ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ & ΔΙΚΤΥΑΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Ενότητα 15: Κύκλωση – Δεσμοί, Κανόνες Περιστροφής

Σαμαράς Νικόλαος

Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άσκηση (1)

Να λυθεί το παρακάτω γραμμικό πρόβλημα

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = x_1 - x_2 - x_3 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq -4 \\
& 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2 \\
& 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\
& x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3
\end{aligned}
$$

Άσκηση (2)

Μετά την προσθήκη των χαλαρών μεταβλητών το γραμμικό πρόβλημα το οποίο θα λυθεί σε μορφή μητρών είναι

$$c^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Υπολογιστική Μελέτη

Density 2.5%	nnz	Niter	Cpu
100x100	246.5	12.4	0.05
150x150	555.8	44.2	0.21
200x200	986.8	113.4	1.02
250x250	1541.5	433.5	7.38
300x300	2216.7	783.2	19.42
350x350	3022.6	2579.0	86.29
400x400	3942.8	4133.9	173.78
450x450	4993.8	7304.0	370.40
500x500	6158.6	11600.2	740.05

Εργασία 03 (Θεωρητική)

Έστω ότι στην u επανάληψη η μεταβλητή x_k εξέρχεται της βάσης. Να αποδείξετε ότι στην αμέσως επόμενη επανάληψη (u+1), δεν μπορεί να επιλεγεί η μεταβλητή x_k ως εισερχόμενη.

Κύκλωση – Δεσμοί

<u>Κύκλωση.</u> Αν μια βάση κατασκευαστεί δυο φορές (B_1=B_q), τότε προκύπτει αμέσως ότι θα υπάρξει μια πεπερασμένη ακολουθία βάσεων

$$B_1 , B_2 , ..., B_q$$

η οποία θα επαναλαμβάνεται άπειρες φορές και επομένως ο αλγόριθμος δεν θα σταματήσει ποτέ.

<u>Δεσμοί.</u> Αν κατά την επιλογή της εισερχόμενης ή/και της εξερχόμενης οι επιλέξιμοι δείκτες είναι περισσότεροι από ένας. Στην περίπτωση αυτή η επιλογή της εισερχόμενης ή/και της εξερχόμενης πρέπει να γίνει με προσοχή!

Παράδειγμα Κύκλωσης

$$\begin{array}{llllllllll}
\min & & & & -\frac{3}{4}x_4 & +20x_5 & -\frac{1}{2}x_6 & +6x_7 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & & & +\frac{1}{4}x_4 & -8x_5 & -x_6 & +9x_7 & = & 0 \\
 & & x_2 & & +\frac{1}{2}x_4 & -12x_5 & -\frac{1}{2}x_6 & +3x_7 & = & 0 \\
 & & & x_3 & & & +x_6 & & = & 1
\end{array}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

Beale, E.M.L. "Cycling in the dual simplex algorithm", Naval Research Quarterly, Vol. 2(4), pp. 269-276, 1955

Παράδειγμα με Δεσμούς (1)

Να λυθεί το παρακάτω γραμμικό πρόβλημα

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & & \\
\mu.\pi. & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\
 & 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 16 \\
 & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \leq & 9 \\
 & & & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & &
\end{array}
$$

Παράδειγμα με Δεσμούς (2)

Μετά την προσθήκη των χαλαρών μεταβλητών και τη μετατροπή σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης το γραμμικό πρόβλημα σε μορφή μητρών γράφεται

```
c =

    -5     -4     -5      0      0      0

A =                                          b =

     2      3      1      1      0      0          6
     4      1      2      0      1      0         16
     3      4      2      0      0      1          9
```

Κανόνες Περιστροφής (1)

Κανόνας του Dantzig ή του ελαχίστου στοιχείου (maximum coefficient rule)

Ο κανόνας αυτός κάνει κύκλωση αλλά έχει αποδειχτεί ικανοποιητικά αποτελεσματικός στην πράξη.

Κανόνας της μέγιστης βελτίωσης (maximum improvement rule)

Για κάθε μη βασική μεταβλητή x_j: $s_j < 0$, υπολογίζεται η ελάττωση της αντικειμενικής τιμής κάτω από την προϋπόθεση ότι η x_j είναι εισερχόμενη. Εισερχόμενη αυτή που επιφέρει την μέγιστη ελάττωση στην αντικειμενική τιμή. Ο κανόνας αυτός πετυχαίνει σημαντική ελάττωση του αριθμού των επαναλήψεων, όχι όμως και του μέσου χρόνου επίλυσης.

Κανόνες Περιστροφής (2)

Κανόνας του ελάχιστου δείκτη ή κανόνας του Bland (least index rule)
Ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του είναι ότι αντιμετωπίζει την κύκλωση. Δεν είναι αποτελεσματικός στην πράξη.

Κανόνας της στοίβας (stack rule)
Οι μη βασικές και βασικές μεταβλητές τοποθετούνται σε στοίβες. Η εισερχόμενη (εξερχόμενη) μεταβλητή είναι πρώτη επιλέξιμη μεταβλητή της στοίβας των μη βασικών μεταβλητών (των βασικών μεταβλητών). Υπενθυμίζεται εδώ ότι στοίβες λειτουργούν με τον κανόνα LIFO (Last In First Out). Ο κανόνας αυτός δεν κάνει κύκλωση. Δεν είναι αποτελεσματικός στην πράξη.

Κανόνες Περιστροφής (3)

Κανόνας ουράς (queue rule)

Όπως και στη στοίβα, οι μεταβλητές τοποθετούνται σε μια ουρά. Ας πάρουμε για παράδειγμα την ουρά των μη βασικών μεταβλητών. Εισερχόμενη μεταβλητή είναι η πρώτη επιλέξιμη. Η μεταβλητή που εξέρχεται από τη βάση τοποθετείται τελευταία στην ουρά. Ο κανόνας αυτός αποδείχτηκε πολύ σκληρός για τον προσδιορισμό της πολυπλοκότητάς του. Η ουρά υλοποιεί τον κανόνα FIFO (First In First Out).

Κανόνες Περιστροφής (4)

<u>Κανόνας μερικής αποτίμησης (partial pricing rule)</u>

Στα πρακτικά προβλήματα το πλήθος των μεταβλητών n είναι συνήθως πολύ μεγαλύτερο του πλήθους των περιορισμών m. Σε αυτήν την περίπτωση δεν είναι αποτελεσματικό υπολογιστικά να υπολογίσουμε όλα τα s_j. Στον κανόνα της μερικής αποτίμησης οι μεταβλητές χωρίζονται σε ισοπληθείς ομάδες. Υπολογίζονται τα s_j της πρώτης ομάδας και αν βρεθεί αρνητικό s_j, επιλέγεται κάποια εισερχόμενη μεταβλητή από τις μεταβλητές της πρώτης ομάδας. Αν είναι $s_j \geq 0$ για όλες τις μεταβλητές της πρώτης ομάδας πάμε στη δεύτερη ομάδα, κ.ο.κ.

Κανόνες Περιστροφής (5)

<u>Κανόνας της πιο κατηφορικής ακμής (steepest edge rule)</u>

Σε κάθε μη βασική μεταβλητή x_j, $j \in N$ αντιστοιχεί μια κατεύθυνση κίνησης d_j. Από τις βελτιώνουσες κατευθύνσεις d_j επιλέγεται εκείνη η οποία σχηματίζει την πιο μικρή γωνία με το διάνυσμα $-c$. Δηλαδή, αν φ_j είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα c και d_j ($j \in N$ και $s_j<0$) τότε

$$\text{συν}\varphi_l=\max\{\text{συν}\varphi_j : j \in N \text{ και } s_j<0\}$$

Αυτός ο κανόνας περιστροφής είναι αποτελεσματικός στην πράξη.

Υπολογιστική Μελέτη

Problem	Size	Dantzig	Bland	Stack	Queue	GIM	Partial	SE
25fv47	788x1541	7.742	-	-	-	-	-	**1.630**
agg3	514x301	150	281	382	254	174	260	**137**
bandm	243x398	588	1.695	2.217	1.443	271	1.163	**261**
bnl1	618x1169	4.300	35.678	-	-	1.516	12.220	**844**
degen3	1501x1818	11.879	-	-	-	-	-	**1.735**
e226	199x266	511	2.833	1.672	2.031	320	1.516	**235**
scfxm3	915x1293	1.223	7.731	-	4.796	2.445	4.550	**786**
scorpion	317x324	115	155	191	169	126	143	**111**
scsd8	397x2750	4.771	-	-	-	-	-	**1.491**
sctap3	1408x2480	2.695	2.448	2.983	2.473	1.707	3.603	**617**
osa-07	1081x23949	1.026	6.342	3.221	3.997	**840**	6.821	-

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ