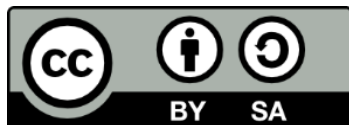


ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ & ΔΙΚΤΥΑΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Ενότητα 7: Γεωμετρία Γραμμικού Προβλήματος

Σαμαράς Νικόλαος

Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Γεωμετρία Γραμμικού Προβλήματος (3)

A_i – Συμβολίζεται η i γραμμή της μήτρας A

A_j – Συμβολίζεται η j στήλη της μήτρας A

Ορισμός. Έστω (LP) ένα γραμμικό πρόβλημα. Ένα διάνυσμα d ονομάζεται κατεύθυνση (direction), αν ικανοποιεί τη σχέση

$$A_i \cdot d = 0$$

\forall ισοτικό περιορισμό i του γραμμικού προβλήματος.

Γεωμετρία Γραμμικού Προβλήματος (4)

Αν x είναι εφικτό σημείο ενός γραμμικού προβλήματος στην τυποποιημένη μορφή

$$\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$$

όπου $c, x \in \mathcal{R}^n$, $b \in \mathcal{R}^m$ και $A \in \mathcal{R}^{m \times n}$ και το διάνυσμα d είναι κατεύθυνση, τότε κάθε σημείο $y = x + td$ ικανοποιεί τη σχέση $Ay = b$.

Σε ένα Γ.Π. στην κανονική (ανισοτική) μορφή με $x \in \mathcal{R}^n$ κάθε διάνυσμα $d \in \mathcal{R}^n$ είναι κατεύθυνση.

Γεωμετρία Γραμμικού Προβλήματος (5)

Ορισμός. Δοθέντος ενός εφικτού σημείου x ενός οποιουδήποτε γραμμικού προβλήματος, ένα διάνυσμα d είναι εφικτό, αν υπάρχουν θετικές τιμές (οσοδήποτε μικρές) της παραμέτρου t έτσι ώστε τα σημεία $x + td$ να είναι εφικτά.

Ορισμός. Δοθέντος ενός γραμμικού προβλήματος ένα σημείο x είναι εσωτερικό (interior), αν είναι εφικτό και επιπλέον ικανοποιεί σαν αυστηρή ανισότητα κάθε ανισοτικό περιορισμό. Ένα σημείο είναι συνοριακό (boundary), αν είναι εφικτό και υπάρχει τουλάχιστον ένας ανισοτικός περιορισμός, ο οποίος ικανοποιείται σαν ισότητα από το σημείο x .

Γεωμετρία Γραμμικού Προβλήματος (6)

Μια κατεύθυνση d είναι εφικτή σε ένα εσωτερικό σημείο $x > 0$.

Αν x συνοριακό σημείο, τότε μερικές κατευθύνσεις είναι εφικτές στο x και μερικές όχι.

Συγκεκριμένα,

Αν $x_i = 0 \wedge d_i < 0$ – d όχι εφικτή στο συνοριακό σημείο x

Αν $x_i = 0 \wedge d_i \geq 0$ – d εφικτή στο συνοριακό σημείο x

Δοθέντος ενός εφικτού σημείου x και μιας εφικτής κατεύθυνσης d , μέγιστο βήμα t^* ονομάζεται η μέγιστη τιμή της παραμέτρου t : τα σημεία $x + td$, $0 \leq t \leq t^*$ να είναι εφικτά. Το t ονομάζεται βήμα.

Γεωμετρία Γραμμικού Προβλήματος (7)

Η διαδικασία για τον υπολογισμό του μέγιστου βήματος t^* ονομάζεται τεστ ελαχίστου λόγου (minimum ratio test)

Επιλύνοντας τις ανισότητες $x_i + td_i \geq 0$, $i=1, 2, \dots, n$ προκύπτει

$$t^* = \min \left\{ \frac{x_i}{-d_i} : d_i < 0 \right\}$$

Χρήσιμες ιδιότητες: $\min\{\emptyset\} = +\infty$
 $\max\{\emptyset\} = -\infty$

Παράδειγμα

Δίνεται το Γ.Π. $\max\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$, όπου

$$c^T = [8 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 2]$$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Δίνονται επίσης τα σημεία $y = [1, 1, 1, 1, 1]^T$ και $w = [0, 1, 0, 1, 0]^T$. Να ελεγχθεί αν τα σημεία y και w είναι εφικτά, εσωτερικά ή συνοριακά. Επίσης, να εξεταστεί αν τα διανύσματα $d = [1, 1, 1, 0, 0]^T$ και $f = [2, 0, -2, -2, 0]^T$ είναι εφικτά ή όχι στα σημεία y και w . Για κάθε εφικτή κατεύθυνση να υπολογιστούν τα μέγιστα βήματα t^* .

Γεωμετρία Γραμμικού Προβλήματος (8)

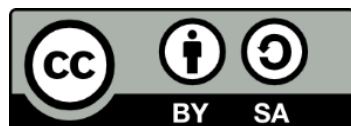
Έστω $c^T x$ μια αντικειμενική συνάρτηση και d ένα διάνυσμα. Το d ονομάζεται ανηφορικό (ascent) αν ισχύει $c^T x < c^T(x+td) \forall t > 0$ και κατηφορικό αν ισχύει $c^T x > c^T(x+td) \forall t > 0$.

Ένα διάνυσμα d ονομάζεται βελτιώνον (improving) αν

- Το Γ.Π. είναι \min και d κατηφορικό
- Το Γ.Π. είναι \max και d ανηφορικό

Θεώρημα. Έστω $c^T x$ η αντικειμενική συνάρτηση ενός Γ.Π. Μια κατεύθυνση d είναι κατηφορική(ανηφορική) αν $c^T d < 0$ ($c^T d > 0$).

Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

