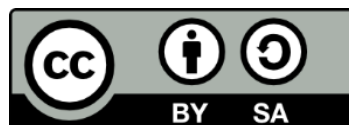


ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ & ΔΙΚΤΥΑΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Ενότητα 18: Επίλυση Γενικών Γραμμικών Προβλημάτων

Σαμαράς Νικόλαος

Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
Πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



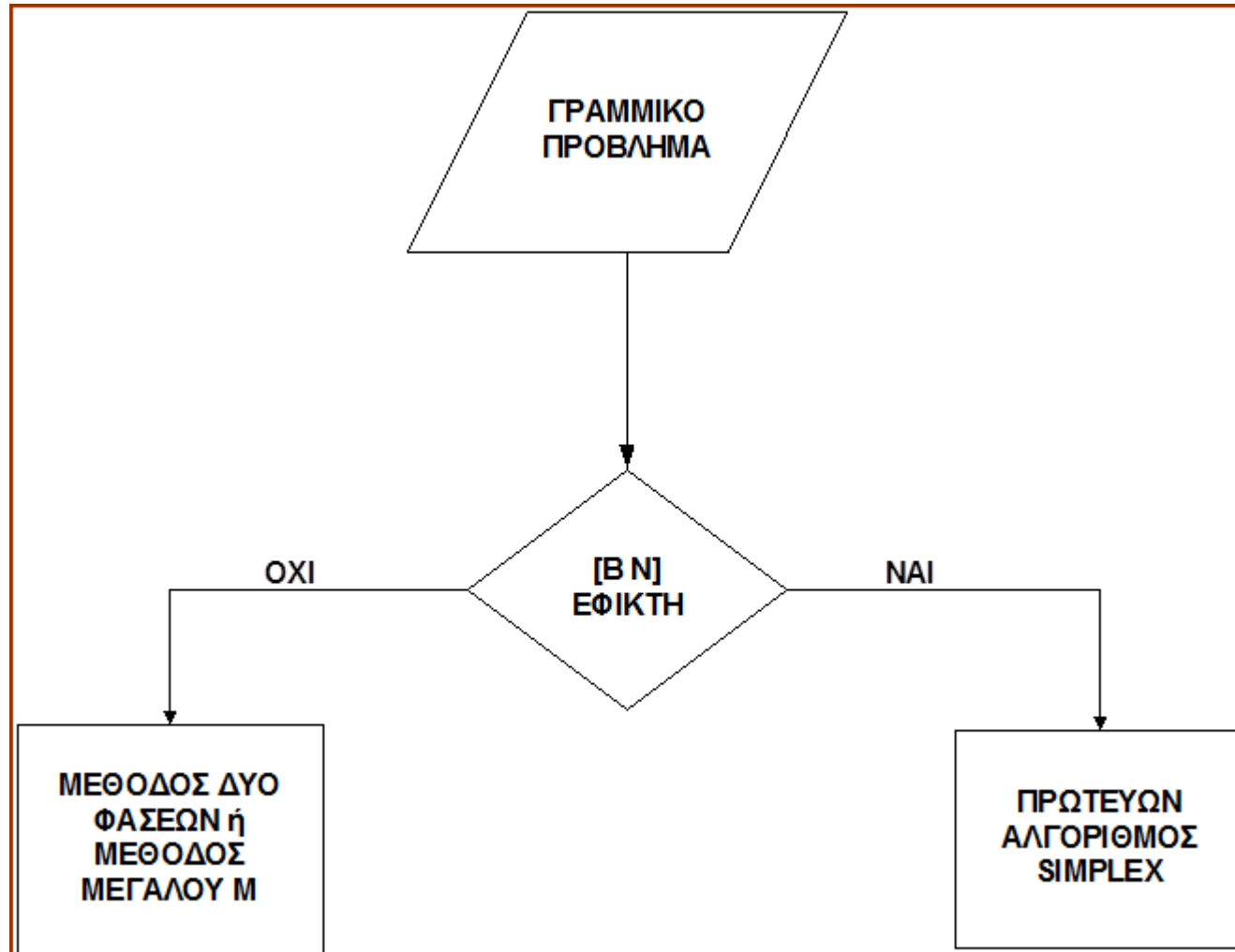
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

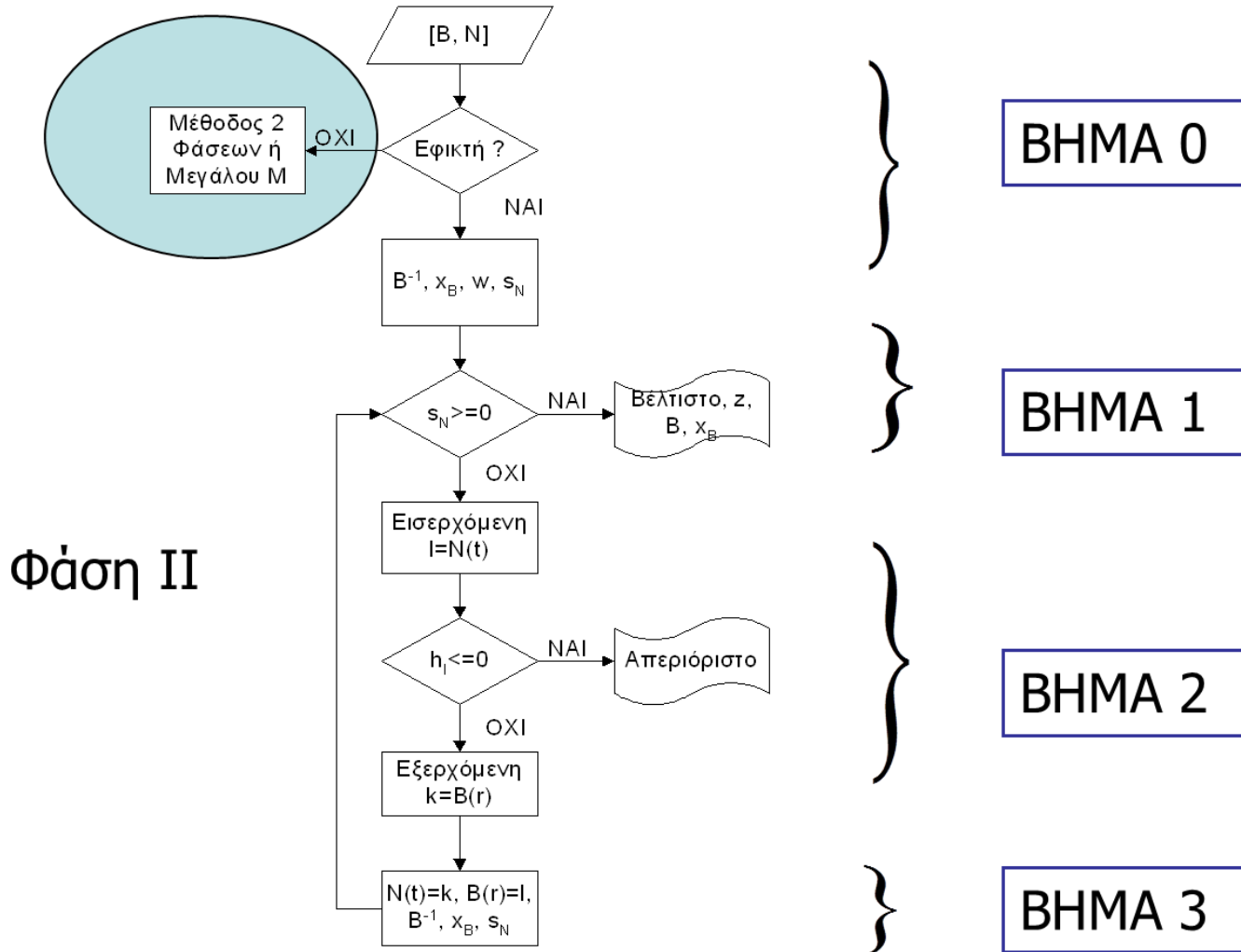


ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Επίλυση Γενικών Γραμμικών Προβλημάτων



Διάγραμμα Ροής Simplex



Μέθοδος Δύο Φάσεων (1)

Ξεκινά με μια οποιαδήποτε βασική διαμέριση $[B, N]$

Αν $x=(x_B, x_N)=x_B \geq 0 \rightarrow$ Αλγόριθμος Simplex

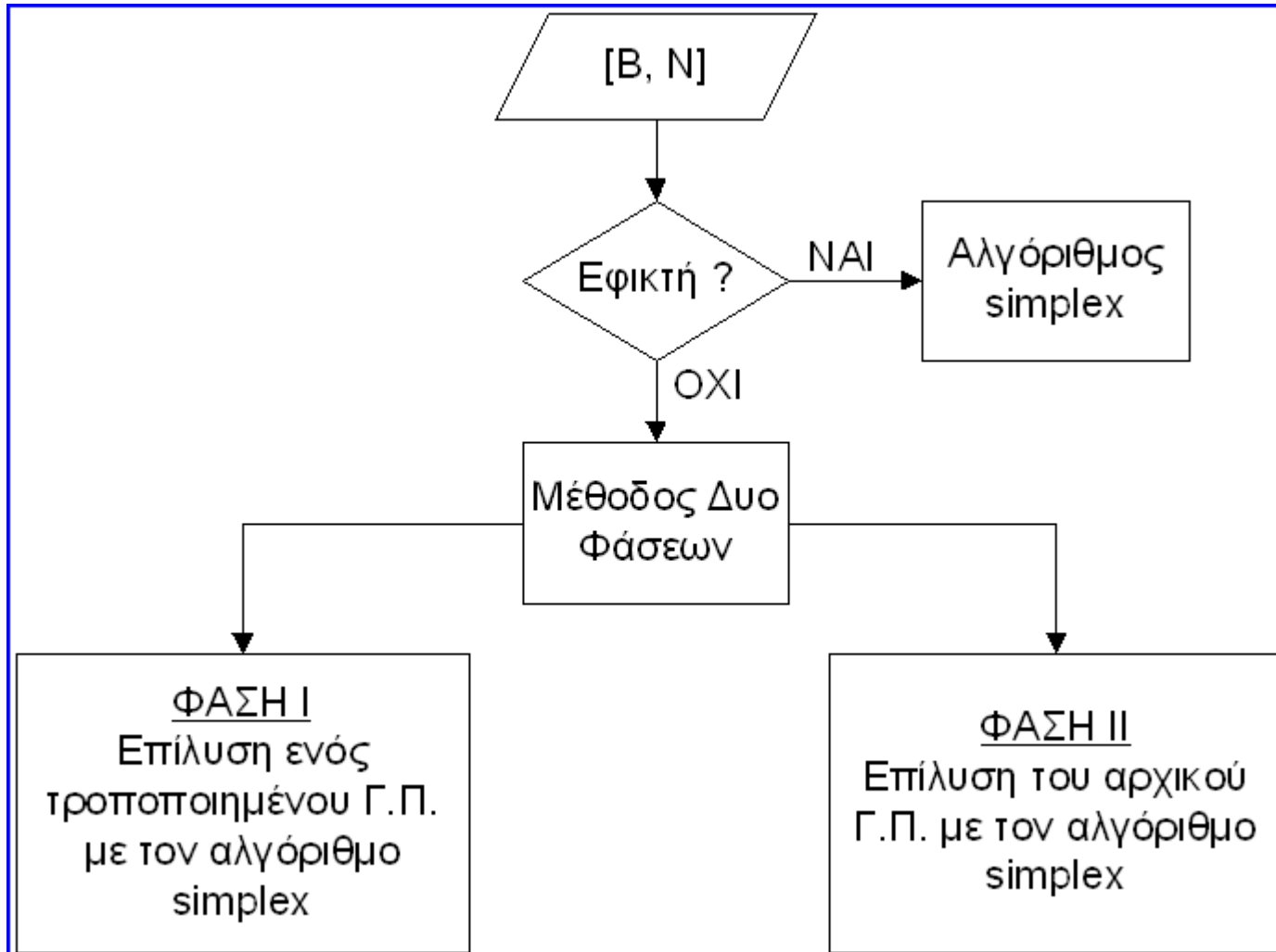
Διαφορετικά, πρέπει να υπολογιστεί μια βασική εφικτή διαμέριση

Στη μέθοδο των δυο Φάσεων εφαρμόζεται ο πρωτεύων αλγόριθμος simplex δυο φορές.

Στη Φάση I λύνεται ένα τροποποιημένο γραμμικό πρόβλημα

Στη Φάση II λύνεται το αρχικό γραμμικό πρόβλημα

Μέθοδος Δύο Φάσεων (2)



Μέθοδος Δύο Φάσεων (3)

Στη Φάση Ι λύνεται το ακόλουθο Γ.Π. με τον αλγόριθμο simplex

$$\begin{array}{ll} \min & x_{n+1} \\ \mu.π. & Ax + dx_{n+1} = b \quad (\text{Τ.Γ.Π.}) \\ & x, x_{n+1} \geq 0 \end{array}$$

Όπου $d = -Be$ και $e^T = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$, $|e|=m$

και

x_{n+1} τεχνητή μεταβλητή

Τεχνική της μιας τεχνητής μεταβλητής (Single Artificial Variable)

Μέθοδος Δύο Φάσεων (4)

Συντελεστές κόστους του (Τ.Γ.Π.)

$$f_j = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad \text{και} \quad f_{n+1} = 1$$

Στη Φάση II λύνεται το ακόλουθο Γ.Π. με τον αλγόριθμο simplex

$$\begin{array}{ll} \min & z = c^T x \\ \mu.π. & Ax = b \quad (\text{Α.Γ.Π.}) \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Μέθοδος Δύο Φάσεων (5)

Θεώρημα: Αν η βάση B δεν είναι εφικτή στο πρόβλημα (Α.Γ.Π.), τότε η βάση $B \sim B(r) \cup \{n+1\}$ είναι εφικτή στο πρόβλημα (Τ.Γ.Π.), όπου ο δείκτης r προσδιορίζεται από τη παρακάτω σχέση

$$(B^{-1}b)_r = \min \{(B^{-1}b)_i : i = 1, 2, \dots, m\}$$

Π.χ.

$$x_B = \begin{array}{c} i \\ \left[\begin{array}{c} -5 \\ 8 \\ -12 \\ -3 \end{array} \right] \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{aligned} (B^{-1}b)_r &= \min \{(B^{-1}b)_i : i = 1, \dots, 4\} \\ &= \min \{-5, 8, -12, -3\} = -12 \end{aligned}$$

$$(B^{-1}b)_r = (B^{-1}b)_i = (B^{-1}b)_3$$

$$\text{Άρα } r = i = 3$$

Μέθοδος Δύο Φάσεων (6)

Έστω (x, x_{n+1}) βέλτιστη λύση του (Τ.Γ.Π). Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

A). $x_{n+1} > 0 \rightarrow$ Το (Α.Γ.Π.) είναι αδύνατο.

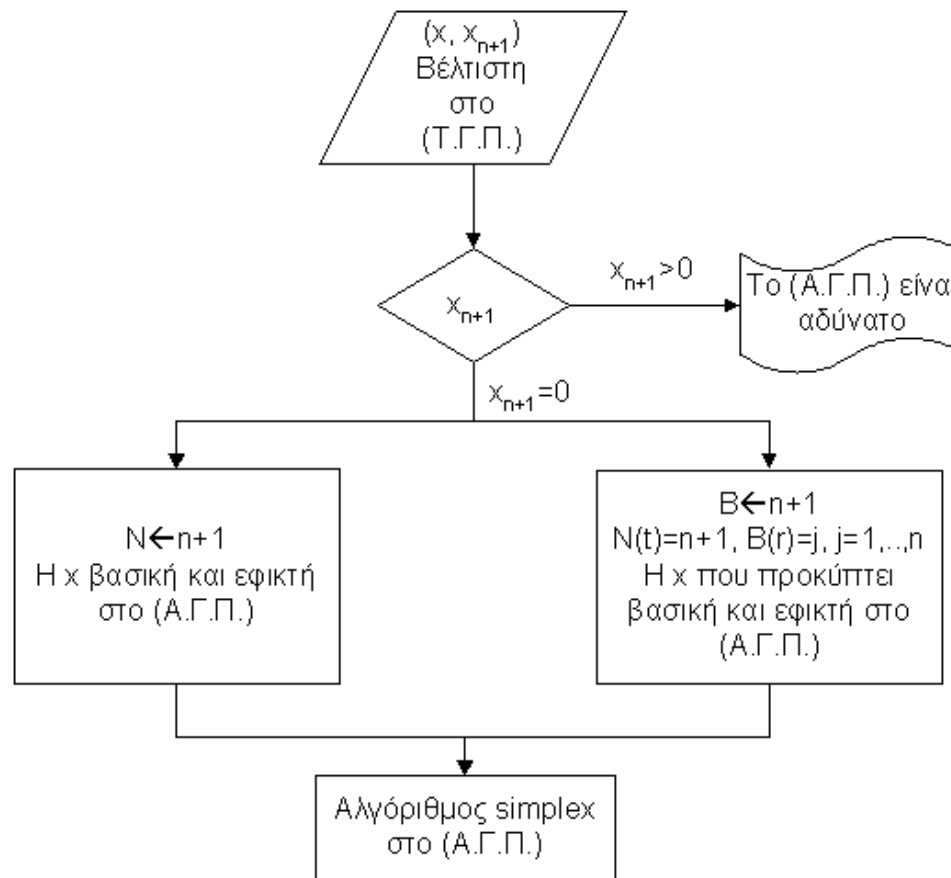
B). $x_{n+1} = 0$. Διακρίνουμε δυο υποπεριπτώσεις.

1). $n+1 \in N$, η λύση x είναι βασική και εφικτή στο (Α.Γ.Π.). Η λύση αυτή χρησιμοποιείται ως αρχική βασική διαμέριση του αλγορίθμου simplex για το (Α.Γ.Π.) στη Φάση II.

2). $n+1 \in B$, πραγματοποιείται μια περιστροφή. Εξερχόμενη μεταβλητή η x_{n+1} και εισερχόμενη επιλέγεται μια τυχαία. Η λύση x που προκύπτει μετά από την περιστροφή είναι βασική και εφικτή στο πρόβλημα (Α.Γ.Π.). Η λύση αυτή χρησιμοποιείται ως αρχική βασική διαμέριση του αλγορίθμου simplex για το πρόβλημα (Α.Γ.Π.) στη Φάση II.

Μέθοδος Δύο Φάσεων (7)

Σταμάτημα μεθόδου δυο Φάσεων. Μετάβαση στη Φάση II.



Μέθοδος Δύο Φάσεων (8)

ΒΗΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΜΕΘΟΔΟΥ ΔΥΟ ΦΑΣΕΩΝ

Βήμα 0 (Έλεγχος εφικτότητας). Έστω μια αρχική βασική διαμέριση $[B, N]$ του (Α.Γ.Π.). Υπολόγισε τη μήτρα B^{-1} και τα διανύσματα x_B, s_N . Αν ισχύει $x_B = B^{-1}b \geq 0$ πήγαινε στο Βήμα 3. Διαφορετικά, υπολόγισε τους συντελεστές d της μεταβλητής x_{n+1} από τη σχέση $d = -Be$ και σχημάτισε το (Τ.Γ.Π.).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ.

Η αρχική βασική διαμέριση σχηματίζεται μετά την προσθήκη των χαλαρών μεταβλητών. Το σύνολο των χαλαρών μεταβλητών σχηματίζουν την πρώτη βάση (B).

Μέθοδος Δύο Φάσεων (9)

Βήμα 1 (Περιστροφή). Επέλεξε ως εισερχόμενη την τεχνητή μεταβλητή x_{n+1} και ως εξερχόμενη αυτή που προσδιορίζεται από τη σχέση

$$x_k = x_{B[r]} = \min\{x_{B[i]} : i = 1, 2, \dots, m\}$$

Ανανέωσε τα σύνολα δεικτών, B , N σύμφωνα με τις σχέσεις

$$B \longleftarrow B \setminus \{k\} \cup \{n+1\}, N \longleftarrow N \setminus \{n+1\} \cup \{k\}$$

Υπολόγισε τη στήλη περιστροφής από τη σχέση

$$h_{n+1} = B^{-1}A_{\cdot, n+1}$$

και ανανέωσε τη νέα αντίστροφη της βάσης B^{-1} καθώς και τα διανύσματα x_B , s_N .

Μέθοδος Δύο Φάσεων (10)

Βήμα 2 (Φάση I). Χρησιμοποιώντας τη νέα βασική διαμέριση εφαρμόσε τον αναθεωρημένο αλγόριθμο simplex. Αν στη βέλτιστη λύση ισχύει $x_{n+1} > 0$, STOP, το (Α.Γ.Π.) είναι αδύνατο. Διαφορετικά, διέγραψε τη x_{n+1} και πήγαινε στο βήμα 3.

Βήμα 3 (Φάση II). Χρησιμοποιώντας τη βασική εφικτή διαμέριση (B, N), που προέκυψε από τη Φάση I ή από το Βήμα 1 εφαρμόσε τον αναθεωρημένο αλγόριθμο simplex στο (Α.Γ.Π.).

ΠΡΟΣΟΧΗ! Πρέπει κατά την επιλογή της εξερχόμενης μεταβλητής στη Φάση 1, να δοθεί απόλυτη προτεραιότητα στη μεταβλητή x_{n+1} . Έτσι, όταν υπάρχουν δεσμοί, κατασκευάζεται εφικτή βάση του αρχικού προβλήματος στην περίπτωση που αυτό είναι εφικτό.

Να λυθεί το παρακάτω γραμμικό πρόβλημα.

$$\begin{array}{ll} \min & x_2 + 10x_3 \\ \text{s.t.} & -2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq -4 \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 \geq 5 \\ & x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 3 \end{array}$$

Παράδειγμα (2)

Μετά την προσθήκη των χαλαρών μεταβλητών το γραμμικό πρόβλημα παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \min \quad & x_2 + 10x_3 \\ \text{μ.π.} \quad & -2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = -4 \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 5 \\ x_j \geq 0 \quad & (j = 1, 2, 3, 4, 5) \end{aligned}$$

Παράδειγμα (3)

Σε μορφή μητρών το γραμμικό πρόβλημα γράφεται

$$c = [0 \quad 1 \quad 10 \quad 0 \quad 0]$$
$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Αρχική βασική διαμέριση

$$B=[4 \quad 5] \text{ και } N=[1 \quad 2 \quad 3]$$

Παράδειγμα (4)

Το (Τ.Γ.Π.) της Φάσης Ι παίρνει τη μορφή

$$\begin{array}{r} \min \\ \text{μ.π.} \end{array} \begin{array}{r} -2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \end{array} \begin{array}{r} x_6 \\ -x_6 \\ -x_5 + x_6 \end{array} = \begin{array}{r} -4 \\ 5 \end{array}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

Όπου $f = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$ οι συντελεστές κόστους της αντικειμενικής συνάρτησης του (Τ.Γ.Π)

Παράδειγμα (5)

Σε μορφή μητρών το (Τ.Γ.Π.) γράφεται

$$f = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Άσκησης

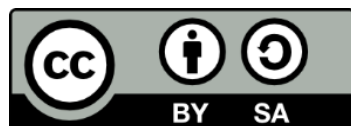
$$\begin{array}{llllll} \min & x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 3 \\ & -x_1 & + & x_2 & & & \geq & 2 \\ & -x_1 & + & 5x_2 & & & \leq & 4 \\ & & & & & & & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} \min & -x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 \\ \text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\ & -x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & \leq & -2 \\ & 3x_1 & + & 4x_2 & - & 9x_3 & \leq & 0 \\ & & & & & & & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{array}$$

Υπολογιστική Μελέτη

Density 10%	PSA		
	nnz	Niter	Cpu
500x500	23745.6	13801.7	660.24
600x600	34194.9	18963.3	1267.36
700x700	46560.5	25379.6	2222.72
800x800	60824.2	37504.2	4125.46
900x900	76915.5	54003.1	7560.43
1000x1000	94974.0	71488.7	12153.08

Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
Πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ