ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ & ΔΙΚΤΥΑΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Ενότητα 9: Γεωμετρία του Χώρου των Μεταβλητών, Υπολογισμός Αντιστρόφου Μήτρας

Σαμαράς Νικόλαος
Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Γεωμετρία του Χώρου των Μεταβλητών (1)

Το χώρο που άξονές του είναι οι μεταβλητές του προβλήματος.

Ο χώρος αυτός ονομάζεται *χώρος των μεταβλητών*.

Στην παρουσίαση του χώρου των μεταβλητών θα χρησιμοποιηθεί ο χώρος των δυο διαστάσεων.

Το Γ.Π. είναι στην κανονική του μορφή

$$\min\{c^T x : Ax = b,\ x \geq 0\}$$

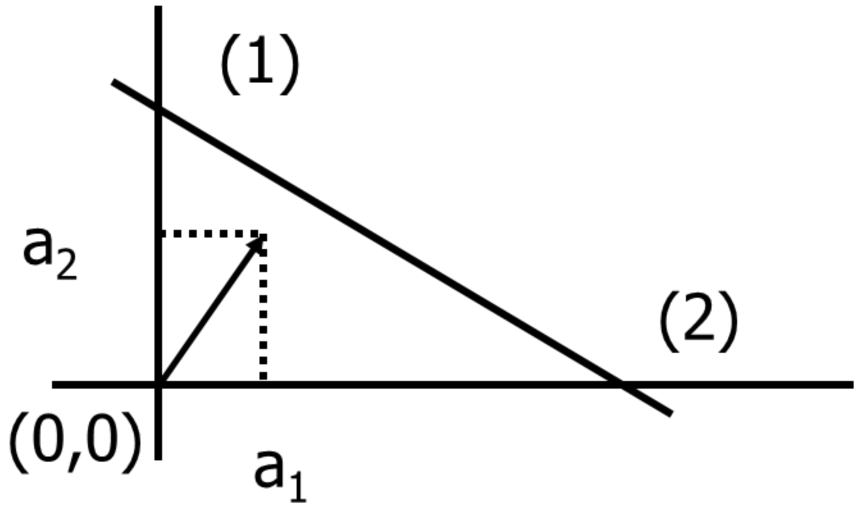
όπου c, x $\in \Re^n$, b $\in R^m$ και A $\in \Re^{mxn}$

Γεωμετρία του Χώρου των Μεταβλητών (2)

Σχεδίαση Εφικτής Περιοχής (Α’ Τρόπος)

$f(x) = a^T x = a_1 x_1 + a_2 x_2 = b \perp a=(a_1, a_2)^T$

Προσδιορισμός ενός σημείου της f(x) και από το σημείο αυτό σχεδίαση κάθετης ευθείας προς το διάνυσμα a.

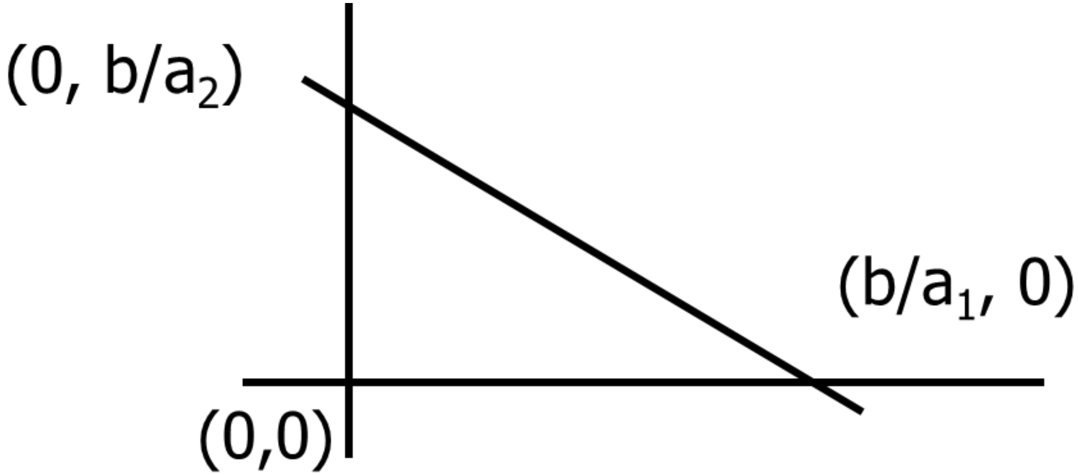


Γεωμετρία του Χώρου των Μεταβλητών (3)

Σχεδίαση Εφικτής Περιοχής (Β' Τρόπος)

$f(x) = a^T x = a_1 x_1 + a_2 x_2 = b \neq 0$

Δυο σημεία $\rightarrow$ $(b/a_1, 0)$, $(0, b/a_2)$



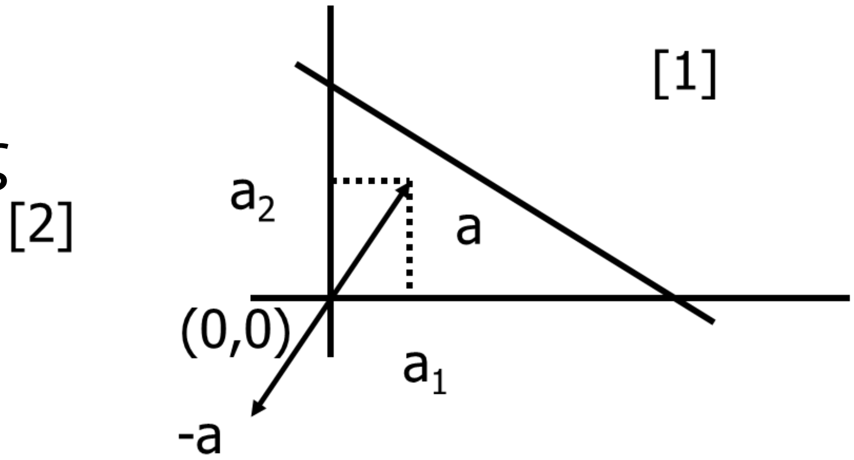
Γεωμετρία του Χώρου των Μεταβλητών (4)

Θετικό Ημιεπίπεδο [1] αυτό που δείχνει το διάνυσμα a

Αρνητικό Ημιεπίπεδο [2] αυτό που δείχνει το διάνυσμα –a

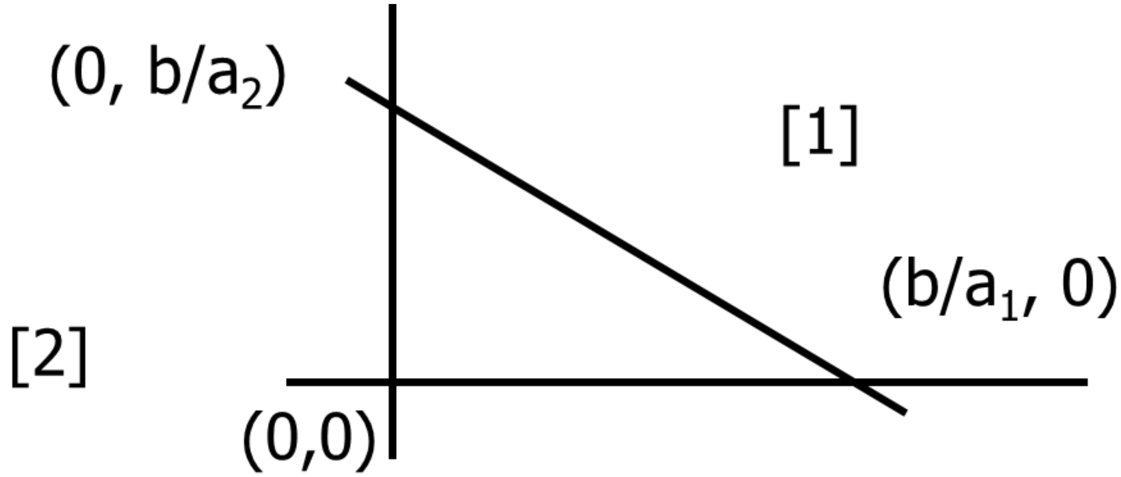
Όλα τα σημεία του ημιεπιπέδου [1] ικανοποιούν ανισότητες της μορφής $(a_1x_1 + a_2x_2 \geq b)$

Όλα τα σημεία του ημιεπιπέδου [2] ικανοποιούν ανισότητες της μορφής $(a_1x_1 + a_2x_2 \leq b)$



Γεωμετρία του Χώρου των Μεταβλητών (5)

Το ημιεπίπεδο τα σημεία του οποίου ικανοποιούν μια ανισότητα (ανισοτικό περιορισμό) ονομάζεται καλό ημιεπίπεδο.



Γεωμετρία του Χώρου των Μεταβλητών (6)

Προσδιορισμός Καλού Ημιεπιπέδου (Α’ Τρόπος)

Α) $a_1x_1 + a_2x_2 \geq b \rightarrow a_1x_1 + a_2x_2 = b$

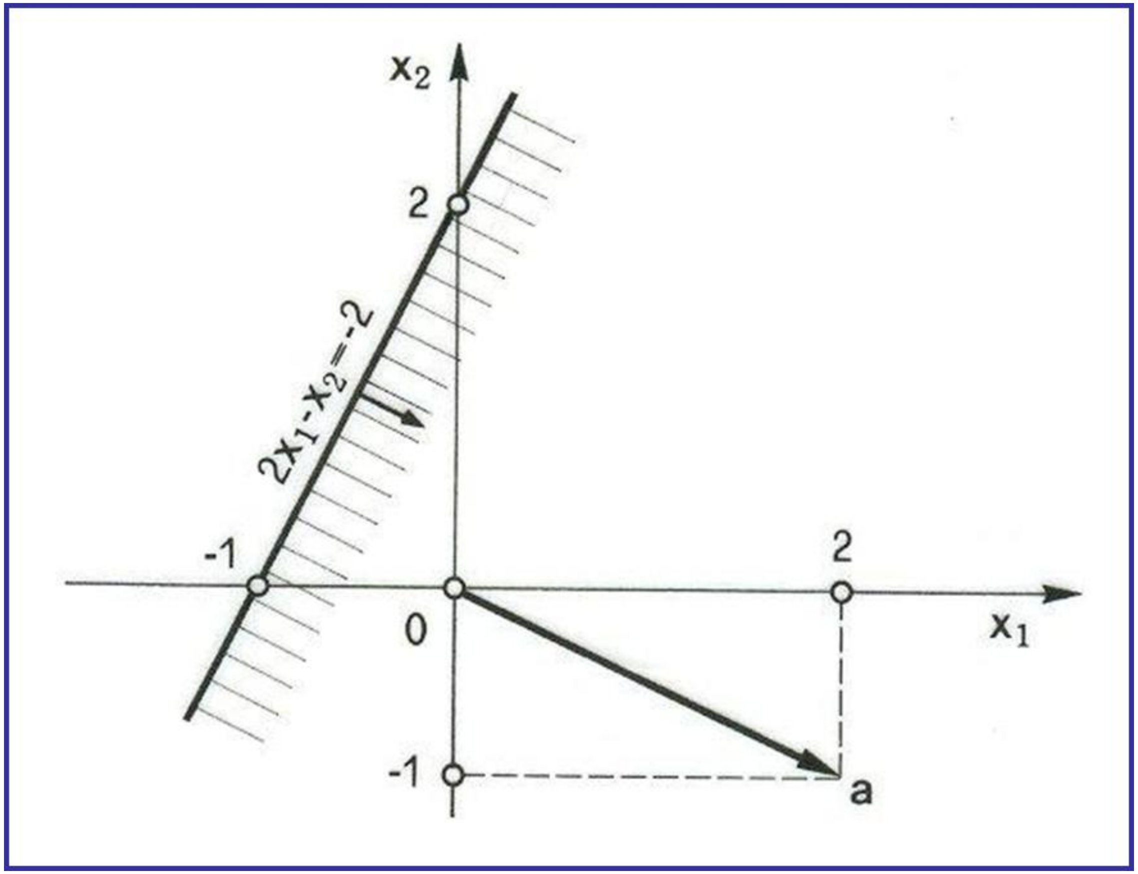
- Το ημιεπίπεδο το οποίο δείχνει προς το διάνυσμα a είναι το καλό ημιεπίπεδο.

Β) $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b \rightarrow a_1x_1 + a_2x_2 = b$

- Το ημιεπίπεδο το οποίο δείχνει προς το διάνυσμα –a είναι το καλό ημιεπίπεδο.

Γεωμετρία του Χώρου των Μεταβλητών (7)

$2x_1 - x_2 \geq -2 \rightarrow 2x_1 - x_2 = -2$

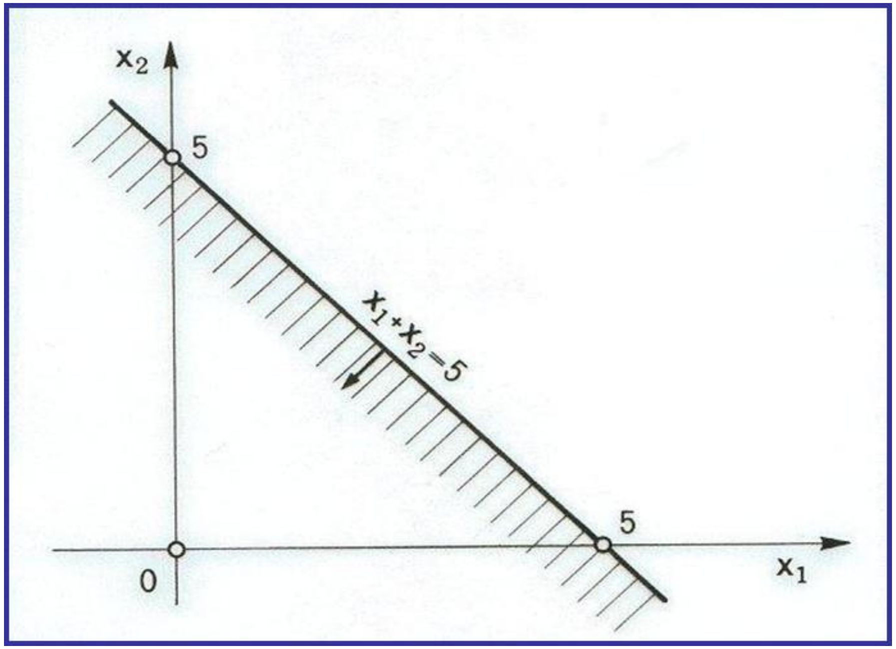


Γεωμετρία του Χώρου των Μεταβλητών (8)

Προσδιορισμός Καλού Ημιεπιπέδου (Β' Τρόπος)

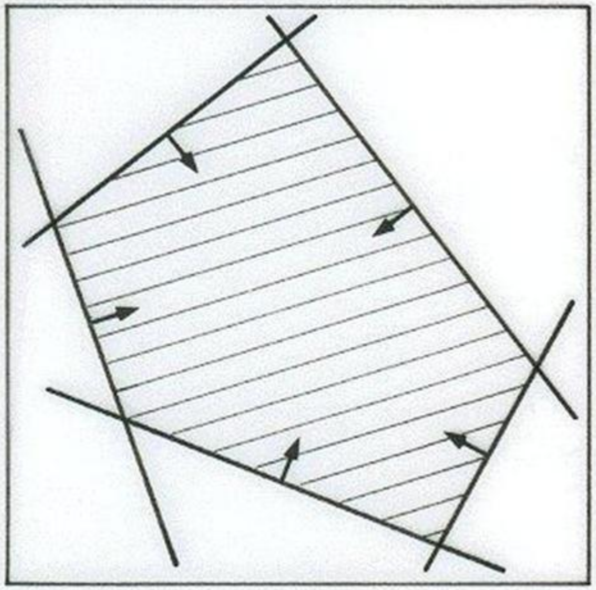
$a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$ ή $\leq b$ και $b \neq 0$

Αν το σημείο (0, 0) επαληθεύει την ανισότητα τότε το ημιεπίπεδο στο οποίο ανήκει το (0, 0) είναι το καλό.

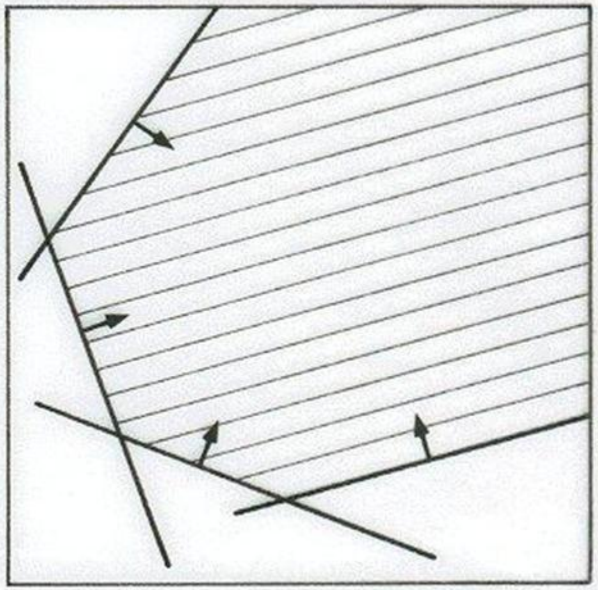


Γεωμετρία του Χώρου των Μεταβλητών (9)

Η εφικτή περιοχή (feasible region) ενός Γ.Π. σε κανονική μορφή είναι το σχήμα που προκύπτει από την τομή πεπερασμένου πλήθους ημιεπιπέδων. Το σχήμα είναι ένα κυρτό πολύγωνο το οποίο μπορεί να είναι περατωμένο (α) ή μη-περατωμένο (β).



(α)



(β)

Γεωμετρία του Χώρου των Μεταβλητών (10)

<u>Σχεδίαση Αντικειμενικής Συνάρτησης</u>

$c^T x = z$

Μετακίνηση της $c^T x = z$ παράλληλα με τον εαυτό της έχοντας κοινά σημεία με την εφικτή περιοχή και η αντικειμενική τιμή της να βελτιώνεται.

- min $\rightarrow$ κάθετα προς την κατεύθυνση –c
- max $\rightarrow$ κάθετα προς την κατεύθυνση c

Αν η $c^T x = z$ μετακινείται απεριόριστα έχοντας κοινά σημεία με την εφικτή περιοχή τότε το Γ.Π. είναι απεριόριστο.

Γεωμετρία του Χώρου των Μεταβλητών (11)

- Η τομή της βέλτιστης αντικειμενικής ισοσταθμικής με την εφικτή περιοχή ονομάζεται βέλτιστο σύνολο.
- Το βέλτιστο σύνολο περιλαμβάνει μια τουλάχιστον κορυφή του πολυγώνου της εφικτής περιοχής.
- Η βέλτιστη λύση προκύπτει από τη λύση των ευθειών (εξισώσεων) που περνάνε από τη βέλτιστη κορυφή του πολυγώνου της εφικτής περιοχής.
- Η βέλτιστη λύση περιλαμβάνει τη βέλτιστη αντικειμενική τιμή και τις βέλτιστες τιμές των μεταβλητών απόφασης.

Γεωμετρική Επίλυση (1)

Στάδια Επίλυσης

1. Γραφική αναπαράσταση όλων των περιορισμών
2. Προσδιορισμός των καλών ημιεπιπέδων
3. Προσδιορισμός της εφικτής περιοχής. Αν είναι κενή το Γ.Π. είναι αδύνατο.
4. Γραφική αναπαράσταση της ισοσταθμικής της αντικειμενικής συνάρτησης.
5. Προσδιορισμός της βέλτιστης κορυφής (αν υπάρχει) και υπολογισμός της βέλτιστης λύσης.

Παράδειγμα (1)

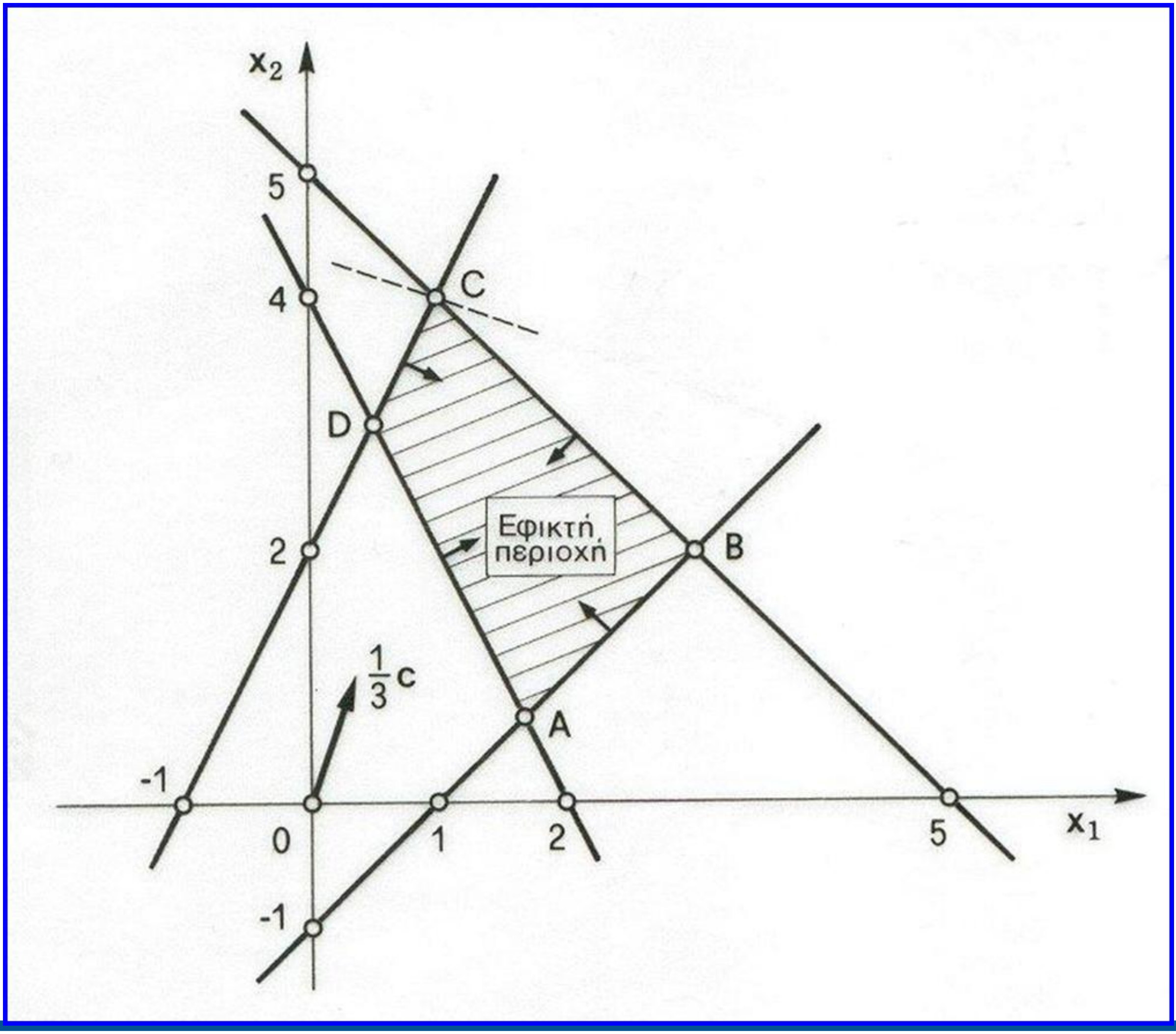
Να λυθεί γραφικά το παρακάτω Γ.Π.

$$
\begin{array}{llrcrcrl}
\max & z = & x_1 & + & 3x_2 & & & \\
\text{μ.π.} & & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 & (1) \\
 & & 2x_1 & - & x_2 & \geq & -2 & (2) \\
 & & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 & (3) \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 4 & (4)
\end{array}
$$

$$x_j \geq 0, (j = 1, 2)$$

Αν το πρόβλημα είναι βέλτιστο να υπολογιστεί ένα βέλτιστο σημείο και η βέλτιστη αντικειμενική τιμή.

Παράδειγμα (2)



Άσκηση

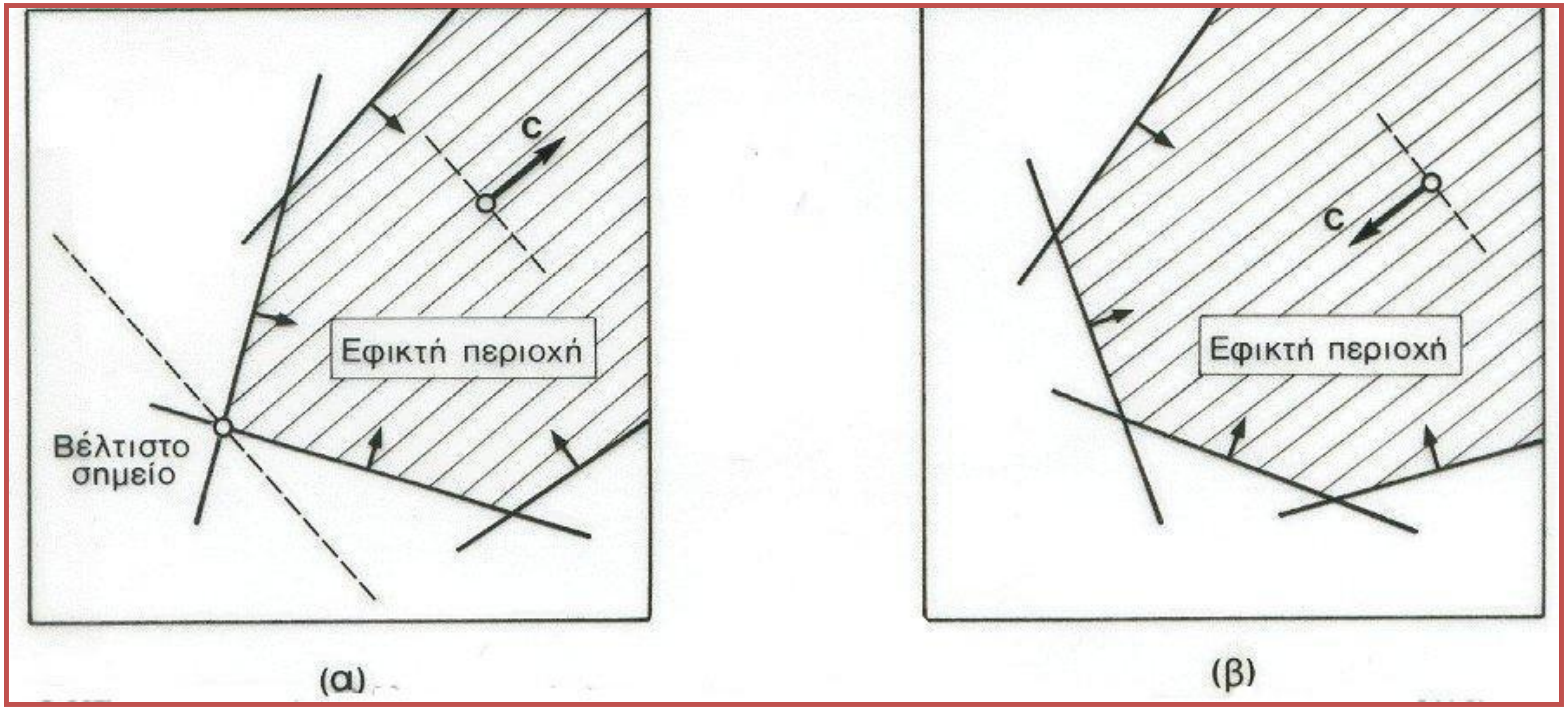
Να λυθεί γεωμετρικά το παρακάτω Γ.Π.

$$
\begin{array}{llrcrcr}
\max & z = & 2x_1 & + & x_2 & & \\
\mu.\pi. & & x_1 & + & 3x_2 & \geq & -6 \\
 & & x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\
 & & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & \geq & 4 \\
 & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Παρατηρήσεις

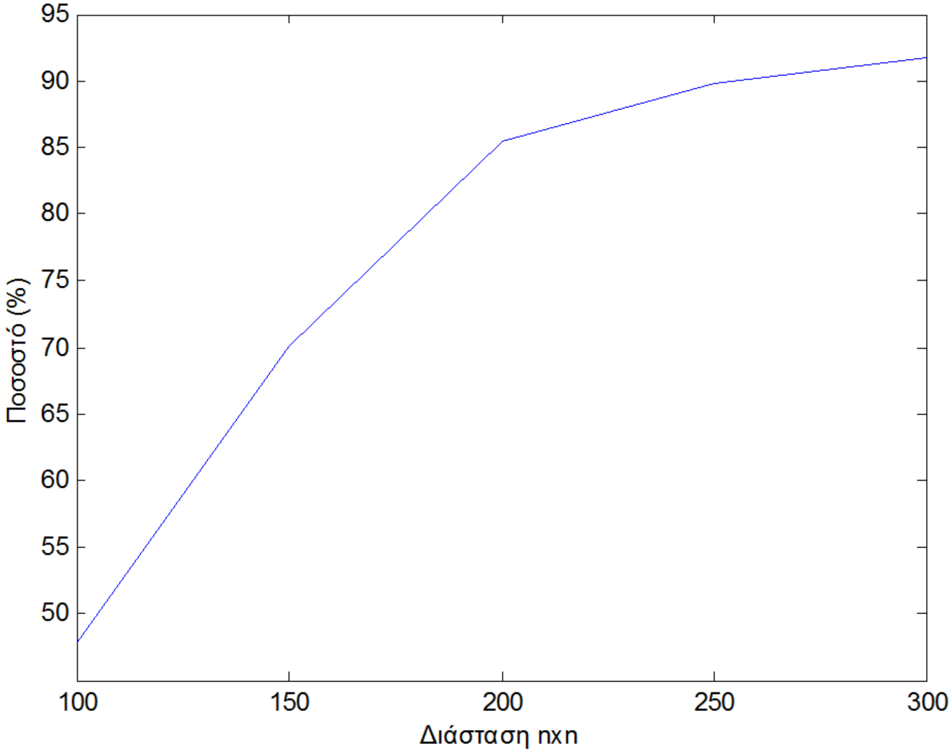
Αν η εφικτή περιοχή είναι περατωμένη $\Rightarrow \exists$ βέλτιστη λύση

Μη περατωμένη περιοχή και το Γ.Π. είναι min?



Αντιστροφή Μήτρας (1)

Αναγκαιότητα υπολογισμού της αντίστροφης με «υπολογστικά αποτελεσματική» μέθοδο.



Αντιστροφή Μήτρας (2)

ΟΡΙΣΜΟΣ. Αν $A \in \mathfrak{R}^{n\times n}$ και $B \in \mathfrak{R}^{n\times n}$: AB = BA = I τότε η μήτρα A ονομάζεται *αντιστρέψιμη (nonsingular)* και η μήτρα B *αντίστροφη (inverse)* της A. Διαφορετικά, η μήτρα A είναι *μη αντιστρέψιμη (singular).* Η αντίστροφη συμβολίζεται με A^{-1}

Η αντίστροφη μήτρα είναι μοναδική

Η αντίστροφη της A^{-1} είναι η μήτρα A

Αντίστροφη μήτρας στοιχείο $A=[a_{ij}]$, $a_{ij}\neq 0 \Rightarrow A^{-1}=[1/a_{ij}]$

Αντιστροφή Μήτρας (3)

Αντίστροφη διαγώνιας μήτρας

Αν X μια αντιστρέψιμη *διαγώνια μήτρα (diagonal matrix)*, της οποίας το i *διαγώνιο στοιχείο (diagonal element)* είναι $x_i \neq 0$, τότε η X^{-1} είναι πάλι διαγώνια και το i διαγώνιο στοιχείο της είναι $1/x_i$

$$\left(X^{-1}\right)_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \dfrac{1}{X_{ii}}, & i = j \end{cases}$$

Αντίστροφη γινομένου αριθμού επί μήτρα

$(kA)^{-1}$ και $k \neq 0 \Rightarrow 1/k(A)^{-1}$

Αντιστροφή Μήτρας (4)

Η ανάστροφη της αντίστροφης είναι ίση με την αντίστροφη της ανάστροφης

$$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$$

Η αντίστροφη μιας συμμετρικής μήτρας είναι μήτρα συμμετρική

Η αντίστροφη μιας αντισυμμετρικής μήτρας είναι μήτρα αντισυμμετρική

Αντιστροφή Μήτρας (5)

Αντίστροφη μήτρας 2x2

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Αντίστροφη του γινομένου αντιστρέψιμων μητρών

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Υπολογισμός Αντίστροφης Μήτρας (1)

1). Χρήση των αλγεβρικών συμπληρωμάτων των στοιχείων της μήτρας A

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{|A|}(-1)^{i+j}\,|M_{ji}|$$

2). Χρήση επαυξημένης μήτρας και της απαλοιφής Gauss-Jordan

$$\left[A \;\vdots\; I\right] \sim \ldots \sim \left[I \;\vdots\; A^{-1}\right]$$

Υπολογισμός Αντίστροφης Μήτρας (2)

3). Χρήση Block μητρών

$$\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & C \end{array}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} I & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} I & -CD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$$

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης