ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ & ΔΙΚΤΥΑΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Ενότητα 19: Επίλυση Γενικών Γραμμικών Προβλημάτων

Σαμαράς Νικόλαος

Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Μέθοδος Μεγάλου Μ (1)

Στη μέθοδο του μεγάλου Μ δεν λύνονται δύο διαφορετικά προβλήματα αλλά ένα τροποποιημένο πρόβλημα, από τη λύση του οποίου εξάγονται συμπεράσματα για τη λύση του αρχικού προβλήματος.

Το τροποποιημένο πρόβλημα, που ονομάζεται *πρόβλημα του μεγάλου Μ (big M problem),* έχει τις ίδιες μεταβλητές και τους ίδιους περιορισμούς με το (Τ.Γ.Π.) της Φάσης Ι.

Η μόνη διαφορά βρίσκεται στην αντικειμενική συνάρτηση, η οποία αποτελείται από δυο όρους. Ο ένας όρος είναι η αντικειμενική συνάρτηση του αρχικού προβλήματος. Ο άλλος όρος είναι η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος της Φάσης Ι πολλαπλασιασμένη με έναν πάρα πολύ μεγάλο αριθμό Μ.

Μέθοδος Μεγάλου Μ (2)

Το πρόβλημα του μεγάλου Μ, που προκύπτει από το (Α.Γ.Π.) σε μορφή μητρών είναι

$$\min \{c^T x + M x_{n+1} : Ax + d x_{n+1} = b,\ \ x \geq 0,\ x_{n+1} \geq 0\}\ (\text{Γ.Π.Μ})$$

και

$$d = -Be$$

Μια δυσκολία στην υλοποίηση της μεθόδου του μεγάλου Μ πηγάζει από την τάξη μεγέθους του αριθμού Μ.

Η τιμή του Μ μπορεί να υπολογιστεί σαν συνάρτηση των δεδομένων του (Α.Γ.Π.). Συνηθισμένες τιμές του Μ στην πράξη είναι $M = 10^{20}$ ή $M = 10^{30}$.

Μέθοδος Μεγάλου Μ (3)

Για να εξαχθούν σωστά συμπεράσματα για τη λύση του (Α.Γ.Π.) πρέπει ο αριθμός Μ να είναι τόσο μεγάλος ώστε να ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη

Συνθήκη. Έστω α, β, γ, δ αριθμοί που υπολογίζονται από τον αλγόριθμο simplex. Ο αριθμός Μ είναι τόσο μεγάλος ώστε να ισχύουν οι σχέσεις

$\alpha M + \beta = \gamma M + \delta$, αν $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$
$\alpha M + \beta > \gamma M + \delta$, αν $\alpha > \gamma$ ή $\alpha = \gamma$ και $\beta > \delta$
$\alpha M + \beta < \gamma M + \delta$, αν $\alpha < \gamma$ ή $\alpha = \gamma$ και $\beta < \delta$

Μέθοδος Μεγάλου Μ (4)

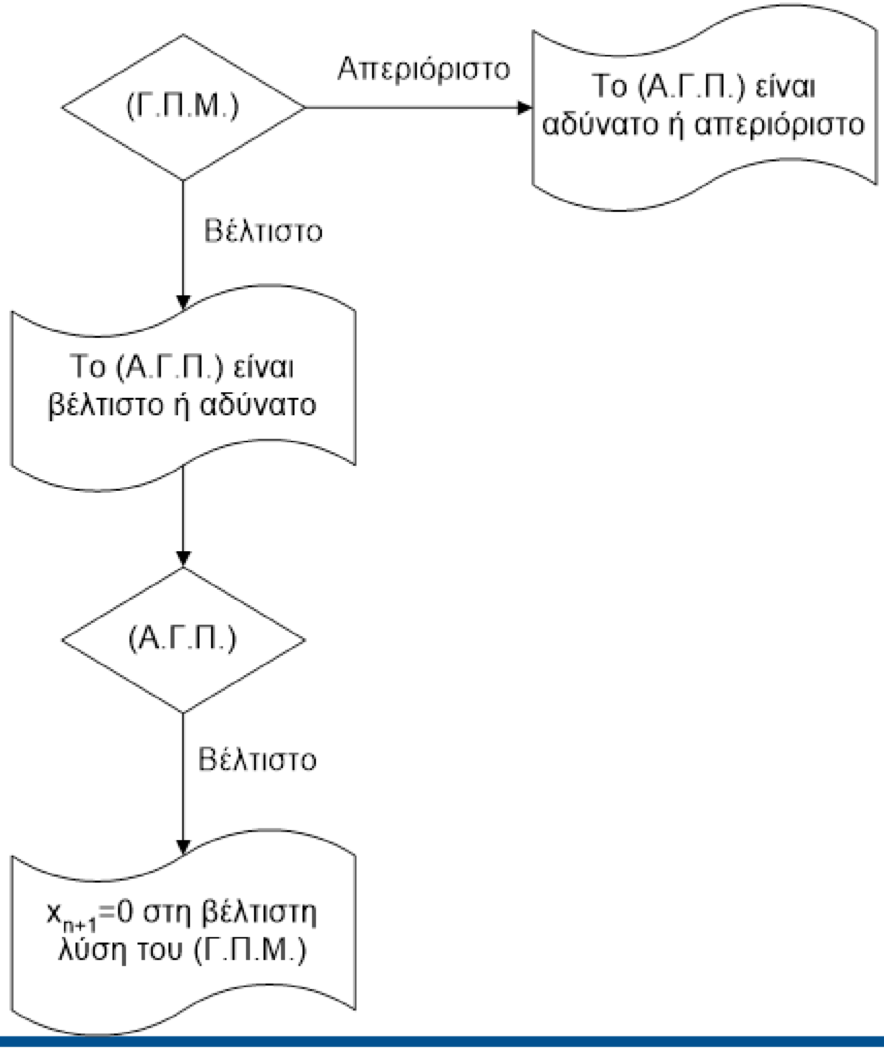
Θεώρημα 1. Έστω Μ ένας πολύ μεγάλος θετικός αριθμός, ο οποίος ικανοποιεί την προηγούμενη συνθήκη.

Αν το πρόβλημα (Γ.Π.Μ.) είναι απεριόριστο, τότε το (Α.Γ.Π.) είναι αδύνατο ή απεριόριστο.

Αν το πρόβλημα (Γ.Π.Μ.) είναι βέλτιστο, τότε το (Α.Γ.Π.) είναι βέλτιστο ή αδύνατο.

Τέλος, το (Α.Γ.Π.) είναι βέλτιστο, αν στη βέλτιστη λύση του προβλήματος (Γ.Π.Μ.) η τεχνητή μεταβλητή x_{n+1} είναι ίση με μηδέν.

Μέθοδος Μεγάλου Μ (5)



Μέθοδος Μεγάλου Μ (6)

Για αποφυγή του υπολογιστικού μειονεκτήματος της μεθόδου του μεγάλου Μ, είναι προτιμότερο να διασπαστεί η αντικειμενική συνάρτηση σε συντελεστές του Μ και σε σταθερούς όρους, όπως φαίνεται παρακάτω.

$$\bar{c}^T = (c^T, 0) \text{ και } \bar{\bar{c}}^T = [0\ 0\ \dots\ 0\ 1] \in \Re^{n+1}$$

$$\bar{w}^T = \bar{c}_B^T B^{-1} \text{ και } \bar{\bar{w}}^T = \bar{\bar{c}}_B^T B^{-1} \rightarrow \quad w^T = \bar{w}^T + \bar{\bar{w}}^T M$$

$$(\bar{s}_N)^T = \bar{c}_N^T - \bar{w}^T N \text{ και } (\bar{\bar{s}}_N)^T = \bar{\bar{c}}_N^T - \bar{\bar{w}}^T N \rightarrow$$

$$(s_N)^T = (\bar{s}_N)^T + (\bar{\bar{s}}_N)^T M$$

Μέθοδος Μεγάλου Μ (7)

Σύγκριση των αριθμών αM + β, γM + δ, όπου α, β, γ, δ είναι αριθμοί οι οποίοι υπολογίζονται από τη μέθοδο του μεγάλου Μ.

$$\alpha = \gamma \wedge \beta = \delta \;\Rightarrow\; \alpha M + \beta = \gamma M + \delta$$

$$\alpha > \gamma \;\vee\; (\alpha = \gamma \wedge \beta > \delta) \;\Rightarrow\; \alpha M + \beta > \gamma M + \delta$$

$$\alpha < \gamma \;\vee\; (\alpha = \gamma \wedge \beta < \delta) \;\Rightarrow\; \alpha M + \beta < \gamma M + \delta$$

Π.χ. 5M-8 = 5M-8, 3M+15>3M-1, 2M+100<2.001M-100000

Μέθοδος Μεγάλου Μ (8)

Το πρόβλημα του μεγάλου Μ σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση γράφεται

$$
\begin{array}{lllll}
\min & (\overline{c}^{T} + M\overline{\overline{c}})y & & & \\
\mu.\pi. & (A, d)y & = & b & \qquad (\Gamma.\Pi.\mathrm{M}.1) \\
 & y & \geq & 0 &
\end{array}
$$

όπου *M* είναι ένας πολύ μεγάλος θετικός αριθμός, $y^T = (x^T, x_{n+1})$ είναι οι μεταβλητές απόφασης και $d = -Be$

Μέθοδος Μεγάλου Μ (9)

ΒΗΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΜΕΘΟΔΟΥ ΜΕΓΑΛΟΥ Μ

Βήμα 0 *(Έλεγχος εφικτότητας).* Έστω μια αρχική βασική διαμέριση [B, N] του (Α.Γ.Π.). Υπολόγισε τη μήτρα B^{-1} και τα διανύσματα x_B, s_N. Αν ισχύει $x_B=B^{-1}b\geq 0$ πήγαινε στο Βήμα 3. Διαφορετικά, υπολόγισε τους συντελεστές d της μεταβλητής x_{n+1} από τη σχέση $d=-Be$ και σχημάτισε το (Γ.Π.Μ.1).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ.

Η αρχική βασική διαμέριση σχηματίζεται μετά την προσθήκη των χαλαρών μεταβλητών. Το σύνολο των χαλαρών μεταβλητών σχηματίζουν την πρώτη βάση (Β).

Μέθοδος Μεγάλου Μ (10)

<u>Βήμα 1</u> *(Περιστροφή).* Επέλεξε ως εισερχόμενη την τεχνητή μεταβλητή x_{n+1} και ως εξερχόμενη αυτή που προσδιορίζεται από τη σχέση

$$x_k = x_{B[r]} = \min\{x_{B[i]} : i = 1, 2, ..., m\}$$

Ανανέωσε τα σύνολα δεικτών, B, N σύμφωνα με τις σχέσεις

$$B \longleftarrow B \setminus \{k\} \cup \{n+1\},\ N \longleftarrow N \setminus \{n+1\} \cup \{k\}$$

Υπολόγισε τη στήλη περιστροφής από τη σχέση

$$h_{n+1} = B^{-1}A_{.,n+1}$$

και ανανέωσε τη νέα αντίστροφη της βάσης B^{-1} καθώς και τα διανύσματα x_B, s_N.

Μέθοδος Μεγάλου Μ (11)

Βήμα 2 *(Επίλυση Γ.Π.Μ.1.).* Χρησιμοποιώντας τη νέα βασική διαμέριση εφάρμοσε τον αναθεωρημένο αλγόριθμο simplex.

Βήμα 3 *(Επίλυση Α.Γ.Π.).* Τα συμπεράσματα για την επίλυση του (Α.Γ.Π.) προκύπτουν σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Θεωρήματος 1.

ΠΡΟΣΟΧΗ! Πρέπει κατά την επιλογή της εξερχόμενης μεταβλητής στο Βήμα 2, να δοθεί απόλυτη προτεραιότητα στη μεταβλητή x_{n+1}. Αν υπάρχουν δεσμοί στην επιλογή της εξερχόμενης μεταβλητής πρέπει να επιλεγεί ως εξερχόμενη αυτή με το μεγαλύτερο δείκτη.

Παράδειγμα (1)

Να λυθεί το παρακάτω γραμμικό πρόβλημα με τη μέθοδο του μεγάλου Μ.

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\min & & & x_2 & + & 10x_3 & & \\
\text{s.t.} & -2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & \leq & -4 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \geq & 5
\end{array}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 3$$

Παράδειγμα (2)

Το (Γ.Π.Μ) παίρνει τη μορφή

$$
\begin{array}{llllllllll}
\min & & x_2 & +10\,x_3 & & & Mx_6 & & \\
\text{μ.π.} & -2x_1 & -\ x_2 & +\ \ 4x_3 & +x_4 & & -x_6 & = & -4 \\
 & 3x_1 & +\ x_2 & -\ \ \ x_3 & & -x_5 & +x_6 & = & 5
\end{array}
$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

Όπου c = [0 1 10 0 0 M] οι συντελεστές κόστους της αντικειμενικής συνάρτησης του (Γ.Π.Μ)

Παράδειγμα (3)

Σε μορφή μητρών το πρόβλημα γράφεται

$$\overline{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 10 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \overline{\overline{c}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα (4)

Η διαμέριση B=[4 6] και N=[1 2 3 5] που προκύπτει μετά την πρώτη ειδική επανάληψη είναι εφικτή. Η διάσπαση της αντικειμενικής συνάρτησης σε συντελεστές του M και σε σταθερούς όρους, φαίνεται παρακάτω.

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 10 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{\bar{c}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{w}^T &= \bar{c}_B^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \overline{\overline{w}}^T &= \bar{\bar{c}}_B^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} w^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} M$$

$$w_1 = 0, w_2 = M$$

Παράδειγμα (5)

$$(\bar{s}_N)^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\bar{\bar{s}}_N)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(s_N)^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 10 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} M$$

Αναλυτικά οι συνιστώσες του s_N είναι

$s_1 = -3M$
$s_2 = -M + 1$
$s_3 = M + 10$
$s_5 = M$

Παράδειγμα (6)

<u>Επιλογή Εισερχόμενης Μεταβλητής.</u>

Η επιλογή της εισερχόμενης μεταβλητής γίνεται με τον κανόνα του Dantzig. Αρκεί να ελεγχθεί το για την πιο αρνητική τιμή. Σε ποια περίπτωση χρειάζεται ο έλεγχος για την επιλογή της εισερχόμενης να συμπεριλάβει και το $(\bar{s}_N)^T$?

Προκύπτει ότι l=N(t)=N(1)=1 και k=B(r)=B(1)=4.

Άρα η μεταβλητή x_1 είναι εισερχόμενη και η x_4 εξερχόμενη.

Η νέα βασική διαμέριση είναι B=[1 6] και N=[4 2 3 5].

Παράδειγμα (7)

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \left.\begin{aligned} \overline{w}^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \overline{\overline{w}}^T &= \begin{bmatrix} -3 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} w^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -2 \end{bmatrix} M$$

$$(\overline{s}_N)^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\overline{\overline{s}}_N)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -2 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 10 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(s_N)^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 10 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 & 10 & -2 \end{bmatrix} M$$

Παράδειγμα (8)

Προκύπτει ότι l=N(t)=N(4)=5 και k=B(r)=B(2)=6.

Άρα η μεταβλητή x_5 είναι εισερχόμενη και η x_6 εξερχόμενη.

Η νέα βασική διαμέριση είναι B=[1 5] και N=[4 2 3 6].

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ -3/2 & 1 \end{bmatrix}, \left.\begin{array}{l} \overline{w}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \overline{\overline{w}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}\right\} w^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} (\overline{s}_N)^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 10 & 0 \end{bmatrix} \\ (\overline{\overline{s}}_N)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\right\} s_N \geq 0$$

Παράδειγμα (9)

Επειδή $s_N \geq 0$, η τρέχουσα εφικτή λύση είναι βέλτιστη για το (Γ.Π.Μ).

Επειδή η τεχνητή μεταβλητή $x_6=0$, σύμφωνα με το Θεώρημα 1 το (Α.Γ.Π) είναι βέλτιστο.

Η βέλτιστη βασική διαμέριση είναι B=[1 5] και N=[4 2 3 6]

Ασκήσεις

Να λυθούν με τη μέθοδο του μεγάλου Μ τα παρακάτω Γ.Π.

$$\begin{array}{llllll}
\min & +2x_1 & -x_2 & -3x_3 & +x_4 & \\
\text{μ.π.} & -x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -x_4 & \geq 4 \\
 & -5x_1 & -x_2 & -x_3 & +2x_4 & \leq -13 \\
 & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
\min & z = -2x_1 & + x_2 & - 4x_3 & \\
\text{μ.π.} & 2x_1 & + 3x_2 & - x_3 & \geq 5 \\
 & 3x_1 & + x_2 & + 2x_3 & \geq 2 \\
 & 5x_1 & + 4x_2 & + x_3 & \leq 6 \\
 & x_j \geq 0, & (j = 1, 2, 3) & &
\end{array}$$

Άσκηση

Περιγράψτε γιατί η μέθοδος δύο Φάσεων συμπίπτει με τη μέθοδο του μεγάλου Μ, όταν η δεύτερη υλοποιείται χωρίς να δίνεται συγκεκριμένη τιμή στο Μ.

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ