ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ & ΔΙΚΤΥΑΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Ενότητα 13: Μεθοδολογία Αλγορίθμων τύπου Simplex, Αναθεωρημένος Πρωτεύων Αλγόριθμος Simplex

Σαμαράς Νικόλαος

Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Συνθήκη Βελτιστότητας

Θεώρημα. Έστω (B, N) μια βασική διαμέριση του προβλήματος

$$\min \{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$$

Η αντίστοιχη βασική λύση (x_B, x_N) είναι βέλτιστη, αν είναι $x_B \geq 0$ και $s_N \geq 0$.

Συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας (complementarity slackness conditions).

$$x_j s_j = 0, \qquad (j = 1,2, \ldots, n)$$

Υπολογισμός Αντικειμενικής Συνάρτησης

Η αντικειμενική τιμή σαν συνάρτηση των μη βασικών μεταβλητών δίνεται από τη σχέση

$$c^T x = (c_B)^T x_B + (c_N)^T x_N =$$

$$= (c_B)^T (B^{-1} b - B^{-1} N\, x_N) + (c_N)^T x_N =$$

$$= (c_B)^T B^{-1} b + ((c_N)^T - (c_B)^T B^{-1} N) x_N =$$

$$= w^T b + (s_N)^T x_N = w^T b$$

Παράδειγμα

Δίνεται το γραμμικό πρόβλημα

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\min & 2x_1 & + & 4x_2 & & & & & & & & \\
\text{μ.π.} & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & & & = & 6 \\
 & -x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 3 \\
 & x_1 & + & 4x_2 & & & & & + & x_5 & = & 4
\end{array}
$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0$$

Δίνεται επίσης η βάση του B = [1, 4, 2]. Να υπολογιστεί η αντίστοιχη βασική λύση (x_B, x_N) και τα διανύσματα w και s. Είναι η βασική λύση βέλτιστη;

Μεθοδολογία αλγορίθμων τύπου simplex (1)

Κάθε αλγόριθμος τύπου simplex κατασκευάζει μια πεπερασμένη ακολουθία βασικών λύσεων. Αν η αντίστοιχη βασική λύση (x_B, x_N) είναι βέλτιστη, οι υπολογισμοί σταματούν.

Διαφορετικά, γίνεται προσπάθεια να βρεθούν δυο δείκτες $k \in B$ και $l \in N$. Αν η προσπάθεια αυτή δεν είναι επιτυχής, οι υπολογισμοί σταματούν.

Διαφορετικά, οι δείκτες k και l αλλάζουν σύνολα δεικτών. Ο δείκτης k από βασικός γίνεται μη βασικός και ο δείκτης l από μη βασικός γίνεται βασικός.

Κατασκευάζεται έτσι μια νέα βάση και η διαδικασία επαναλαμβάνεται.

Μεθοδολογία αλγορίθμων τύπου simplex (2)

Η εναλλαγή των δεικτών k και l ονομάζεται *περιστροφή (pivoting)*. Η μεταβλητή x_l ονομάζεται εισερχόμενη μεταβλητή ενώ η μεταβλητή x_k εξερχόμενη μεταβλητή.

Ο δείκτης της εισερχόμενης μεταβλητής βρίσκεται στη θέση t του συνόλου N, ενώ ο δείκτης της εξερχόμενης μεταβλητής βρίσκεται στη θέση r του συνόλου B. Ισχύουν δηλ. οι σχέσεις

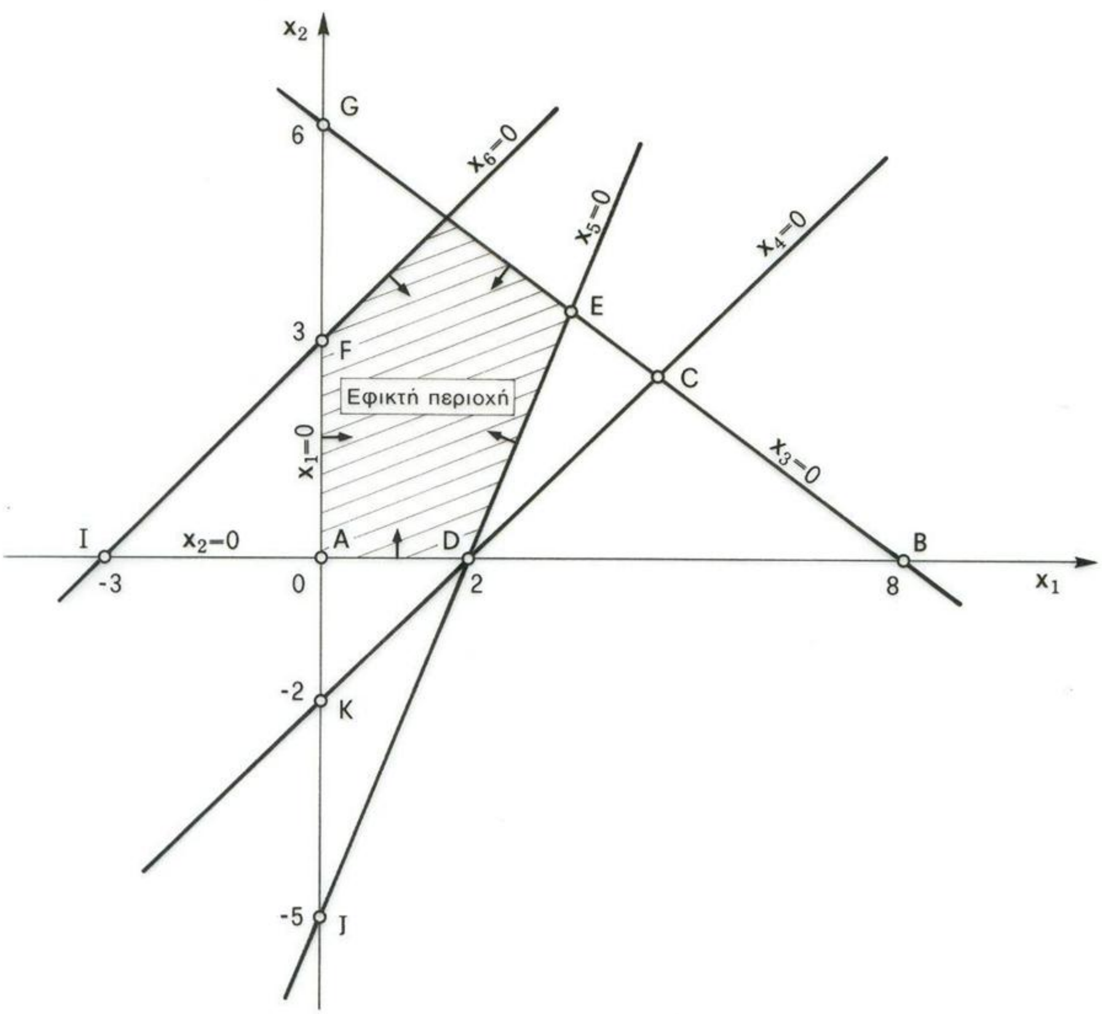
$$N(t)=l \quad \text{και} \quad B(r)=k$$

Η ανανέωση των συνόλων B και N γίνεται θέτοντας

$$N(t)=k \quad \text{και} \quad B(r)=l$$

Δυο βάσεις είναι γειτονικές αν διαφέρουν μόνο ως προς έναν δείκτη.

Μεθοδολογία αλγορίθμων τύπου simplex (3)



Πόσα είναι τα γειτονικά βασικά σημεία του σημείου Α?

Να γραφτούν τα αντίστοιχα σύνολα των μη βασικών δεικτών.

Μεθοδολογία αλγορίθμων τύπου simplex (4)

Γειτονικά σημεία του σημείου Α

N	[3, 2]	[4, 2]	[5, 2]	[6, 2]	[1, 3]	[1, 4]	[1, 5]	[1, 6]
Σημείο	B	D	D	I	G	K	J	F

Στασιμότητα (stalling) – Υπολογιστικό Μειονέκτημα

Σε κάθε βασική διαμέριση (B,N) αντιστοιχούν n-m βασικές κατευθύνσεις, μια για κάθε δείκτη $l \in N$. Οι συνιστώσες μιας βασικής κατεύθυνσης d, ικανοποιούν τις σχέσεις

$$d_B = -B^{-1}A_{.l}, \quad d_l = 1 \text{ και } d_j = 0 \text{ για } j \in N \sim \{l\}$$

Παράδειγμα

Δίνεται το παρακάτω γραμμικό πρόβλημα στην κανονική μορφή

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Δίνεται επίσης η βάση B=[3, 1]. Να υπολογιστούν οι βασικές κατευθύνσεις που ορίζονται από την παραπάνω βάση.

Μεθοδολογία αλγορίθμων τύπου simplex (5)

<u>Βήμα 0:</u> *Αρχικοποίηση (Initialization).* Στο βήμα αυτό υπολογίζονται όλες οι μεταβλητές οι οποίες είναι απαραίτητες για να αρχίσει να εκτελείται ο αλγόριθμος.

<u>Βήμα 1:</u> *Έλεγχος βελτιστότητας (Test of Optimality).* Πραγματοποίηση ελέγχου βελτιστότητας για το τρέχον βασικό σημείο. Αν αυτό είναι βέλτιστο, τότε οι υπολογισμοί σταματούν και τερματίζεται οι αλγόριθμος.

Μεθοδολογία αλγορίθμων τύπου simplex (6)

Βήμα 2: *Επιλογή εισερχόμενης και εξερχόμενης μεταβλητής (Choice of Entering and Leaving Variable).* Η επιλογή της εισερχόμενης και εξερχόμενης μεταβλητής μπορεί να γίνει εφαρμόζοντας διαφορετικούς κανόνες περιστροφής. Αν δεν μπορεί να επιλεγεί η εξερχόμενη μεταβλητή τότε το Γ.Π. είναι απεριόριστο. Η ανταλλαγή αυτή των μεταβλητών γεωμετρικά σημαίνει μετακίνηση από ένα βασικό σημείο σε ένα άλλο γειτονικό.

Βήμα 3: *Περιστροφή (Pivoting).* Στο βήμα αυτό υπολογίζεται η νέα βάση, οι τιμές των βασικών μεταβλητών καθώς και οι δυϊκές και οι δυϊκές χαλαρές μεταβλητές.

Αναθεωρημένος Πρωτεύων Αλγόριθμος Simplex (1)

Πράξεις	**Κλασική**	**Αναθεωρημένη**
Πολ/σμοί Διαιρέσεις	$m(n - m) + n + 1$	$m(n + 2) + 1$
Προσθέσεις Αφαιρέσεις	$m(n - m + 1)$	$m(n + 1)$
Σύνολο	$n(2m + 1) - m(2m - 1) + 1$	$m(2n + 3) +1$

	Κλασική	**Αναθεωρημένη**
Μνήμη	$O(mn)$	$O(m^2)$
Καλύτερη Περίπτωση	$O(mn)$	$O(m^2)$
Χειρότερη Περίπτωση	$O(mn)$	$O(mn)$

Αναθεωρημένος Πρωτεύων Αλγόριθμος Simplex (2)

Έστω B μια εφικτή βάση του προβλήματος

$$\min\{c^T x : Ax = b, \quad x \geq 0\}$$

όπου c, x $\in \Re^n$, b $\in \Re^m$ και A $\in \Re^{mxn}$, B^{-1} είναι η αντίστροφη βασική μήτρα και $x_B = B^{-1}b \geq 0$, είναι οι τιμές των βασικών μεταβλητών.

Basis Inverse	RHS
$w^T = (c_B)^T B^{-1}$	$z = (c_B)^T$
B^{-1}	$= B^{-1}b$

Αναθεωρημένος Πρωτεύων Αλγόριθμος Simplex (3)

Περιγραφή	Υπολογισμός
Τιμές βασικών μεταβλητών	$x_B = \bar{b} = B^{-1}b$
Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης	$z = (c_B)^T B^{-1} b$
Στήλη περιστροφής	$h_l = B^{-1}A_{.l}$
Δυϊκές χαλαρές μεταβλητές	$s_N = (c_N)^T - (c_B)^T B^{-1} A_N$

Αναθεωρημένος Πρωτεύων Αλγόριθμος Simplex (4)

ΕΠΙΛΟΓΗ ΕΙΣΕΡΧΟΜΕΝΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Κανόνας του Dantzig ή Κανόνας του ελαχίστου στοιχείου (Least element rule)

$$s_l = \min\left\{s_j : s_j < 0 \wedge j \in N\right\}$$

ή

$$s_l = -\max\left\{|s_j| : s_j < 0 \wedge j \in N\right\}$$

Οι δείκτες j ονομάζονται *επιλέξιμοι (elligible)*.
Η εισερχόμενη μεταβλητή είναι η x_l με l=N(t).

Αναθεωρημένος Πρωτεύων Αλγόριθμος Simplex (5)

ΕΠΙΛΟΓΗ ΕΞΕΡΧΟΜΕΝΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Έλεγχος ελαχίστου λόγου (minimum ratio test).

$$x_k = x_{B[r]} = \frac{\left(B^{-1}b\right)_r}{h_{rl}} = \min\left\{\frac{\left(B^{-1}b\right)_i}{h_{il}} : h_{il} > 0 \ \wedge \ i = 1, 2, \ldots, m\right\}$$

Η εξερχόμενη μεταβλητή είναι η x_k με k=B(r).

Σε περίπτωση που δεν υπάρχει $h_{il} > 0$, ισχύει $x_k = \infty$ και το Γ.Π. είναι απεριόριστο.

Αναθεωρημένος Πρωτεύων Αλγόριθμος Simplex (6)

Ο αριθμός r ονομάζεται *δείκτης περιστροφής (pivot index)*

Το στοιχείο h_{rl} *στοιχείο περιστροφής (pivot element)*

Στην περίπτωση που το τρέχον σημείο είναι εκφυλισμένο ισχύει x_k=0 και δεν υπάρχει βελτίωση στην αντικειμενική συνάρτηση σε σχέση με την προηγούμενη επανάληψη.

Στην περίπτωση που η επιλογή της εισεχόμενης μεταβλητής ή ο έλεγχος ελαχίστου λόγου προσδιορίζει περισσότερους από έναν επιλέξιμους δείκτες, τότε το φαινόμενο αυτό ονομάζεται *δεσμός (tie)*.

Αναθεωρημένος Πρωτεύων Αλγόριθμος Simplex (7)

ΑΝΑΝΕΩΣΗ ΣΥΝΟΛΩΝ ΔΕΙΚΤΩΝ Β ΚΑΙ Ν

Η ανανέωση πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες σχέσεις

$$\overline{B} \longleftarrow B \setminus \{k\} \cup \{l\}$$

και

$$\overline{N} \longleftarrow N \setminus \{l\} \cup \{k\}$$

Η βασική μεταβλητή x_k θα γίνει μη-βασική ενώ η μη-βασική x_l θα γίνει βασική. Κατασκευάστηκε η νέα βάση $\overline{B}$. Η διαδικασία εναλλαγής των δεικτών (k, l) ονομάζεται *περιστροφή (pivoting).*

Αναθεωρημένος Πρωτεύων Αλγόριθμος Simplex (8)

ΑΝΑΝΕΩΣΗ ΤΗΣ ΒΑΣΗΣ

Η ανανέωση της βάσης B $\in \Re^{mxm}$ γίνεται με τη σχέση

$$\overline{B}^{-1} = (BE)^{-1} = E^{-1} B^{-1}$$

όπου

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & -h_{1l}/h_r & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 1/h_r & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & -h_{ml}/h_r & & 1 \end{bmatrix}$$

Αναθεωρημένος Πρωτεύων Αλγόριθμος Simplex (9)

Χαρακτηριστικό του γραμμικού προγραμματισμού μεγάλης κλίμακας (large-scale linear programming) είναι ότι ο υπολογισμός της αντίστροφης B^{-1} εκφράζεται σαν γινόμενο μητρών.

Αυτή η αναπαράσταση της B^{-1} ονομάζεται *μορφή γινομένου της αντίστροφης (product form of the inverse).*

Υπολογιστικό πλεονέκτημα: απαιτείται η αποθήκευση μόνο των διανυσμάτων εκείνων που σχηματίζουν τις στοιχειώδεις μήτρες και όχι ολόκληρων των μητρών.

Αναθεωρημένος Πρωτεύων Αλγόριθμος Simplex (10)

Ο αλγόριθμος simplex εφαρμόζεται στο Γ.Π. της μορφής

$$\begin{array}{llrcl} \min & z = c^T x & & & \\ \mu.\pi. & & Ax & = & b \\ & & x & \geq & 0 \end{array}$$

Βήμα 0: *(Αρχικοποίηση).* Ξεκινά με μια εφικτή βασική διαμέριση (B, N) του γραμμικού προβλήματος. Υπολόγισε τη μήτρα B^{-1} και τα διανύσματα x_B, s_N και w.

Βήμα 1: *(Έλεγχος βελτιστότητας).* Αν $s_N \geq 0$, STOP, το πρόβλημα είναι βέλτιστο.

Αναθεωρημένος Πρωτεύων Αλγόριθμος Simplex (11)

<u>Βήμα 2</u>: *(Επιλογή εισερχόμενης/εξερχόμενης μεταβλητής).* α) Επέλεξε την εισερχόμενη μεταβλητή με τον κανόνα του Dantzig. Η μεταβλητή x_l είναι εισερχόμενη, όπου l=N(t). β) Υπολόγισε τη στήλη περιστροφής h_l. Αν ισχύει $h_l \leq 0$, STOP, το πρόβλημα είναι απεριόριστο. Διαφορετικά, επέλεξε την εξερχόμενη μεταβλητή με τον έλεγχο ελαχίστου λόγου. Η μεταβλητή x_k είναι εξερχόμενη όπου $x_{B(r)}=x_k$.

<u>Βήμα 3</u>: *(Περιστροφή).* Ανανέωσε τα σύνολα δεικτών B και N. Θέσε N(t)=k και B(r)=l. Υπολόγισε τη νέα αντίστροφη της βάσης, $\overline{B}^{-1}$ και τα διανύσματα x_B και s_N. Πήγαινε στο Βήμα 1.

Επαναλαμβάνονται τα βήματα 1 ως 3.

Αναθεωρημένος Πρωτεύων Αλγόριθμος Simplex (12)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Ο αλγόριθμος simplex χρειάζεται μια εφικτή βάση για να ξεκινήσει. Σε μερικά προβλήματα η βασική λύση, στην οποία όλες οι χαλαρές μεταβλητές είναι βασικές και όλες οι μεταβλητές απόφασης μη βασικές, είναι εφικτή.

- Μια επανάληψη του αλγορίθμου συμπληρώνεται όταν προσδιοριστεί η επόμενη βασική διαμέριση, [B, N].

- Σε περίπτωση που το Γ.Π. περιλαμβάνει εξαρχής ισοτικούς περιορισμούς, πρέπει να γίνει έλεγχος αν η επαυξημένη μήτρα [A|b] είναι πλήρους βαθμού. Κάποιες από τις αρχικές μεταβλητές θα επιλεγούν ως βασικές.

Περατότητα Αλγορίθμου Simplex

Το πλήθος των βασικών λύσεων είναι πεπερασμένο.

Μια βάση κατασκευάζεται παίρνοντας m διαφορετικούς δείκτες από το σύνολο των n δεικτών {1, 2, …, n}.

Το πλήθος αυτών των διαφορετικών συνδυασμών είναι

$$\boxed{\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}}$$

το οποίο είναι πεπερασμένο. Αν η αντικειμενική συνάρτηση ελαττώνεται αυστηρά, $((c^T x)^{k+1} < (c^T x)^k)$, καμία από τις βάσεις δεν θα επαναληφθεί.

Παράδειγμα (1)

Να λυθεί το παρακάτω γραμμικό πρόβλημα

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1 + x_2 - 4x_3 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 9 \\
& x_1 + x_2 - x_3 \leq 2 \\
& -x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\
& x_j \geq 0, j = 1, 2, 3
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα (2)

Μετά την προσθήκη χαλαρών μεταβλητών το γραμμικό πρόβλημα με χρήση μητρών γράφεται

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα (3)

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ 1.

Βήμα 0. B=[4 5 6] και N=[1 2 3] {1η βασική διαμέριση}

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1} \qquad x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \geq 0 \longrightarrow \text{Εφικτή}$$

$w^T=(c_B)^T B^{-1}=[0\ \ 0\ \ 0]B^{-1}=[0\ \ 0\ \ 0]$

$s_N=(c_N)^T-(c_B)^T B^{-1} A_N=[1\ \ 1\ \ -4]-[0\ \ 0\ \ 0]=[1\ \ 1\ \ -4]$

Παράδειγμα (4)

<u>Βήμα 1.</u> Επειδή $s_N \geq 0$, ο αλγόριθμος δε σταματά

<u>Βήμα 2.</u> α) Επιλογή εισερχόμενης
$s_l = \min\{s_j : s_j < 0 \wedge j \in N\} = \min\{x, x, -4\} = -4$
$t=3$ και $l=N(t)=N(3)=3$, Άρα $x_l = x_3$ εισερχόμενη

β) $h_l = h_3 = B^{-1}A_{.3} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \not\leq 0$

$x_k = x_{B[r]} = \min\{x_{B[i]}/h_{i3} : h_{i3} > 0\} = \min\{9/2, x, 4/1\} = 4$
$r=3$ και $k=B(r)=B(3)=6$, Άρα $x_k = x_6$ εξερχόμενη

Παράδειγμα (5)

<u>Βήμα 3.</u> N(t)=k $\rightarrow$ N(3)=6 $\rightarrow$ N=[1 2 6]
B(r)=l $\rightarrow$ B(3)=3 $\rightarrow$ B=[4 5 3]

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \overline{B}^{-1} = E^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, w^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, s_N = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα (6)

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ 2.

Βήμα 1. Επειδή $s_N \geq 0$, ο αλγόριθμος δε σταματά

Βήμα 2. α) Επιλογή εισερχόμενης
$s_l=\min\{s_j: s_j<0 \wedge j \in N\}=\min\{-3, x, x\}=-3$
t=1 και $l=N(t)=N(1)=1$, Άρα $x_l=x_1$ εισερχόμενη

β) $h_l=h_1=B^{-1}A_{.1}=$ $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \not\leq 0$

$x_k=x_{B[r]}=\min\{x_{B[i]}/h_{i3}: h_{i3}>0\}=\min\{1/3, x, x\}=1/3$
r=1 και $k=B(r)=B(1)=4$, Άρα $x_k=x_4$ εξερχόμενη

Παράδειγμα (7)

Βήμα 3. N(t)=k $\rightarrow$ N(1)=4 $\rightarrow$ N=[4 2 6]

B(r)=l $\rightarrow$ B(1)=1 $\rightarrow$ B=[1 5 3]

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \overline{B}^{-1} = E^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{-2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 6 \\ \frac{13}{3} \end{bmatrix}, w^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, s_N = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα (8)

<u>ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ 3.</u>

<u>Βήμα 1.</u> Επειδή $s_N \geq 0$, ο αλγόριθμος σταματά

Η βέλτιστη βασική διαμέριση είναι B=[1 5 3], N=[4 2 6]

Η βέλτιστη λύση είναι

$$x^T=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)=(1/3, 0\ 13/3, 0, 6, 0)$$

Η βέλτιστη λύση της αντικειμενικής συνάρτησης είναι

$$z=w^Tb=-17$$

Τέλος Ενότητας

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης