a_{ij}+\Delta a_{ij}$

$\mathrm{Max}\{\emptyset\} = -\infty$, $\mathrm{Min}\ \{\emptyset\} = +\infty$

Η κλασική Ανάλυση Ευαισθησίας (4)

Αλλαγές στους συντελεστές κόστους

Περίπτωση 1: Ο δείκτης j είναι μη βασικός ($j \in N$)

Εύρος συντελεστού c_j είναι $[c_j - s_j, +\infty)$

Αν $c_j+\Delta c_j \in [c_j - s_j, +\infty)$ η βέλτιστη βάση B παραμένει βέλτιστη

Διαφορετικά, επίλυση του νέου Γ.Π. με τον πρωτεύοντα αναθεωρημένο αλγόριθμο simplex, ξεκινώντας με την πρώην βέλτιστη βάση B η οποία είναι εφικτή για το νέο Γ.Π.

Η κλασική Ανάλυση Ευαισθησίας (5)

<u>Περίπτωση 2:</u> Ο δείκτης j είναι βασικός ($j \in B$)

Εύρος συντελεστού c_j είναι $[c_j + \alpha_j, c_j + \beta_j]$ όπου

$$\alpha_j = \max\{s_k/h_{ik} : k \in N \wedge h_{ik} < 0\}$$

$$\beta_j = \min\{s_k/h_{ik} : k \in N \wedge h_{ik} > 0\}$$

Όπου h_{ik} στοιχεία της γραμμής περιστροφής H_{rN}
Αν $c_j+\Delta c_j \in [c_j + \alpha_j, c_j + \beta_j]$ η βέλτιστη βάση B παραμένει βέλτιστη

Διαφορετικά, επίλυση του νέου Γ.Π. με τον πρωτεύοντα αναθεωρημένο αλγόριθμο simplex, ξεκινώντας με την πρώην βέλτιστη βάση B η οποία είναι εφικτή για το νέο Γ.Π.

Η κλασική Ανάλυση Ευαισθησίας (6)

Αλλαγές στο Δεξιό Μέρος

Εύρος συντελεστού b_i είναι $[b_i + \gamma_i, b_i + \delta_i]$ όπου

$$\gamma_i = \max\{-x_{B[k]}/(B^{-1})_{ki} : (B^{-1})_{ki} > 0\}$$

$$\delta_i = \min\{-x_{B[k]}/(B^{-1})_{ki} : (B^{-1})_{ki} < 0\}$$

Όπου $1 \leq k \leq m$
Αν $b_i + \Delta b_i \in [b_i + \gamma_i, b_i + \delta_i]$ η βέλτιστη βάση B παραμένει βέλτιστη

Διαφορετικά, επίλυση του νέου Γ.Π. με τον δυϊκό αναθεωρημένο αλγόριθμο simplex, ξεκινώντας με την πρώην βέλτιστη βάση B η οποία είναι δυϊκά εφικτή για το νέο Γ.Π.

Παράδειγμα (1)

Δίνεται το παρακάτω γραμμικό πρόβλημα

$$
\begin{array}{lrcrcrcrrrl}
\min & -2x_1 & + & 24x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & & & \\
\text{s.t.} & -x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & -x_5 & & = 0 \\
& -x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_4 & & -x_6 & = 1 \\
& & & x_j & \geq & 0 & & & & &
\end{array}
$$

i)Να ελεγχθεί αν η βασική διαμέριση B = [5, 4], N = [1, 2, 3, 6] είναι βέλτιστη.

ii)Να βρεθούν τα εύρη των συντελεστών c_j και b_i, $j \in B \wedge N$

Παράδειγμα (2)

Εύρος, σκιερές τιμές και ελλειμματικά κόστη υπολογισμένα με την κλασσική μέθοδο

Συντελεστής	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	b_1	b_2
Αριστερό άκρο εύρους	-3	12	0	2	-4	-3	$-\infty$	0
Δεξιό άκρο εύρους	∞	∞	∞	6	1	∞	0	∞
Σκιερή τιμή	-	-	-	-	-	-	0	3
Ελλειμματικό κόστος	1	12	4	0	0	3	-	-

Παράδειγμα (1)

Μετά την επίλυση του προβλήματος του προηγουμένου παραδείγματος διαπιστώθηκε ότι η τιμή του συντελεστού c_2 δεν ήταν 24 αλλά 9. Παραμένει η παλιά βέλτιστη βάση B=[5 4] βέλτιστη για το νέο πρόβλημα; Αν όχι λύστε το νέο πρόβλημα.

Γνωρίζουμε ήδη από το προηγούμενο Παράδειγμα ότι το εύρος του συντελεστού c_2 είναι το διάστημα $[12, +\infty)$.

Παράδειγμα (2)

Λύση. Επειδή η νέα τιμή του συντελεστή c_2 είναι

$$c_2 + \Delta c_2 = 9$$

η οποία προφανώς δεν ανήκει στο διάστημα $[12, +\infty)$, η παλιά βέλτιστη βάση B = [5 4] δεν παραμένει βέλτιστη στο νέο πρόβλημα. Επομένως θα λυθεί το νέο πρόβλημα εφαρμόζοντας τον πρωτεύοντα αλγόριθμο simplex και ξεκινώντας από την παλιά βέλτιστη βάση.

Επειδή είναι $c_2 + \Delta c_2 = 24 + \Delta c_2 = 9$, έχουμε $\Delta c_2 = 9-24 = -15$. Επίσης έχουμε $s_2 = 12$ και επομένως είναι

$s_2 + \Delta s_2 = s_2 + \Delta c_2 = 12 – 15 = -3 < 0$

επιβεβαιώνοντας έτσι ότι η μεταβλητή x_2 είναι εισερχόμενη.

Παράδειγμα (3)

Η νέα βέλτιστη λύση είναι η παρακάτω

B = [5 2], N = [1 3 4 6],

$(x_B)^T = (x_5\ x_2) = (3/4,\ 1/4)$

$w^T = (w_1\ w_2) = (0\ \ 9/4)$

$(s_N)^T = (s_1\ \ s_3\ \ \ s_4\ \ s_6) = (1/4, 4, 3/4, 5/4)$

Η νέα βέλτιστη αντικειμενική τιμή είναι 9/4.

Βασικές Έννοιες Γραφημάτων (1)

Γράφος ή γράφημα G = (N,A) είναι μια δυάδα δύο συνόλων N και A

Στοιχεία του N $\Rightarrow$ κόμβοι (nodes) ή κορυφές (vertices)

ή σημεία (points)

Στοιχεία του A $\Rightarrow$ τόξα (arcs) ή ακμές (edges)

Συμβολίζονται με (i, j)

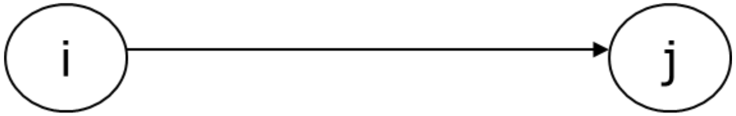
Βασικές Έννοιες Γραφημάτων (2)

(i, j)≠(j, i), γράφος προσανατολισμένος, τόξα

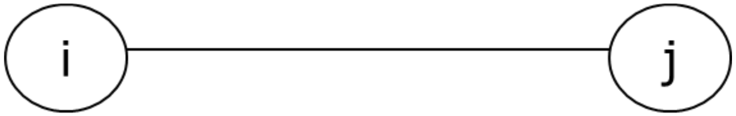
(i, j)=(j, i), γράφος μη προσανατολισμένος, ακμές

Απεικόνιση κόμβων ⇒ κύκλοι, τετράγωνα, τρίγωνα

Απεικόνιση τόξων ⇒



Απεικόνιση ακμών ⇒



Βασικές Έννοιες Γραφημάτων (3)

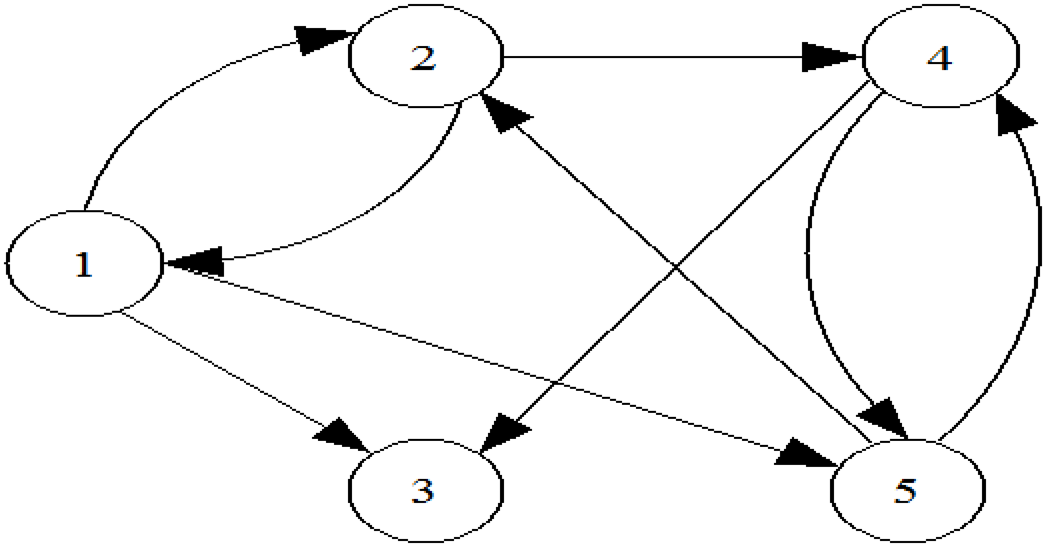
Πλήθος κόμβων m (m=card(N))

Πλήθος τόξων ή ακμών n (n=card(A))

Τόξο (i, j), αρχή, ουρά (tail) κόμβος i,
τέλος, κεφάλι (head) κόμβος j

Κόμβοι i και j του τόξου (i, j) $\Rightarrow$ άκρα (ends)

Προσανατολισμένος Γράφος

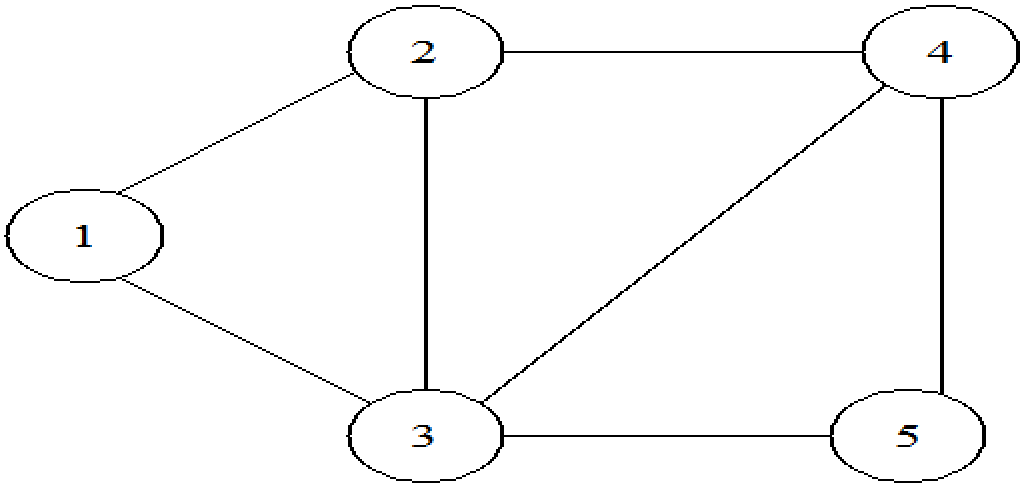


N={1,2,3,4,5}

A={(1,2),(1,3),(1,5),(2,1),(2,4),(4,3),(4,5),(5,2), (5,4)}

m=5, n=9

Μη Προσανατολισμένος Γράφος



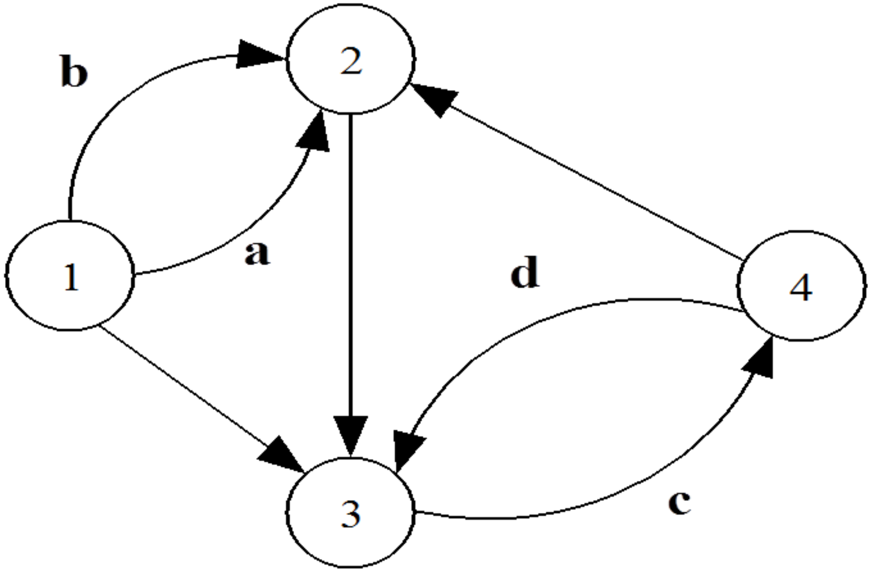
N={1,2,3,4,5}

A={(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,4),(3,5),(4,5)}

m=5, n=7

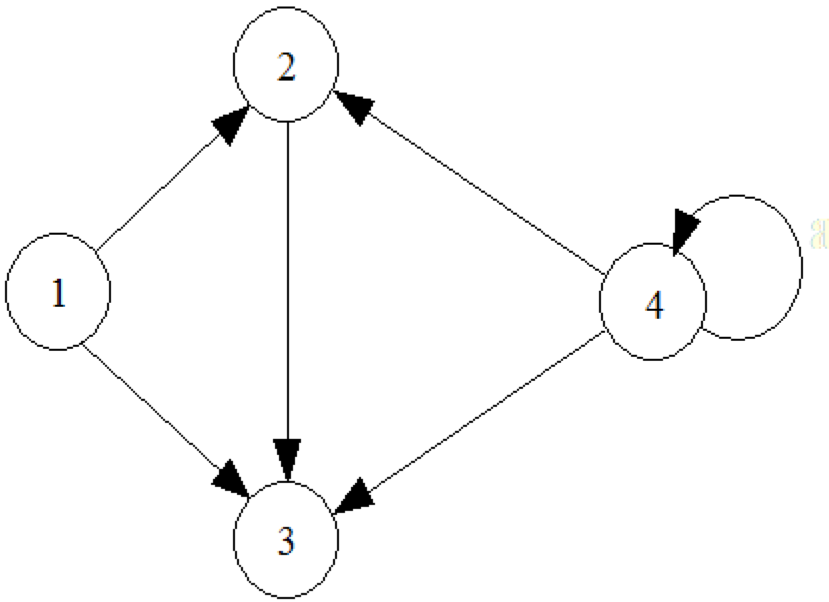
Βασικές Έννοιες Γραφημάτων (4)

Παράλληλα (parallel) Τόξα: ∃ δύο ή περισσότερα τόξα με ίδια αρχή i και ίδιο τέλος j (j ≠i)



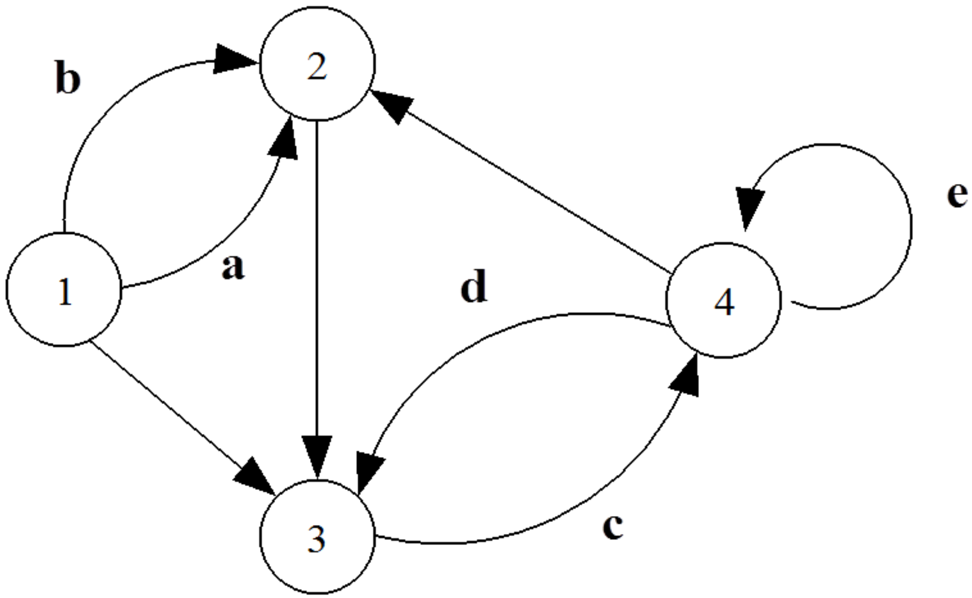
Βασικές Έννοιες Γραφημάτων (5)

Βρόχος (loop): Ένα τόξο με αρχή και τέλος τον ίδιο κόμβο (i=j)



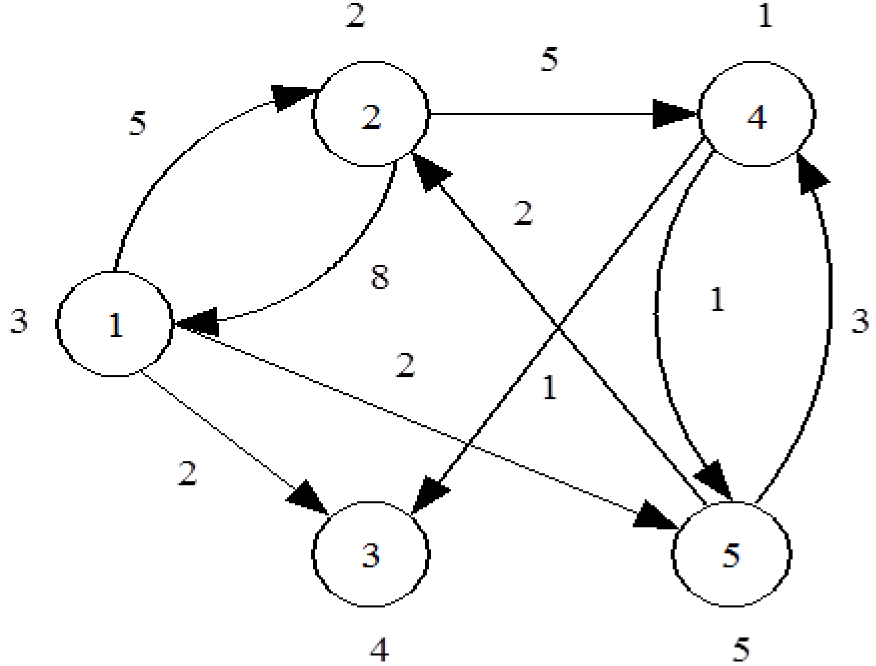
Βασικές Έννοιες Γραφημάτων (6)

Υπεργράφος (hypergraph): Ένας γράφος που έχει παράλληλα τόξα και/ή βρόχους.



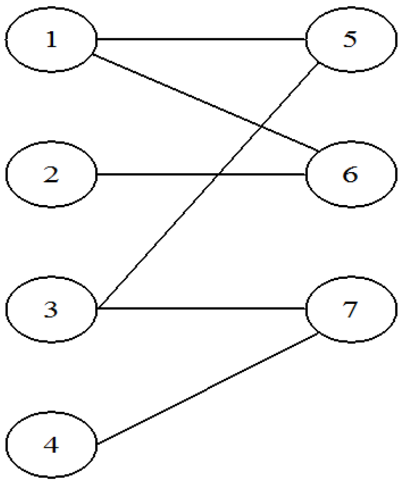
Βασικές Έννοιες Γραφημάτων (7)

Δίκτυο (network): Ένας γράφος στον οποίο έχουν προσαρτηθεί αριθμοί (βάρη) στους κόμβους ή/και στα τόξα του

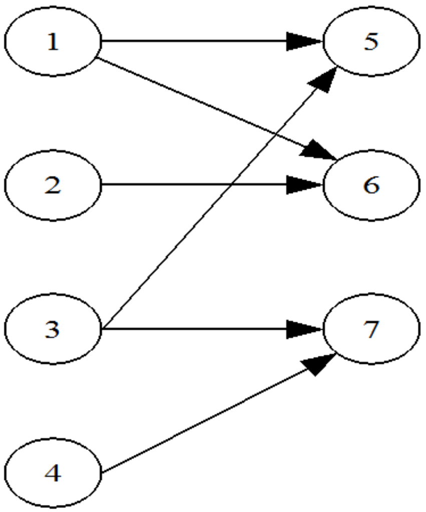


Βασικές Έννοιες Γραφημάτων (8)

Διμερής γράφος (bipartite graph): Οι κόμβοι έχουν διαμεριστεί σε δύο υποσύνολα N_1, N_2 έτσι ώστε όλα τα τόξα να έχουν ένα άκρο στο N_1 και ένα άκρο στο N_2.



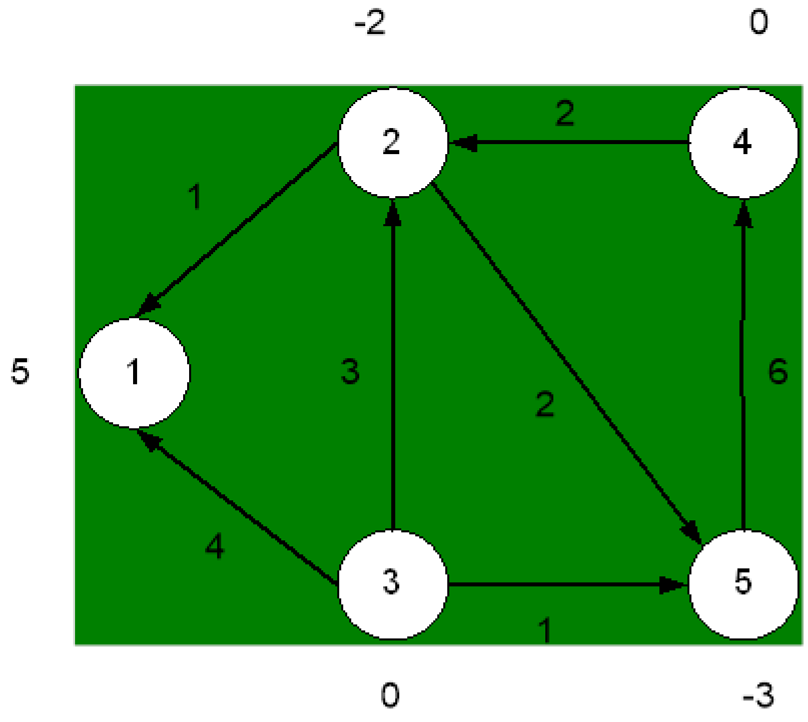
α



β

Σχήμα 1: Ένα διμερές ***μη προσανατολισμένο (α)*** και ένα διμερές ***προσανατολισμένο (β)*** γράφημα

Προβλήματα Δικτύων (1)

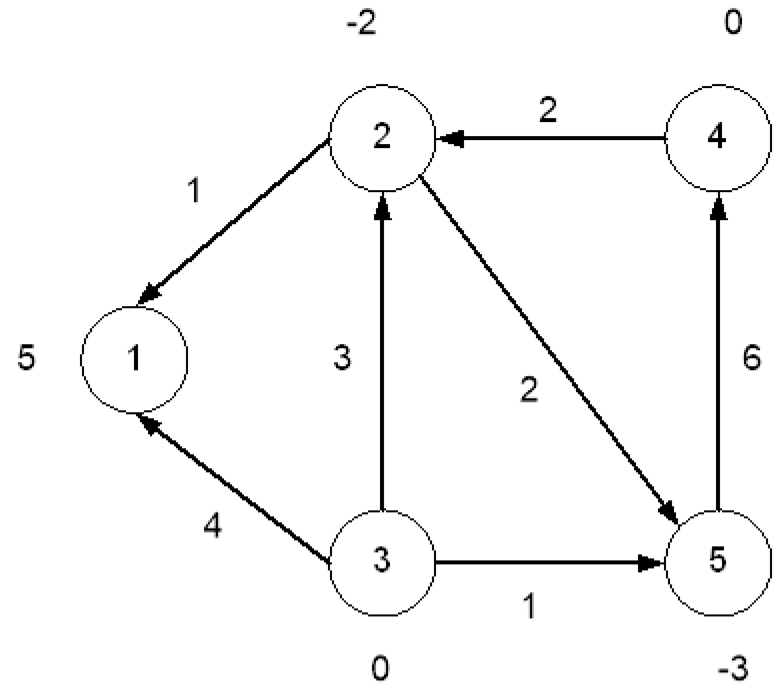


b(i) – ποσότητα προϊόντος
b(i)>0 – προσφορά ποσότητας προϊόντος, κόμβος προσφοράς (supply node)
b(i)<0 – ζήτηση ποσότητας προϊόντος, κόμβος ζήτησης (demand node)
b(i)=0 – κόμβος μεταφόρτωσης (transshipment node)
c_{ij} – κόστος μεταφοράς μιας μονάδας προϊόντος διαμέσου του τόξου $(i, j) \in A$

Προβλήματα Δικτύων (2)

Ζητούμενο: Σχέδιο μεταφοράς του προϊόντος από τους κόμβους προσφοράς στους κόμβους ζήτησης έτσι ώστε να ικανοποιηθεί όλη η ζήτηση και το κόστος μεταφοράς να είναι ελάχιστο.

Το πρόβλημα αυτό ονομάζεται Πρόβλημα Ροής Ελαχίστου Κόστους (Minimum Cost Network Flow Problem)
Συντομογραφία: ΠΡΕΚ (MCNFP)



Μαθηματική Μορφοποίηση (1)

x_{ij} – ποσότητα προϊόντος που ρέει στο τόξο $(i, j) \in A$

Αν

$x_{ij} > 0$, μεταφορά ποσότητας x_{ij} από τον κόμβο $i \rightarrow j$
$x_{ij} < 0$, μεταφορά ποσότητας $|x_{ij}| = -x_{ij} > 0$ από τον κόμβο $j \rightarrow i$

Η ποσότητα x_{ij} ονομάζεται ροή (flow) του τόξου (i, j)

ή

Η ποσότητα x_{ij} ονομάζεται μεταβλητή απόφασης (decision variable)

Μαθηματική Μορφοποίηση (2)

Όρια στη ροή: $l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij}$

Όπου l_{ij} – ελάχιστη ποσότητα στο τόξο (i, j)
u_{ij} – μέγιστη ποσότητα στο τόξο (i, j)

Αν $u_{ij} < +\infty \rightarrow u_{ij}$ χωρητικότητα (capacity) του τόξου (i, j)

Αν $l_{ij} = 0 \wedge u_{ij} = +\infty \ \forall \ (i, j) \in A$ τότε το ΠΡΕΚ ονομάζεται ΠΡΕΚ χωρίς χωρητικότητες. Διαφορετικά, ονομάζεται ΠΡΕΚ με χωρητικότητες.

Μαθηματική Μορφοποίηση (3)

Συνολικό Κόστος: $\sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$ $\leftarrow$ ελαχιστοποίηση

Περιορισμοί στη ροή: $l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij}, \quad (i,j)\in A$

Περιορισμοί στους κόμβους: $\forall$ i $\in$ N $\rightarrow$ ένας περιορισμός

1. Κόμβος i $\rightarrow$ μεταμόρφωσης (b(i)=0)

Ποσότητα που εισρέει = Ποσότητα που εκρέει

$$\boxed{\sum_{\{k:(k,i)\in A\}} x_{ki} = \sum_{\{j:(i,j)\in A\}} x_{ij}}$$

Μαθηματική Μορφοποίηση (4)

Περιορισμοί στους κόμβους: $\forall$ i $\in$ N $\rightarrow$ ένας περιορισμός

2. Κόμβος i $\rightarrow$ προσφοράς (b(i)>0)

Ποσότητα που εκρέει $\leq$ Ποσότητα που προσφέρει +
Ποσότητα που εισρέει

$$\boxed{\sum_{\{j:(i,j)\in A\}} x_{ij} \leq b(i) + \sum_{\{k:(k,i)\in A\}} x_{ki}}$$

Μαθηματική Μορφοποίηση (5)

Περιορισμοί στους κόμβους: $\forall$ i $\in$ N $\rightarrow$ ένας περιορισμός

3. Κόμβος i $\rightarrow$ ζήτησης ($|b(i)| = -b(i) > 0$)

Ποσότητα που εισρέει – Ποσότητα που εκρέει ≥ Ποσότητα που ζητάει

$$\boxed{\sum_{\{k:(k,i)\in A\}} x_{ki} - \sum_{\{j:(i,j)\in A\}} x_{ij} \geq -b(i)}$$

Φυσικοί Περιορισμοί: $0 \leq x_{ij} \leq +\infty$

Μαθηματική Μορφοποίηση (6)

Το ΠΡΕΚ γράφεται

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

$$\mu.\pi. \sum_{\{j:(i,j)\in A\}} x_{ij} - \sum_{\{k:(k,i)\in A\}} x_{ki} = 0, \qquad \alpha\nu\ b(i) = 0$$

$$\sum_{\{j:(i,j)\in A\}} x_{ij} - \sum_{\{k:(k,i)\in A\}} x_{ki} \le b(i), \quad \alpha\nu\ b(i) \ne 0$$

$$l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij}, \quad (i,j) \in A$$

Μαθηματική Μορφοποίηση (7)

Αν $\boxed{\sum_{b(i)>0} b(i) = \sum_{b(i)<0} -b(i) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} b(i) = 0}$ → Όλοι οι περιορισμοί ισχύουν ως ισότητες

Ονομάζονται περιορισμοί συντήρησης της ροής. Το ΠΡΕΚ ονομάζεται ισοζυγισμένο (balanced)

Αν $\boxed{\sum_{i=1}^{m} b(i) \neq 0}$

Το ΠΡΕΚ ονομάζεται μη ισοζυγισμένο (unbalanced)

Πότε το ΠΡΕΚ μπορεί να είναι αδύνατο?

Μαθηματική Μορφοποίηση (8)

Το ΠΡΕΚ όταν είναι ισοζυγισμένο γράφεται

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\mu.\pi. \sum_{\{j:(i,j)\in A\}} x_{ij} - \sum_{\{k:(k,i)\in A\}} x_{ki} = b(i), \quad i = 1,2 \ldots m$$

$$l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij}, \quad (i,j) \in A$$

Μετασχηματισμός σε ισοζυγισμένη μορφή (1)

Αν $\boxed{\sum_{i=1}^{m} b(i) > 0}$ $\rightarrow$ Τεχνητός κόμβος ζήτησης m+1

$$b(m+1) = -\sum_{i=1}^{m} b(i) < 0$$

Και ένα τεχνητό τόξο (i, m+1) $\forall$ i: b(i) > 0 με $c_{i,m+1} = 0$

Τότε $\sum_{i=1}^{m+1} b(i) = 0$

το ΠΡΕΚ έχει μετατραπεί σε ισοζυγισμένο.

Μετασχηματισμός σε ισοζυγισμένη μορφή (2)

Αν $\boxed{\sum_{i=1}^{m} b(i) < 0}$ $\rightarrow$ Τεχνητός κόμβος προσφοράς m+1

$$b(m+1) = -\sum_{i=1}^{m} b(i) > 0$$

Και ένα τεχνητό τόξο (m+1, j) $\forall$ j: b(j) < 0 με $c_{m+1,j} = 0$

Τότε $\sum_{i=1}^{m+1} b(i) = 0$

το ΠΡΕΚ έχει μετατραπεί σε ισοζυγισμένο.

Τέλος Ενότητας

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης