ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ & ΔΙΚΤΥΑΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Ενότητα 21: Δυϊκή Θεωρία, Θεώρημα Συμπληρωματικής Χαλαρότητας και τρόποι χρήσης του

Σαμαράς Νικόλαος
Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Δυϊκή Θεωρία ΙΙ (1)

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & c^T x & & \\
\text{μ.π.} & Ax & \geq & b \\
 & x & \geq & 0
\end{array}
\qquad \text{(Π.Γ.Π.)}
$$

και

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & w^T b & & \\
\text{μ.π.} & w^T A & \leq & c^T \\
 & w & \geq & 0
\end{array}
\qquad \text{(Δ.Γ.Π.)}
$$

Λήμμα. Αν το ένα από τα προβλήματα (Π.Γ.Π.) και (Δ.Γ.Π.) είναι απεριόριστο το άλλο είναι αδύνατο. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

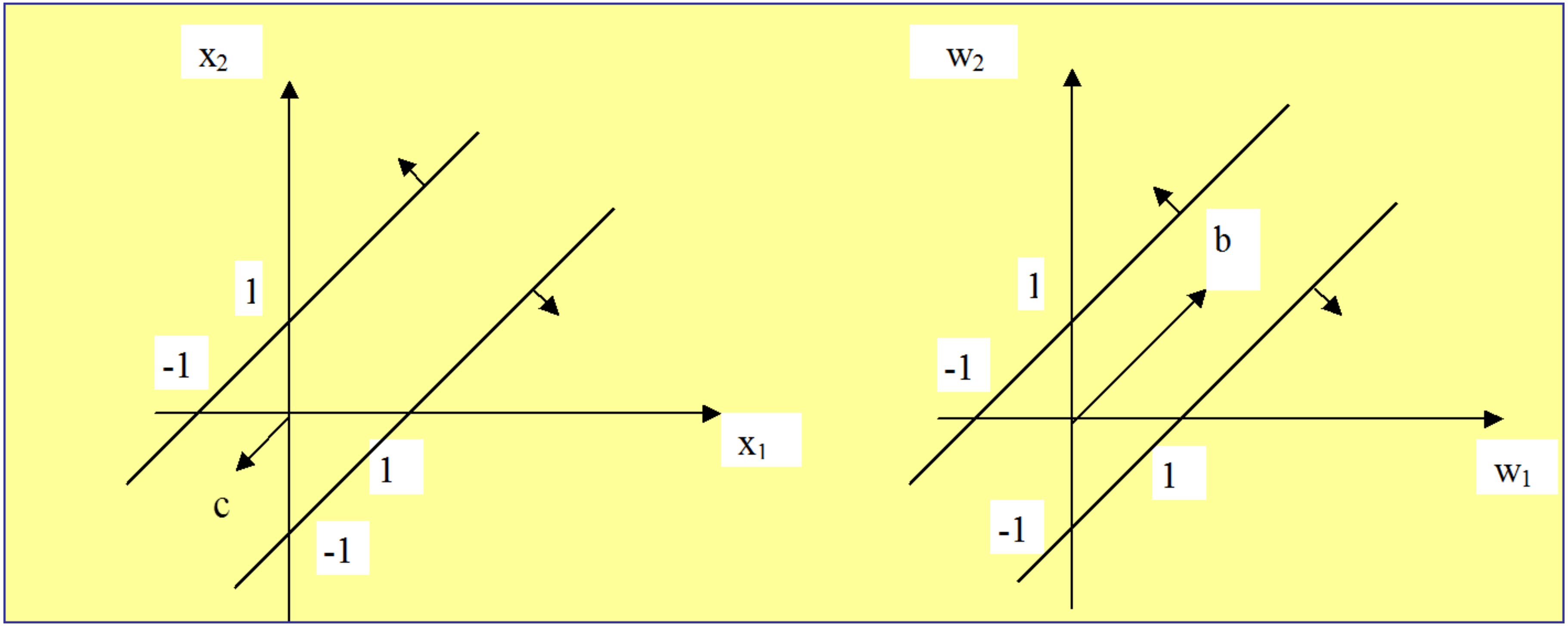
Δυϊκή Θεωρία II (2)

Έστω το ζευγάρι των προβλημάτων

$$
\begin{aligned}
\min\ z_P = {} & -x_1 - x_2 \\
\text{μ.π.}\quad & x_1 - x_2 \geq 1 \\
& -x_1 + x_2 \geq 1 \\
& x_j \geq 0,\ (j = 1, 2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max\ z_D = {} & w_1 + w_2 \\
\text{μ.π.}\quad & w_1 - w_2 \leq -1 \\
& -w_1 + w_2 \leq -1 \\
& w_j \geq 0,\ (j = 1, 2)
\end{aligned}
$$

Δυϊκή Θεωρία ΙΙ (3)

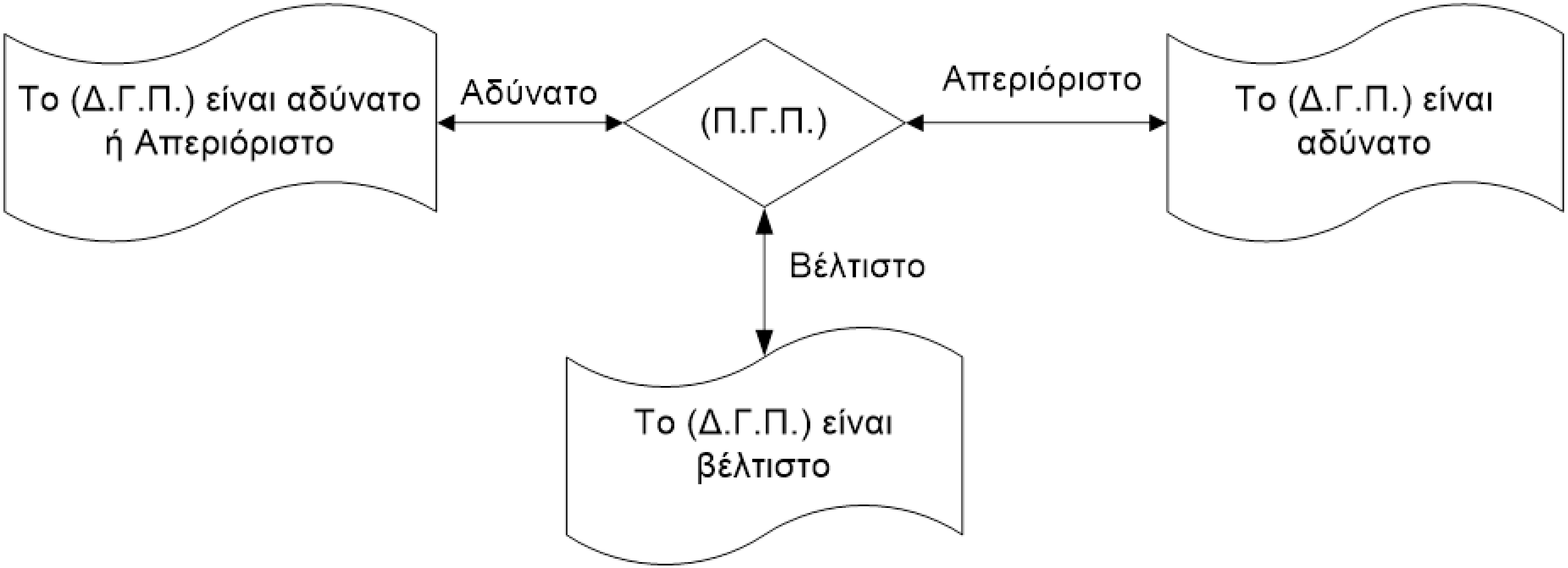


Δυϊκή Θεωρία ΙΙ (4)

Λήμμα. Αν ένα γραμμικό πρόβλημα είναι βέλτιστο, τότε και το δυϊκό του είναι βέλτιστο.

Θεώρημα. Έστω (Π.Γ.Π.) και (Δ.Γ.Π.) ένα ζευγάρι πρωτεύοντος και δυϊκού προβλήματος. Τότε ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις
Αν (Π.Γ.Π.) είναι βέλτιστο, (Δ.Γ.Π.) είναι επίσης βέλτιστο και αντιστρόφως
Αν (Π.Γ.Π.) είναι απεριόριστο, (Δ.Γ.Π.) είναι αδύνατο και αντιστρόφως (αν (Δ.Γ.Π.) είναι απεριόριστο, (Π.Γ.Π.) είναι αδύνατο)
Αν (Π.Γ.Π.) είναι αδύνατο, το (Δ.Γ.Π.) μπορεί να είναι αδύνατο ή απεριόριστο και αντιστρόφως (αν (Δ.Γ.Π.) είναι αδύνατο, το (Π.Γ.Π.) μπορεί να είναι αδύνατο ή απεριόριστο)

Δυϊκή Θεωρία ΙΙ (5)



Δυϊκή Θεωρία ΙΙ (7)

Τα προηγούμενα αποτελέσματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν έτσι ώστε να μπορεί να γίνει έλεγχος αν δυο σημεία x και w είναι βέλτιστα για τα προβλήματα (Π.Γ.Π.) και (Δ.Γ.Π.) αντίστοιχα.

Αν δοθεί μόνο το ένα από τα δυο σημεία, πώς θα κατασκευαστεί το άλλο για να γίνει ο έλεγχος;

Το θεώρημα της συμπληρωματικής χαλαρότητας απαντάει εμμέσως πλην σαφώς στο ερώτημα αυτό.

Δυϊκή Θεωρία ΙΙ (8)

Θεώρημα Συμπληρωματικής Χαλαρότητας (Complementarity slackness theorem).

(1η Διατύπωση)

Έστω x ένα εφικτό σημείο του προβλήματος (Π.Γ.Π.). Τότε, το σημείο x είναι βέλτιστη λύση του προβλήματος (Π.Γ.Π.), αν υπάρχει εφικτή λύση w του προβλήματος (Δ.Γ.Π.) τέτοια ώστε

$$(c^T - w^T A)x = 0$$
$$w^T(Ax - b) = 0$$

ή

$$(c_j – w^T A_{.j})x_j = 0, j=1, 2, \ldots, n$$
$$w_i(A_{i.}x - b_i) = 0, i=1, 2, \ldots, m$$

Δυϊκή Θεωρία ΙΙ (9)

Θεώρημα Συμπληρωματικής Χαλαρότητας (Complementarity slackness theorem).

(2η Διατύπωση)

Έστω w ένα εφικτό σημείο του προβλήματος (Δ.Γ.Π.). Τότε, το σημείο w είναι βέλτιστη λύση του προβλήματος (Δ.Γ.Π.), αν υπάρχει εφικτή λύση x του προβλήματος (Π.Γ.Π.) τέτοια ώστε

$$(c^T - w^T A)x = 0$$
$$w^T(Ax - b) = 0$$

ή

$$(c_j – w^T A_{.j})x_j = 0,\ j=1, 2, \ldots, n$$
$$w_i(A_{i.}x - b_i) = 0,\ i=1, 2, \ldots, m$$

Δυϊκή Θεωρία ΙΙ (10)

Αν x και w είναι εφικτά σημεία του (Π.Γ.Π.) και (Δ.Γ.Π.) αντίστοιχα οι προηγούμενες σχέσεις μπορούν να γραφούν ισοδύναμα με την εξής μορφή

αν $x_j > 0$, τότε $c_j – w^T A_{.j} = 0$ (1α)

αν $c_j – w^T A_{.j} > 0$, τότε $x_j = 0$ (1β)

όπου $j = 1,2, …, n$ και

αν $w_i > 0$ τότε $A_{i.} x = b_i$ (2α)

αν $A_{i.} x > b_i$ τότε $w_i = 0$ (2β)

όπου $i = 1,2, …, m$

Δυϊκή Θεωρία ΙΙ (11)

Οι περιορισμοί $x_j \geq 0$ και $c_j - w^T a_j \geq 0$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$ ονομάζονται *συμπληρωματικοί (complementary*).

Επίσης, συμπληρωματικοί ονομάζονται και οι περιορισμοί $w_i \geq 0$ και $A_{i.}x \geq b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Οι προηγούμενες σχέσεις ονομάζονται *σχέσεις συμπληρωματικής χαλαρότητας (complementarity slackness relations).* Μας λένε ότι, όταν ένας περιορισμός είναι χαλαρός, δηλαδή ισχύει σαν αυστηρή ανισότητα, τότε ο συμπληρωματικός του περιορισμός ισχύει σαν ισότητα.

Παράδειγμα (1)

Δίνεται το γραμμικό πρόβλημα

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\min & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & & \\
\mu.\pi. & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & \geq & 4 \\
 & 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \geq & 3
\end{array}
$$

$$x_j \geq 0, \ (j = 1, 2, 3, 4, 5)$$

Να κατασκευαστεί το δυϊκό του και να ελεγχθεί αν η λύση $w_1 = 4/5$ και $w_2 = 3/5$ είναι βέλτιστη

Παράδειγμα (2)

Το δυϊκό πρόβλημα είναι

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & 4w_1 & + & 3w_2 & & \\
\mu.\pi. & w_1 & + & 2w_2 & \leq & 2 \\
 & w_1 & - & 2w_2 & \leq & 3 \\
 & 2w_1 & + & 3w_2 & \leq & 5 \\
 & w_1 & + & w_2 & \leq & 2 \\
 & 3w_1 & + & w_2 & \leq & 3
\end{array}
$$

$$w_j \geq 0,\ (j = 1, 2)$$

Κατηγορίες Αλγορίθμων (1)

Ως προς τα σημεία που κατασκευάζουν.

• Αλγόριθμοι συνοριακών σημείων.
• Αλγόριθμοι εξωτερικών σημείων.
• Αλγόριθμοι εσωτερικών σημείων.

Ως προς το πρόβλημα που εφαρμόζονται.

• Αν ένας αλγόριθμος επιλύει το πρωτεύον πρόβλημα κατασκευάζοντας εφικτά του σημεία, ονομάζεται *πρωτεύων (primal)* αλγόριθμος.
• Αν επιλύει το δυϊκό πρόβλημα (κατασκευάζοντας δυϊκώς εφικτά σημεία), ονομάζεται *δυϊκός (dual)* αλγόριθμος.

Κατηγορίες Αλγορίθμων (2)

Υπάρχουν αλγόριθμοι, οι οποίοι κατασκευάζουν ταυτόχρονα δυο ακολουθίες σημείων. Τα σημεία της μιας ακολουθίας είναι εφικτά στο πρωτεύον και της άλλης εφικτά στο δυϊκό πρόβλημα. Οι αλγόριθμοι αυτοί ονομάζονται *πρωτεύοντες-δυϊκοί (primal-dual).*

Αν x είναι εφικτό σημείο του (Π.Γ.Π.) και w εφικτή λύση του προβλήματος (Δ.Γ.Π.), η διαφορά των αντικειμενικών τιμών $c^T x - b^T w$ ονομάζεται *δυϊκό χάσμα (duality gap*). Μερικοί αλγόριθμοι πρωτεύοντες-δυϊκοί κατασκευάζουν ακολουθίες σημείων έτσι ώστε το δυϊκό χάσμα να ελαττώνεται από επανάληψη σε επανάληψη. Όταν γίνει μηδέν επιτυγχάνεται η βελτιστότητα.

Αναθεωρημένος Δυϊκός Αλγόριθμος Simplex (1)

Έστω το παρακάτω πρωτεύον γραμμικό πρόβλημα

$$\min\{c^T x: Ax = b, \quad x \geq 0\} \qquad \text{(Π.Γ.Π)}$$

όπου c, $x \in \Re^n$, $b \in \Re^m$ και $A \in \Re^{mxn}$. Το δυϊκό του είναι το γραμμικό πρόβλημα

$$\max\{b^T w: A^T w + s = c\} \qquad \text{(Δ.Γ.Π)}$$

όπου $w \in \Re^m$ είναι οι δυϊκές μεταβλητές και $s \in \Re^n$ το διάνυσμα των δυϊκών χαλαρών μεταβλητών.

Αναθεωρημένος Δυϊκός Αλγόριθμος Simplex (2)

	Πρωτεύων Αλγόριθμος Simplex	Δυϊκός Αλγόριθμος Simplex
Εφικτή Διαμέριση	$x_B=B^{-1}b\geq 0$	$s_N=c^T-w^TN\geq 0$
Συνθήκη Βελτιστότητας	$s_N=c^T-w^TN\geq 0$	$x_B=B^{-1}b\geq 0$

Αναθεωρημένος Δυϊκός Αλγόριθμος Simplex (3)

<u>Βήμα 0 *(Αρχικοποίηση).*</u> Ξεκίνα με μια δυϊκά εφικτή διαμέριση [B, N]. Υπολόγισε τη μήτρα B^{-1} και τα διανύσματα x_B, w^T και s_N

<u>Βήμα 1 *(Έλεγχος βελτιστότητας).*</u> Αν ισχύει $x_B \geq 0$, STOP. Η λύση x_B είναι βέλτιστη στο πρόβλημα (Π.Γ.Π.) και η λύση w είναι βέλτιστη στο (Δ.Γ.Π.)

Αναθεωρημένος Δυϊκός Αλγόριθμος Simplex (4)

<u>Βήμα 2 *(Επιλογή εξερχόμενης / εισερχόμενης μεταβλητής).*</u>

α) Επέλεξε την εξερχόμενη μεταβλητή από τη σχέση

$$\boxed{x_k = x_{B[r]} = x_{B[r]} = \min\{x_{B[i]} : x_{B[i]} < 0 \wedge i = 1, \ldots, m\}}$$

Η μεταβλητή x_k είναι εξερχόμενη.

β) Υπολόγισε τη γραμμή περιστροφής από τη σχέση

$$\boxed{H_{rN} = B_{r.}^{-1} A_N}$$

Αν ισχύει $H_{rN} \geq 0$, STOP, το πρόβλημα (Δ.Γ.Π) είναι απεριόριστο ενώ το πρόβλημα (Π.Γ.Π.) αδύνατο. Διαφορετικά, επέλεξε την εισερχόμενη μεταβλητή από τη σχέση

Αναθεωρημένος Δυϊκός Αλγόριθμος Simplex (5)

Βήμα 2 *(Επιλογή εξερχόμενης / εισερχόμενης μεταβλητής).* *{συνέχεια}*

$$a = -\frac{s_l}{H_{rl}} = \min\left\{-\frac{s_j}{H_{rj}} : H_{rj} < 0 \wedge j \in N\right\}$$

Η x_l είναι εισερχόμενη.

Βήμα 3 *(Περιστροφή).* Ανανέωσε τα σύνολα δεικτών B και N. Υπολόγισε τη νέα αντίστροφη της βάσης $\overline{B}^{-1}$ και τα διανύσματα x_B και s_N. Πήγαινε στο Βήμα 1.

Παράδειγμα (1)

Να λυθεί το παρακάτω γραμμικό πρόβλημα

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\min & 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & & & & & & & & \\
\mu.\pi. & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & & & & & = & 6 \\
 & x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & & & & -x_5 & & & = & 5 \\
 & -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & & & & +x_6 & = & 10
\end{array}
$$

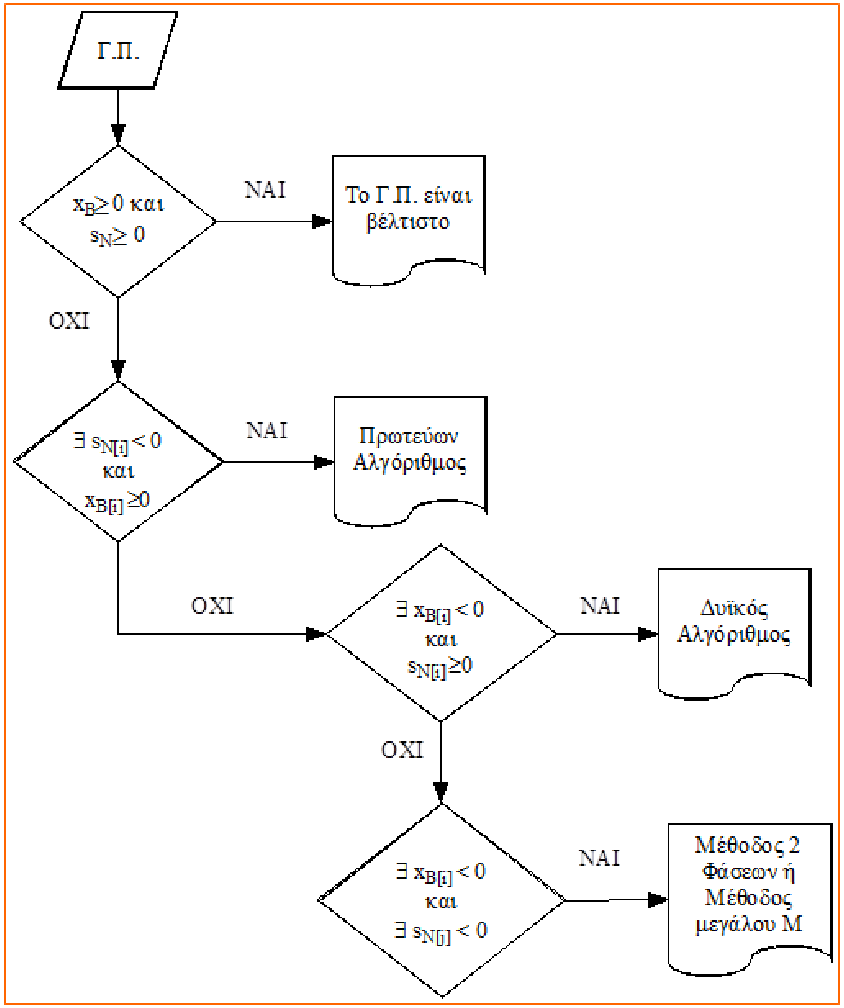
Παράδειγμα (2)

```
Δεδομένα του προβλήματος

c = [2   1   4   0   0   0]

A = [2   4   2  -1   0   0
     1  -2   6   0  -1   0
     1   2   3   0   0   1]

b =                      B = [4   5   6]
       6                 N = [1   2   3]
       5
      10
```

Παράδειγμα (3)

```
z =    11/2

solution_time =       0

niter =       2  (number of iterations)

B =      2             3             6

x_B =    13/14
          8/7
         33/7
```

Διαδικασία επιλογής αλγορίθμων



Τέλος Ενότητας