

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ & ΔΙΚΤΥΑΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Ενότητα 10: Δυϊκή Θεωρία, Οικονομική Ερμηνεία Δυϊκού Προβλήματος

Σαμαράς Νικόλαος

Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Υπολογισμός Αντίστροφης Μήτρας (3)

4). Χρήση eta -Μητρών

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & x_{1r} & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \ddots & 0 \\ \cdots & \cdots & x_{rr} & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & x_{nr} & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & -x_{1r}/x_{rr} & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \ddots & 0 \\ \cdots & \cdots & 1/x_{rr} & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & -x_{nr}/x_{rr} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η αντίστροφος της παρακάτω μήτρας

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Με χρήση block μητρών έχουμε

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -9/2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

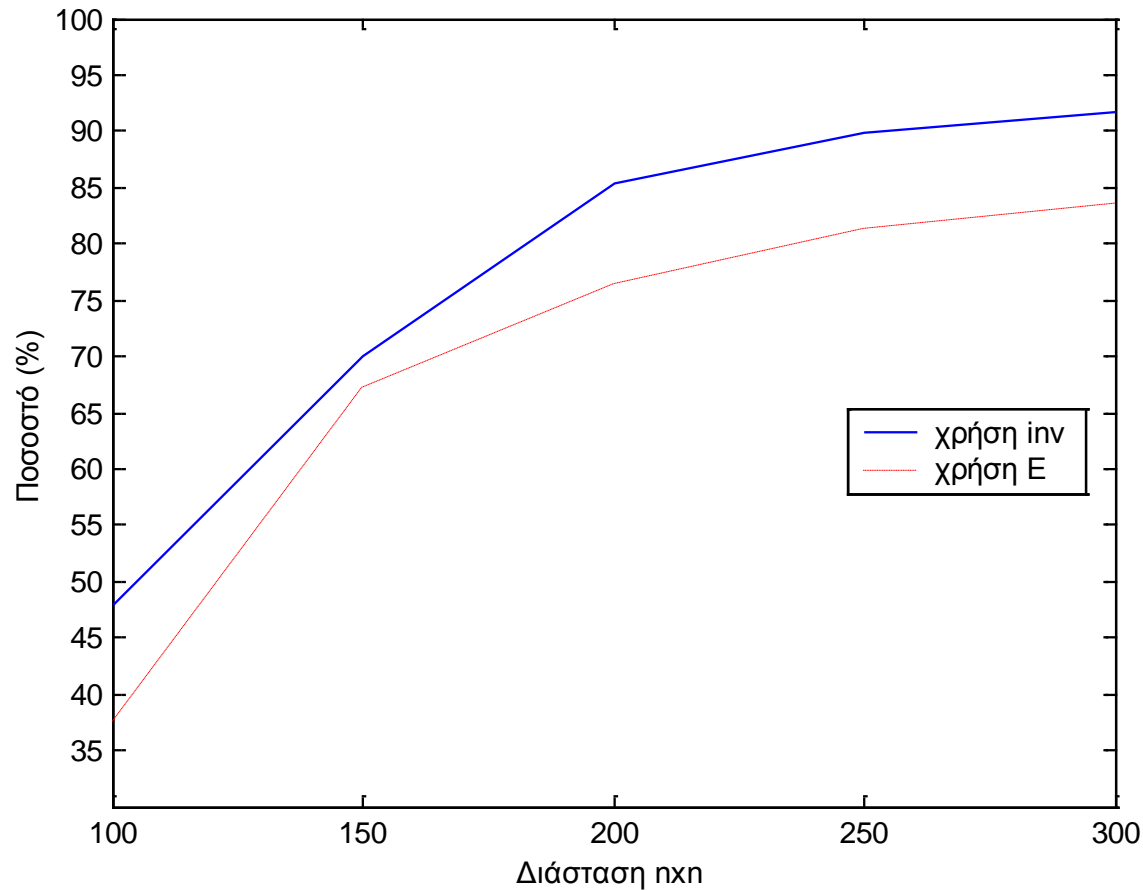
Να υπολογιστεί η αντίστροφος της παρακάτω μήτρας

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Με χρήση block μητρών έχουμε

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Αποτελεσματικότητα Eta μητρών



Δυσική Θεωρία (1)

Θεώρημα : Το δυσικό πρόβλημα του γραμμικού προβλήματος

$$\min \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} c^0 \\ c^1 \\ c^2 \end{array} \right)^T \left(\begin{array}{c} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{array} \right) : \left[\begin{array}{l} A^0 x^0 + A^1 x^1 + A^2 x^2 = b^0 \\ B^0 x^0 + B^1 x^1 + B^2 x^2 \geq b^1 \\ C^0 x^0 + C^1 x^1 + C^2 x^2 \leq b^2 \\ x^1 \geq 0, \quad x^2 \leq 0 \end{array} \right] \end{array} \right\}$$

Δυϊκή Θεωρία (2)

είναι το γραμμικό πρόβλημα

$$\max \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} \mathbf{b}^0 \\ \mathbf{b}^1 \\ -\mathbf{b}^2 \end{array} \right)^T \left(\begin{array}{c} \mathbf{w}^0 \\ \mathbf{w}^1 \\ \mathbf{w}^2 \end{array} \right) : \left[\begin{array}{l} \left(\mathbf{A}^0 \right)^T \mathbf{w}^0 + \left(\mathbf{B}^0 \right)^T \mathbf{w}^1 + \left(\mathbf{C}^0 \right)^T \mathbf{w}^2 = \mathbf{c}^0 \\ \left(\mathbf{A}^1 \right)^T \mathbf{w}^0 + \left(\mathbf{B}^1 \right)^T \mathbf{w}^1 + \left(\mathbf{C}^1 \right)^T \mathbf{w}^2 \leq \mathbf{c}^1 \\ \left(\mathbf{A}^2 \right)^T \mathbf{w}^0 + \left(\mathbf{B}^2 \right)^T \mathbf{w}^1 + \left(\mathbf{C}^2 \right)^T \mathbf{w}^2 \geq \mathbf{c}^2 \\ \mathbf{w}^1 \geq 0, \quad \mathbf{w}^2 \leq 0 \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

όπου \mathbf{c}^j , \mathbf{x}^j , \mathbf{A}^j , \mathbf{B}^j , \mathbf{C}^j , \mathbf{b}^j , \mathbf{w}^j , \mathbf{y}^j , $j = 0, 1, 2$, είναι μήτρες και διανύσματα καταλλήλων διαστάσεων.

Δυϊκή Θεωρία (3)

Πόρισμα: Αν το πρωτεύον είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης, το δυϊκό του είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

| α/α | min | | \leftrightarrow | max | |
|-----|-------------|----------|-------------------|-------------|----------|
| 1 | περιορισμός | = | \leftrightarrow | μεταβλητή | ελεύθερη |
| 2 | περιορισμός | \geq | \leftrightarrow | μεταβλητή | ≥ 0 |
| 3 | περιορισμός | \leq | \leftrightarrow | μεταβλητή | ≤ 0 |
| 4 | μεταβλητή | ελεύθερη | \leftrightarrow | περιορισμός | = |
| 5 | μεταβλητή | ≥ 0 | \leftrightarrow | περιορισμός | \leq |
| 6 | μεταβλητή | ≤ 0 | \leftrightarrow | περιορισμός | \geq |

Δυϊκή Θεωρία (4)

- Το δυϊκό έχει αντικειμενική συνάρτηση $b^T w$, όπου w είναι το διάνυσμα των μεταβλητών του δυϊκού προβλήματος.
- Αν το πρωτεύον είναι \min (\max) το δυϊκό του είναι \max (\min)
- Σε κάθε περιορισμό του πρωτεύοντος αντιστοιχεί μία μεταβλητή του δυϊκού
- Σε κάθε μεταβλητή του πρωτεύοντος αντιστοιχεί ένας περιορισμός του δυϊκού.

Δυϊκή Θεωρία (5)

•Ο περιορισμός του δυϊκού που αντιστοιχεί στην μεταβλητή x_j έχει τη μορφή

$(\text{στήλη συντελεστών της } x_j)^T (\text{διάνυσμα δυϊκών μεταβλητών}) \otimes c_j$

όπου \otimes είναι ένα από τα σύμβολα $=$, \geq και \leq .

Παράδειγμα (1)

Να βρεθεί το δυϊκό του γραμμικού προβλήματος

$$\begin{array}{rcllclclcl} \max & 2x_1 & + & 3x_2 & & & & & \\ \mu.π. & -3x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & -2 \\ & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & \geq & 3 \\ & 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & \leq & 5 \\ & x_1 & \text{ελεύθερη}, & x_2 \geq 0, & & x_3 \leq 0 & & \end{array}$$

Άσκηση (1)

Να βρεθεί το δυϊκό του γραμμικού προβλήματος

$$\begin{array}{rcllclcl} \max & -2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & & \\ \mu.π. & 5x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & = & 10 \\ & 2x_1 & & & + & x_3 & \leq & 5 \\ & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \geq & 4 \\ & x_j & \geq & 0, & (j = 1, 3) & & & \end{array}$$

Άσκηση (2)

Απάντηση.

$$\begin{array}{rcllcl} \min & 10w_1 & + & 5w_2 & + & 4w_3 & & \\ \mu.π. & 5w_1 & + & 2w_2 & + & 3w_3 & \geq & -2 \\ & 6w_1 & & & + & w_3 & = & -1 \\ & 2w_1 & + & w_2 & + & 2w_3 & \geq & 4 \end{array}$$

$$w_1 \text{ ελεύθερη}, w_2 \geq 0, w_3 \leq 0$$

Οικονομική Ερμηνεία Δυϊκού Προβλήματος (1)

Το πρωτεύον και το δυϊκό πρόβλημα συνδέονται άμεσα.

Όταν ερμηνεύονται οικονομικά τα δύο προβλήματα παίρνουν ανταγωνιστικές θέσεις.

Για παράδειγμα, το πρωτεύον πρόβλημα μπορεί να αναφέρεται στον ιδιοκτήτη μιας επιχείρησης ενώ το δυϊκό σε κάποιον που προσπαθεί να αγοράσει την επιχείρηση ή το πρωτεύον να αντιστοιχεί στον εργοδότη και το δυϊκό στους εργαζόμενους.

Σημαντικό ρόλο διαδραματίζει η οικονομική ερμηνεία των δυϊκών μεταβλητών.

Οικονομική Ερμηνεία Δυϊκού Προβλήματος (2)

Οι μονάδες με τις οποίες εκφράζεται η αντικειμενική συνάρτηση του πρωτεύοντος προβλήματος είναι γνωστές.

Επειδή η αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού προβλήματος πρέπει να εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες, κάθε όρος της $b_i w_i$ εκφράζεται επίσης με τις ίδιες μονάδες.

Για παράδειγμα αν η αντικειμενική συνάρτηση του πρωτεύοντος προβλήματος εκφράζεται σε ευρώ και το δεξιό μέρος b_i σε κιλά αλουμινίου, ο όρος $w_i b_i$ της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού προβλήματος πρέπει να εκφράζει ευρώ. Επομένως, οι μονάδες μέτρησης της w_i είναι ευρώ ανά κιλό αλουμινίου.

Παράδειγμα (1)

Ο ιδιοκτήτης μιας επιχείρησης θέλει να μεγιστοποιήσει τα έσοδά του κατασκευάζοντας x_1 πόρτες, x_2 παράθυρα και x_3 τραπέζια χρησιμοποιώντας τους διαθέσιμους πόρους του που είναι 400 dm^3 ξύλο και 300 κιλά αλουμίνιο. Γνωρίζει ότι μια πόρτα πουλιέται 15 ευρώ, ένα παράθυρο 12 ευρώ και μια καρέκλα 8 ευρώ. Οι κατασκευαστικές απαιτήσεις των προϊόντων είναι αυτές που δίνονται στον Πίνακα 1, ο οποίος συνοψίζει και όλα τα υπόλοιπα δεδομένα.

Ποιο πρόβλημα πρέπει να λύσει ο ιδιοκτήτης της Επιχείρησης;

Ποιο είναι το δυϊκό του και ποιος επιθυμεί να το λύσει;

Παράδειγμα (2)

| | Πόρτες | Παράθυρα | Καρέκλες | Διαθέσιμοι πόροι |
|--------------|--------|----------|----------|---------------------|
| Ξύλο | 4 | 3 | 1 | 400 dm ³ |
| Αλουμίνιο | 2 | 2 | 1 | 300 κιλά |
| Τιμή πώλησης | 15 | 12 | 8 | |

Πίνακας 1. Κατασκευαστικές απαιτήσεις προϊόντων

Παράδειγμα (3)

Προκύπτει εύκολα ότι ο ιδιοκτήτης της επιχείρησης θα λύσει το γραμμικό πρόβλημα

$$\begin{aligned} \max \quad & 15x_1 + 12x_2 + 8x_3 \\ \mu.π. \quad & 4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 400 \leftrightarrow w_1 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 300 \leftrightarrow w_2 \\ & x_j \geq 0, (j = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

Αντιστοιχώντας στον i περιορισμό τη δυϊκή μεταβλητή w_i , προκύπτει ότι το δυϊκό πρόβλημα είναι

$$\begin{aligned} \min \quad & 400w_1 + 300w_2 \\ \mu.π. \quad & 4w_1 + 2w_2 \geq 15 \leftrightarrow x_1 \\ & 3w_1 + 2w_2 \geq 12 \leftrightarrow x_2 \\ & w_1 + w_2 \geq 8 \leftrightarrow x_3 \\ & w_j \geq 0, (j = 1, 2) \end{aligned}$$

Παράδειγμα (4)

Η αντικειμενική συνάρτηση του πρωτεύοντος προβλήματος εκφράζει ευρώ. Επομένως, κάθε όρος $b_i w_i$ της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού προβλήματος εκφράζει επίσης ευρώ. Οι μονάδες μέτρησης του b_1 είναι dm^3 ξύλου ($b_1 = 400 \text{ dm}^3$ ξύλου) και του b_2 είναι κιλά αλουμινίου ($b_2 = 300$ κιλά αλουμινίου). Επειδή οι όροι

$$b_1 w_1 = 400 w_1 \quad \text{και} \quad b_2 w_2 = 300 w_2$$

εκφράζουν ευρώ, οι μονάδες μέτρησης του w_1 είναι ευρώ ανά dm^3 ξύλου και του w_2 είναι ευρώ ανά κιλό αλουμινίου.

Παράδειγμα (5)

Η αντικειμενική συνάρτηση του πρωτεύοντος εκφράζει αξία των προϊόντων που πουλάει η επιχείρηση και ως εκ τούτου ο ιδιοκτήτης της θέλει να μεγιστοποιήσει, ενώ η αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού εκφράζει αξία των πρώτων υλών (ξύλου και αλουμινίου), που διαθέτει η επιχείρηση. Εάν πρόκειται να πουληθεί η επιχείρηση, ο ιδιοκτήτης της σίγουρα δεν θέλει να ελαχιστοποιήσει το κόστος των πρώτων υλών.

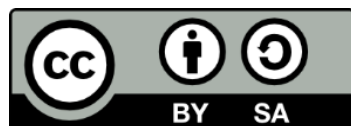
Κάποιος όμως πιθανός αγοραστής θέλει. Γι' αυτόν ακριβώς το λόγο ο αγοραστής προτείνει τιμές $w_1 \geq 0$ και $w_2 \geq 0$ για τις πρώτες ύλες έτσι ώστε χρησιμοποιώντας τις κατασκευαστικές απαιτήσεις να δίνουν για κάθε μονάδα προϊόντος τιμή μεγαλύτερη ή ίση της τιμής πώλησής των. Διαφορετικά, δεν υπάρχει κανένας λόγος για τον ιδιοκτήτη να πουλήσει την επιχείρησή του.

Παράδειγμα (6)

Τα αποτελέσματα της δυϊκής θεωρίας λένε ότι ο αγοραστής μπορεί να δώσει τέτοιες τιμές στις δυϊκές μεταβλητές ώστε να προκύπτουν βέλτιστες λύσεις και για τον ίδιο (που πρέπει να λύσει το δυϊκό πρόβλημα) και για τον ιδιοκτήτη της επιχείρησης (που πρέπει να λύσει το πρωτεύον πρόβλημα).

Ακόμη και αν δεν υπάρχουν προθέσεις πώλησης της επιχείρησης οι δυϊκές μεταβλητές και το δυϊκό πρόβλημα παρέχουν χρήσιμες πληροφορίες για την ίδια την επιχείρηση. Πιο συγκεκριμένα, το τμήμα κοστολόγησης της επιχείρησης πρέπει να δώσει τιμές στις πρώτες ύλες έτσι ώστε το συνολικό κόστος των αποθηκευμένων πρώτων υλών να είναι ελάχιστο.

Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

