ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ & ΔΙΚΤΥΑΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Ενότητα 11: Σχέσεις Πρωτεύοντος και Δυϊκού Προβλήματος, Χαρακτηριστικά Αλγορίθμων τύπου Simplex

Σαμαράς Νικόλαος

Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σχέσεις πρωτεύοντος και δυϊκού προβλήματος (1)

$$
\begin{array}{llcll}
\min & c^T x & & & \\
\mu.\pi. & Ax & \geq & b & \qquad (\Pi) \\
 & x & \geq & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llcll}
\max & w^T b & & & \qquad (\Delta) \\
\mu.\pi. & w^T A & \leq & c^T & \\
 & w & \geq & 0 &
\end{array}
$$

όπου c, x $\in \Re^n$, A $\in \Re^{m \times n}$ και w, b $\in \Re^m$

Σχέσεις πρωτεύοντος και δυϊκού προβλήματος (2)

ΘΕΩΡΗΜΑ *ασθενές δυϊκό θεώρημα (weak duality theorem)* : Αν x είναι μια εφικτή λύση του (Π) και w μια εφικτή λύση του (Δ) τότε

$$c^T x \geq w^T b$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω (x, w) είναι μια εφικτή λύση του (Π) και του (Δ) αντίστοιχα. Αν ισχύει

$$c^T x = w^T b$$

τότε η λύση (x, w) είναι βέλτιστη για το (Π) και το (Δ) αντίστοιχα.

Άσκηση (1)

Έστω το παρακάτω γραμμικό πρόβλημα

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
\min & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & & \\
\text{μ.π.} & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & \geq & 4 \\
& & 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \geq & 3 \\
& & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Ελέγξτε αν οι λύσεις $(x_1, x_5) = (1, 1)$ και $(w_1, w_2) = (4/5, 3/5)$ είναι βέλτιστες για το παραπάνω γραμμικό πρόβλημα και το δυϊκό του.

Άσκηση (2)

Το δυϊκό πρόβλημα είναι

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max & 4w_1 & + & 3w_2 & & \\
\text{μ.π.} & w_1 & + & 2w_2 & \leq & 2 \\
 & w_1 & - & 2w_2 & \leq & 3 \\
 & 2w_1 & + & 3w_2 & \leq & 5 \\
 & w_1 & + & w_2 & \leq & 2 \\
 & 3w_1 & + & w_2 & \leq & 3
\end{array}
$$

$$w_j \geq 0,\ (j = 1, 2)$$

Χαρακτηριστικά αλγορίθμων τύπου simplex (1)

Έστω το γραμμικό πρόβλημα στην τυποποιημένη μορφή

$$\min \{c^T x : Ax = b,\ x \geq 0\} \qquad (\Pi)$$

όπου c, x $\in \Re^n$, b $\in \Re^m$ και A $\in \Re^{mxn}$. Το δυϊκό του προβλήματος (Π) είναι

$$\max\{b^T w : A^T w + s = c, \quad s \geq 0\} \qquad (\Delta)$$

όπου w $\in \Re^m$ είναι οι δυϊκές και s $\in \Re^n$ είναι οι χαλαρές δυϊκές μεταβλητές.

Παράδειγμα (1)

Έστω το παρακάτω γραμμικό πρόβλημα

$$
\begin{array}{llcrcrcr}
\max & 2x_1 & + & 3x_2 & & & & \\
\text{μ.π.} & -3x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & \leq & -2 \\
 & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & \geq & 3 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & \leq & 5
\end{array}
$$

$$x_2 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

Παράδειγμα (2)

Το γραμμικό πρόβλημα σε μορφή μητρών γράφεται

$$c = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$x_j \geq 0$, j = 1, 2, …, 6

Χαρακτηριστικά αλγορίθμων τύπου simplex (2)

Ισχύει $1 \leq m < n$ και rank(A)=m

$B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, $|B|=m$. Θέτουμε $N = \{1, 2, \ldots, n\} \sim B$.

Αν δίνεται η διαμέριση B, N του συνόλου {1, 2, …, n} μπορούμε να διαμερίσουμε και τη μήτρα A στις υπομήτρες B και N, οπότε θα γράφουμε $A = [B, N]$.

Με παρόμοιο τρόπο διαχωρίζονται και οι συνιστώσες του $x \in \Re^n$ στα υποδιανύσματα x_B και x_N.

$$x = (x_B, x_N)^T = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$$

Χαρακτηριστικά αλγορίθμων τύπου simplex (3)

Με παρόμοιο τρόπο διαχωρίζονται και οι συνιστώσες του $c \in \Re^n$ στα υποδιανύσματα c_B και c_N.

$c^T = (c_B, c_N)$

Το γραμμικό πρόβλημα, χρησιμοποιώντας τη διαμέριση A=(B,N) γράφεται

$$
\begin{array}{llcllcl}
\text{Min} & c_B^T x_B & + & c_N^T x_N & & \\
\text{μ.π.} & B x_B & + & N x_N & = & b \\
 & x_B & & x_N & \geq & 0
\end{array}
$$

Χαρακτηριστικά αλγορίθμων τύπου simplex (4)

Το σύνολο δεικτών B ονομάζεται *βάση (basis)*, ανν ισχύει για τη μήτρα B, rank(B)=m. Δηλ. η μήτρα B είναι αντιστέψιμη.

Η μήτρα B ονομάζεται *βασική μήτρα (basic matrix)* ή απλά βάση ενώ η μήτρα N *μη βασική (non basic matrix)*.

Η λύση $x_B = B^{-1}b$ ονομάζεται *βασική λύση (basic solution)*.

Ένα βασικό σημείο x είναι εφικτό αν είναι $x_B \geq 0$, $x_N=0$.

Χαρακτηριστικά αλγορίθμων τύπου simplex (5)

Αν το βασικό σημείο ικανοποιεί ακριβώς n-m ανισότητες σαν ισότητες, ονομάζεται *μη εκφυλισμένο (non degenerate)*.

Σε ένα μη εκφυλισμένο βασικό σημείο όλες οι βασικές μεταβλητές είναι διάφορες του μηδενός.

Αν ένα βασικό σημείο ικανοποιεί τουλάχιστο n-m+1 ανισοτικούς περιορισμούς σαν ισότητες, ονομάζεται *εκφυλισμένο (degenerate)*.

Στα εκφυλισμένα βασικά σημεία, τουλάχιστον μία βασική μεταβλητή είναι ίση με μηδέν.

Χαρακτηριστικά αλγορίθμων τύπου simplex (6)

Σε γραμμικά προβλήματα στην κανονική μορφή

$$\min \{c^T x : Ax \otimes b,\ x \geq 0\}$$

όπου c, x $\in \Re^n$, b $\in \Re^m$ και A $\in \Re^{mxn}$ και $\otimes \in \{\geq, \leq\}$, βασικό σημείο είναι αυτό, στο οποίο υπάρχουν τουλάχιστο n ενεργοί περιορισμοί. Αν υπάρχουν ακριβώς n ενεργοί περιορισμοί, είναι μη εκφυλισμένο, ενώ, αν υπάρχουν τουλάχιστο n+1, είναι εκφυλισμένο.

Παράδειγμα (1)

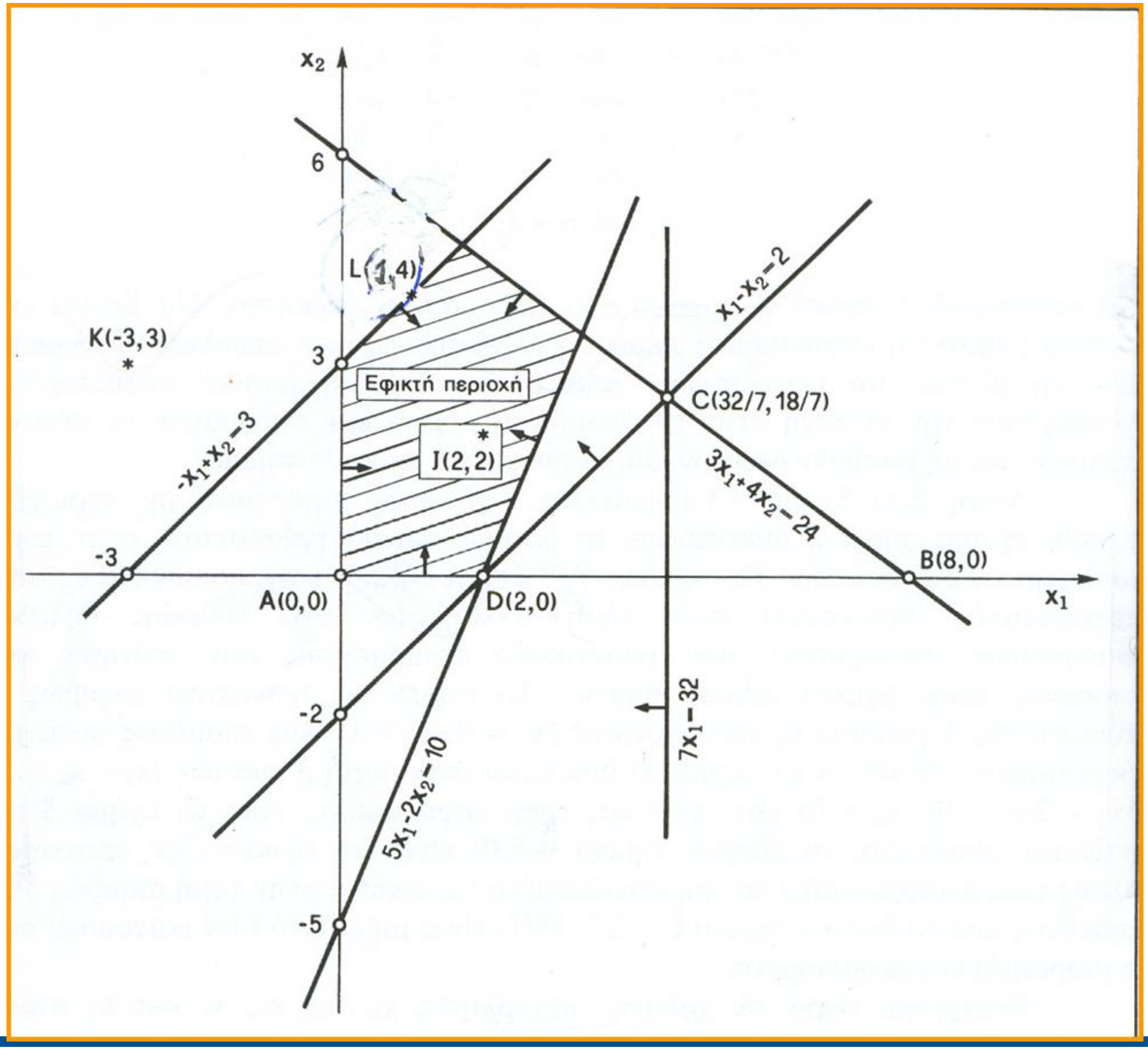
Έστω οι παρακάτω περιορισμοί

$$
\begin{array}{rcrcrl}
3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 24 & (1) \\
x_1 & - & x_2 & \leq & 2 & (2) \\
5x_1 & - & 2x_2 & \leq & 10 & (3) \\
-x_1 & + & x_2 & \leq & 3 & (4) \\
7x_1 & & & \leq & 32 & (5)
\end{array}
$$

$$x_j \geq 0, \ (j = 1, 2)$$

Να παρασταθεί γραφικά η περιοχή στο χώρο των μεταβλητών. Να βρεθεί ένα βασικό εφικτό μη εκφυλισμένο, ένα βασικό εφικτό εκφυλισμένο, ένα βασικό μη εφικτό μη εκφυλισμένο και ένα βασικό μη εφικτό εκφυλισμένο σημείο.

Παράδειγμα (2)



Παράδειγμα (1)

Για το ίδιο γραμμικό πρόβλημα

$$\begin{array}{rcrcrl}
3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 24 & (1) \\
x_1 & - & x_2 & \leq & 2 & (2) \\
5x_1 & - & 2x_2 & \leq & 10 & (3) \\
-x_1 & + & x_2 & \leq & 3 & (4) \\
7x_1 & & & \leq & 32 & (5)
\end{array}$$

$x_j \geq 0, (j = 1, 2)$

Μετατρέψτε την περιοχή στην τυποποιημένη μορφή και περιγράψτε τα σύνολα βασικών και μη βασικών δεικτών που αντιστοιχούν σε κάθε βασικό εφικτό σημείο.

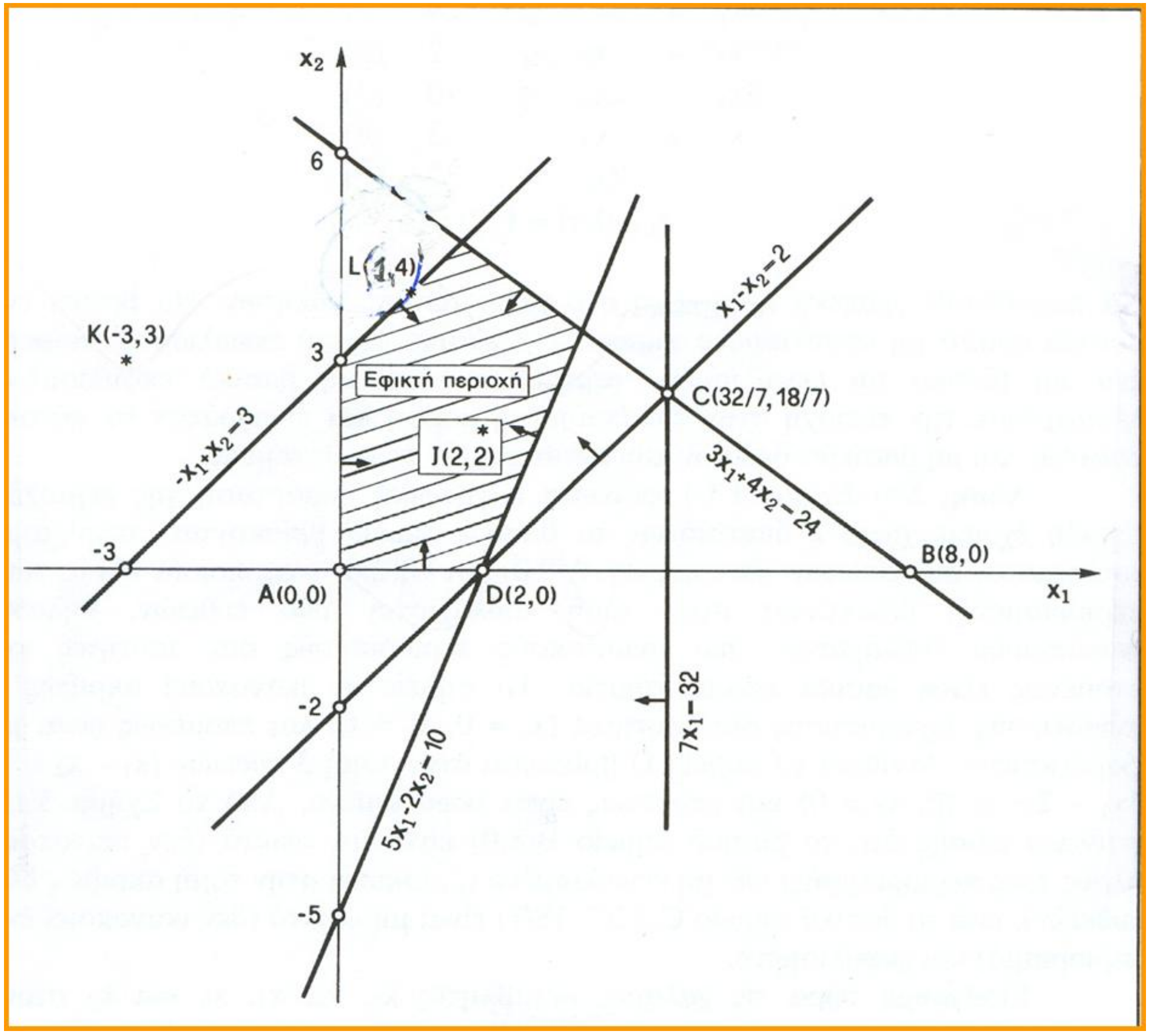
Παράδειγμα (2)

Μετά την προσθήκη χαλαρών μεταβλητών το γραμμικό πρόβλημα γίνεται

$$
\begin{array}{rrrrrrrcrl}
3x_1 & + 4x_2 & +x_3 & & & & & = & 24 & (1) \\
x_1 & - x_2 & & +x_4 & & & & = & 2 & (2) \\
5x_1 & - 2x_2 & & & +x_5 & & & = & 10 & (3) \\
-x_1 & + x_2 & & & & +x_6 & & = & 3 & (4) \\
7x_1 & & & & & & +x_7 & = & 32 & (5)
\end{array}
$$

$x_j \geq 0, (j = 1, 2, \ldots, 7)$

Παράδειγμα (3)



Παράδειγμα (4)

Στο σημείο D μπορούμε να αντιστοιχήσουμε οποιοδήποτε από τα παρακάτω 3 ζευγάρια.

B=[1, 3, 5, 6, 7]	B=[1, 3, 4, 6, 7]	B=[1, 2, 3, 6, 7]
N=[2, 4]	N=[2, 5]	N=[4, 5]

Τα βασικά εφικτά σημεία είναι κορυφές του πολυέδρου της εφικτής περιοχής.

Παράδειγμα (5)

Το σημείο J(2,2) είναι εφικτό και ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς σαν αυστηρές ανισότητες. Το σημείο αυτό είναι εσωτερικό (interior point).

Το σημείο L(1,4) είναι εφικτό, ικανοποιεί έναν ανισοτικό περιορισμό σαν ισότητα και όλους τους υπόλοιπους σαν αυστηρές ανισότητες. Το σημείο αυτό ονομάζεται συνοριακό (boundary point). Στα συνοριακά σημεία το πλήθος των ανισοτικών περιορισμών που ικανοποιούνται σαν ισότητες είναι μικρότερο ή ίσο του n-m.

Το σημείο K(-3,3) είναι μη βασικό μη εφικτό.

Υπολογισμός Δυϊκών Μεταβλητών

$$
\begin{aligned}
w^T &= (c_B)^T B^{-1} \\
s^T &= c^T - w^T A \\
&= c^T - (c_B)^T B^{-1} A
\end{aligned}
$$

$w_i = (c_B)^T (B^{-1})_{.i}$
$s_j = c_j – w^T a_j = c_j – (c_B)^T B^{-1} a_j$

όπου $(B^{-1})_{.i}$ είναι η i στήλη της αντίστροφης βασικής μήτρας.

Παράδειγμα

Έστω το παρακάτω γραμμικό πρόβλημα

$$
\begin{array}{ll}
\min & x_1 + x_2 \\
\text{s.t.} & x_1 + 2x_2 \le 4 \\
 & \quad\quad\;\; x_2 \le 1 \\
 & \quad x_j \ge 0,\ j = 1, 2
\end{array}
$$

Να υπολογιστούν οι δυϊκές μεταβλητές w και οι δυϊκές χαλαρές μεταβλητές s.

Τέλος Ενότητας