ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ & ΔΙΚΤΥΑΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Ενότητα 5: Τεχνικές Κλιμάκωσης, Γεωμετρία Γραμμικού Προβλήματος

Σαμαράς Νικόλαος

Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Τεχνικές Κλιμάκωσης (1)

Αδυναμία επίλυσης Γ.Π. μεγάλης κλίμακας → Ύπαρξη στοιχείων περιστροφής με απόλυτη τιμή κοντά στο μηδέν.

Η ύπαρξη τέτοιων στοιχείων περιστροφής οφείλεται στη μεγάλη διάσταση των προβλημάτων και στη διαφορά μεγέθους των τιμών των στοιχείων της μήτρας των συντελεστών A.

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να ξεπεραστεί αν η μήτρα των περιορισμών A περιλαμβάνει στοιχεία των οποίων οι τιμές δεν διαφέρουν σημαντικά σε μέγεθος. Τέτοιες μήτρες ονομάζονται *καλά-κλιμακωμένες (well-scaled)*

Τεχνικές Κλιμάκωσης (2)

Γραμμικά προβλήματα με μήτρες καλά-κλιμακωμένες προάγουν την *αριθμητική ακρίβεια (arithmetic accuracy)* των αλγορίθμων και μειώνουν δραματικά την υπολογιστική προσπάθεια που απαιτείται για την επίλυσή τους.

Για τη μετατροπή μιας μήτρας σε καλά-κλιμακωμένη μήτρα έχουν αναπτυχθεί αρκετές τεχνικές.

Οι τεχνικές αυτές ονομάζονται *τεχνικές κλιμάκωσης (scaling techniques).* Οι πρώτες από αυτές και οι πιο καθιερωμένες αναπτύχθηκαν από τον Tomlin.

Τεχνικές Κλιμάκωσης (3)

<u>Η *τεχνική της ισορρόπησης (equilibration technique).*</u>

Εύρεση του μεγαλύτερου κατά απόλυτη τιμή στοιχείου κάθε στήλης της μήτρας A από τη σχέση

$$\text{colmax}(j) = \max \{|a_{ij}| : i = 1, 2, ..., m\}, j = 1, 2, ..., n$$

και πολλαπλασιασμός της στήλης $A_{.j}$, j = 1, 2, ..., n με τον αριθμό 1/colmax(j) έτσι ώστε το μεγαλύτερο στοιχείο της να είναι +1 ή -1.

Τεχνικές Κλιμάκωσης (4)

Στη συνέχεια γίνεται έλεγχος αν κάθε γραμμή της μήτρας Α περιλαμβάνει τη μονάδα ως μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο.

Αν δεν την περιλαμβάνει τότε επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία με την κλιμάκωση κατά στήλες. Το μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο κάθε γραμμής βρίσκεται από τη σχέση

$$\text{rowmax}(j) = \max\{|a_{ij}| : j = 1, 2, ..., n\}, i = 1, 2, ..., m$$

Τεχνικές Κλιμάκωσης (5)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1.Πρέπει να σημειωθεί ότι ενώ η εύρεση του μεγαλύτερου κατά απόλυτη τιμή στοιχείου κάθε στήλης (γραμμής) γίνεται από τη μήτρα A, ο πολλαπλασιασμός με τον αριθμό 1/colmax (1/rowmax) περιλαμβάνει και τα διανύσματα κόστους (δεξιού μέρους).

2.Η βέλτιστη λύση ενός *κλιμακωμένου Γ.Π. (scaled linear problem)* διαφέρει από τη βέλτιστη λύση του αρχικού Γ.Π. Η μετατροπή από την κλιμακωμένη βέλτιστη λύση σ' αυτήν του αρχικού προβλήματος γίνεται από τις σχέσεις

$$(\text{colmulti})^T \otimes x \text{ και } (\text{rowmulti})^T \otimes x$$

3.Η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι ίδια και στα δύο προβλήματα (κλιμακωμένο και αρχικό).

Παράδειγμα (1)

Να εφαρμοστεί η τεχνική κλιμάκωσης της ισορρόπησης στο παρακάτω Γ.Π. που δίνεται σε μορφή μητρών.

c = [-10 30 -20 50], min

A =

100	**-5**	**3**	**200**
20	**-100**	**4**	**8**
12	**-10**	**10**	**4**
-8	**80**	**4**	**14**

b =

10
20
30
40

Παράδειγμα (2)

Εύρεση του μεγαλύτερου κατά απόλυτο τιμή στοιχείου κάθε στήλης του A.

```
c = [-10    30   -20    50]
A =
   100    -5     3   200
    20  -100     4     8
    12   -10    10     4
    -8    80     4    14
b =
    10
    20
    30      Colmulti = [1/100 1/100 1/10 1/200]
    40
```

Παράδειγμα (3)

Μετά τον πολλαπλασιασμό κάθε στήλης του A και του c με το colmulti έχουμε

```
c = [-0.1   0.3   -2.0     0.25]
A =
   1.00    -0.05     0.30   1.00
   0.20    -1.00     0.40   0.04
   0.12    -0.10     1.00   0.02
  -0.08     0.80     0.40   0.07
b =
     10
     20
     30
     40
```

Παράδειγμα (4)

Έλεγχος αν κάθε γραμμή και στήλη περιλαμβάνει ως μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή τα +1 ή -1.

```
c = [-0.1   0.3   -2.0    0.25]
A =
   1.00    -0.05     0.30   1.00
   0.20    -1.00     0.40   0.04
   0.12    -0.10     1.00   0.02
  -0.08     0.80     0.40   0.07
b =
     10
     20
     30
     40
```

Παράδειγμα (5)

Μετά την εφαρμογή της τεχνικής κλιμάκωσης, οι μήτρες του αρχικού Γ.Π. μετατρέπονται σε

```
c = [-0.1000    0.3000   -2.0000    0.2500]
A =
    1.0000   -0.0500    0.3000    1.0000
    0.2000   -1.0000    0.4000    0.0400
    0.1200   -0.1000    1.0000    0.0200
   -0.1000    1.0000    0.5000    0.0875
b =
    10
    20
    30
    50
```

Άσκηση (1)

Να εφαρμοστεί η τεχνική κλιμάκωσης της ισορρόπησης στο παρακάτω Γ.Π. που δίνεται σε μορφή μητρών.

```
c = [50     -100   50     -25]
A =
   100   -50     50     20
    10  5000     25  -2000
   200  -100    100    -50
  1000   250    -50   -100
b =
    100
    200
    300
    400
```

Άσκηση (2)

```
c = [0.0500   -0.0200    0.5000   -0.0125]
```

```
A = 0.2000   -0.0200    1.0000    0.0200
    0.0100    1.0000    0.2500   -1.0000
    0.2000   -0.0200    1.0000   -0.0250
    1.0000    0.0500   -0.5000   -0.0500
```

```
b =200
   200
   300
   400
```

Τεχνικές Κλιμάκωσης (6)

Η *τεχνική του γεωμετρικού μέσου (geometric mean).*

Εύρεση του μεγαλύτερου κατά απόλυτη τιμή στοιχείου και του μικρότερου κατά απόλυτη τιμή στοιχείου κάθε στήλης της μήτρας A από τις σχέσεις

$$colmax(j) = \max \{|a_{ij}| : i = 1, 2, ..., m\}, j = 1, 2, ..., n$$

και

$$colmin(j) = \min \{|a_{ij}| : i = 1, 2, ..., m\}, j = 1, 2, ..., n$$

Τεχνικές Κλιμάκωσης (7)

Στη συνέχεια υπολογισμός της ποσότητας

$$mc(j) = \sqrt{\operatorname{col}\max(j)\operatorname{col}\min(j)}$$

και πολλαπλασιασμός της στήλης $A_{.j}$, j = 1, 2, ..., n με τον αριθμό 1/mc(j) έτσι ώστε το μεγαλύτερο στοιχείο της μετά τις πράξεις να είναι

$$\beta(j) = \pm\frac{\sqrt{\operatorname{col}\max(j)}\sqrt{\operatorname{col}\min(j)}}{\operatorname{col}\min(j)}$$

Τεχνικές Κλιμάκωσης (8)

Στη συνέχεια επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία για κάθε γραμμή της μήτρας Α.

Το μεγαλύτερο και το μικρότερο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο κάθε γραμμής βρίσκεται από τις σχέσεις

$$rowmax(i) = \max \{|a_{ij}| : j = 1, 2, ..., n\}, i = 1, 2, ..., m$$

και

$$rowmin(i) = \min \{|a_{ij}| : j = 1, 2, ..., n\}, i = 1, 2, ..., m$$

Τεχνικές Κλιμάκωσης (9)

Στη συνέχεια υπολογισμός της ποσότητας

$$\mathrm{mr(i)} = \sqrt{\mathrm{row\ max(i)row\ min(i)}}$$

και πολλαπλασιασμός της γραμμής $A_{i.}$, i = 1, 2, ..., m με τον αριθμό 1/mr(i) έτσι ώστε το μεγαλύτερο στοιχείο της μετά τις πράξεις να είναι

$$\beta(\mathrm{i}) = \pm \frac{\sqrt{\mathrm{row\ max(i)}}\sqrt{\mathrm{row\ min(i)}}}{\mathrm{row\ min(i)}}$$

Τεχνικές Κλιμάκωσης (10)

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ</u>

1.Πρέπει να σημειωθεί ότι ενώ η εύρεση του μεγαλύτερου και μικρότερου κατά απόλυτη τιμή στοιχείου κάθε στήλης (γραμμής) γίνεται από τη μήτρα A, ο πολλαπλασιασμός με τον αριθμό 1/mc (1/mr) περιλαμβάνει και τα διανύσματα κόστους (δεξιού μέρους).
2.Η βέλτιστη λύση ενός *κλιμακωμένου Γ.Π. (scaled linear problem)* διαφέρει από τη βέλτιστη λύση του αρχικού Γ.Π. Η μετατροπή από την κλιμακωμένη βέλτιστη λύση σ’ αυτήν του αρχικού προβλήματος γίνεται από τις σχέσεις

$$(\text{colmulti})^T \otimes x \text{ και } (\text{rowmulti})^T \otimes x$$

3.Η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι ίδια και στα δύο προβλήματα (κλιμακωμένο και αρχικό).

Παράδειγμα (1)

Να εφαρμοστεί η τεχνική κλιμάκωσης του γεωμετρικού μέσου στο παρακάτω Γ.Π. που δίνεται σε μορφή μητρών.

```
c = [-10    30   -20    50]
A =
   100     -5      3   200
    20   -100      4     8
    12    -10     10     4
    -8     80      4    14
b =
    10
    20
    30
    40
```

Παράδειγμα (2)

Εύρεση του μεγαλύτερου και του μικρότερου κατά απόλυτο τιμή στοιχείου κάθε στήλης του A.

```
c = [-10    30   -20    50]
A =
   100    -5     3   200
    20  -100     4     8
    12   -10    10     4
    -8    80     4    14
b =
    10
    20
    30   Colmulti=[197/5572 707/15809 461/2525 197/5572]
    40
```

Παράδειγμα (3)

Μετά τον πολλαπλασιασμό κάθε στήλης του A και του c με το colmulti έχουμε

```
c = [-0.3536    1.3416   -3.6515    1.7678]
A =
    3.5355   -0.2236    0.5477    7.0711
    0.7071   -4.4721    0.7303    0.2828
    0.4243   -0.4472    1.8257    0.1414
   -0.2828    3.5777    0.7303    0.4950
b =
    10
    20
    30
    40
```

Παράδειγμα (4)

Επαναλαμβάνεται για κάθε γραμμή της μήτρας A η ίδια διαδικασία.

```
c = [-0.3536    1.3416   -3.6515    1.7678]
A =
    3.5355   -0.2236    0.5477    7.0711
    0.7071   -4.4721    0.7303    0.2828
    0.4243   -0.4472    1.8257    0.1414
   -0.2828    3.5777    0.7303    0.4950
b =
    10
    20
    30
    40
```

Rowmulti=[1146/1441 1228/1381 1669/848 1363/1371]

Παράδειγμα (5)

Μετά την εφαρμογή της τεχνικής κλιμάκωσης, οι μήτρες του αρχικού Γ.Π. μετατρέπονται σε

```
c = [-0.3536    1.3416   -3.6515    1.7678]
A =
    2.8117   -0.1778    0.4356    5.6234
    0.6287   -3.9764    0.6494    0.2515
    0.8349   -0.8801    3.5930    0.2783
   -0.2812    3.5566    0.7260    0.4920
b =
    7.9527
   17.7828
   59.0397
   39.7635
```

Άσκηση (1)

Να εφαρμοστεί η τεχνική κλιμάκωσης του γεωμετρικού μέσου στο παρακάτω Γ.Π. που δίνεται σε μορφή μητρών.

```
c = [50    -100   50    -25]
A =
   100   -50     50     20
    10  5000     25  -2000
   200  -100    100    -50
  1000   250    -50   -100
b =
    100
    200
    300
    400
```

Άσκηση (2)

```
c = [1/2   -1/5     1    -1/8 ]
```

```
A = 721/228  -228/721    721/228   228/721
      1/10       10         1/2        -10
    721/228  -228/721    721/228  -285/721
   2889/646   646/2889 -1292/2889 -646/2889
```

```
b = 1939/101
        200
     19448/41
     17173/96
```

Γεωμετρία Γραμμικού Προβλήματος (1)

Αλγόριθμοι δημιουργούν μια ακολουθία σημείων

$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$: $x^{(k)}$ βέλτιστο ή
$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots,$: το όριο της να είναι βέλτιστο

$x^{(k)} \in \Re^n \rightarrow d \in \Re^n$: $x^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)} + td$: $t>0$

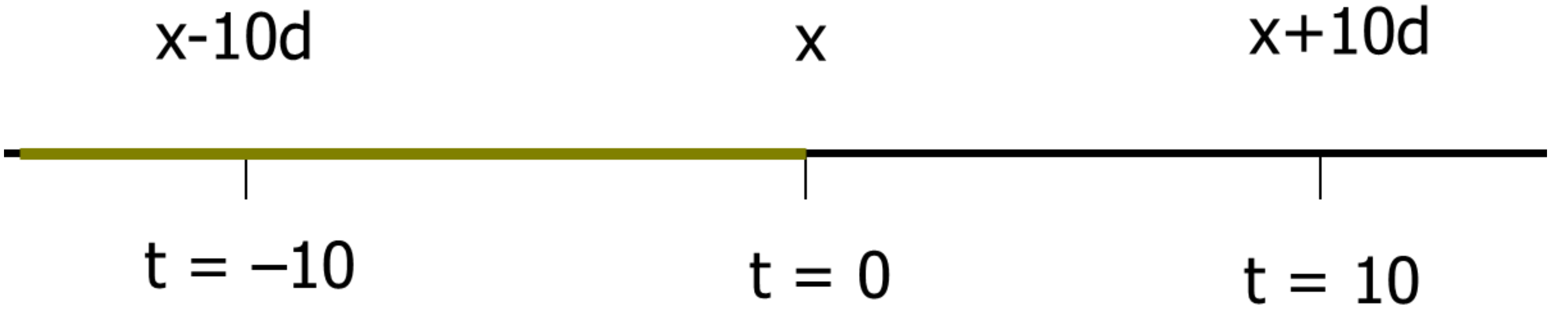
$\{x+td: -\infty<t<+\infty\} \Rightarrow$ ευθεία

$\{x+td: t\geq 0\} \Rightarrow$ ημιευθεία (halfline) ή ακτίνα (ray)

Ακτίνα $\Rightarrow R(x, d)$, αρχή το σημείο x και είναι // d

Γεωμετρία Γραμμικού Προβλήματος (2)

$\forall\ -\infty<t<+\infty$ το σημείο x+td μετακινείται πάνω στην ευθεία



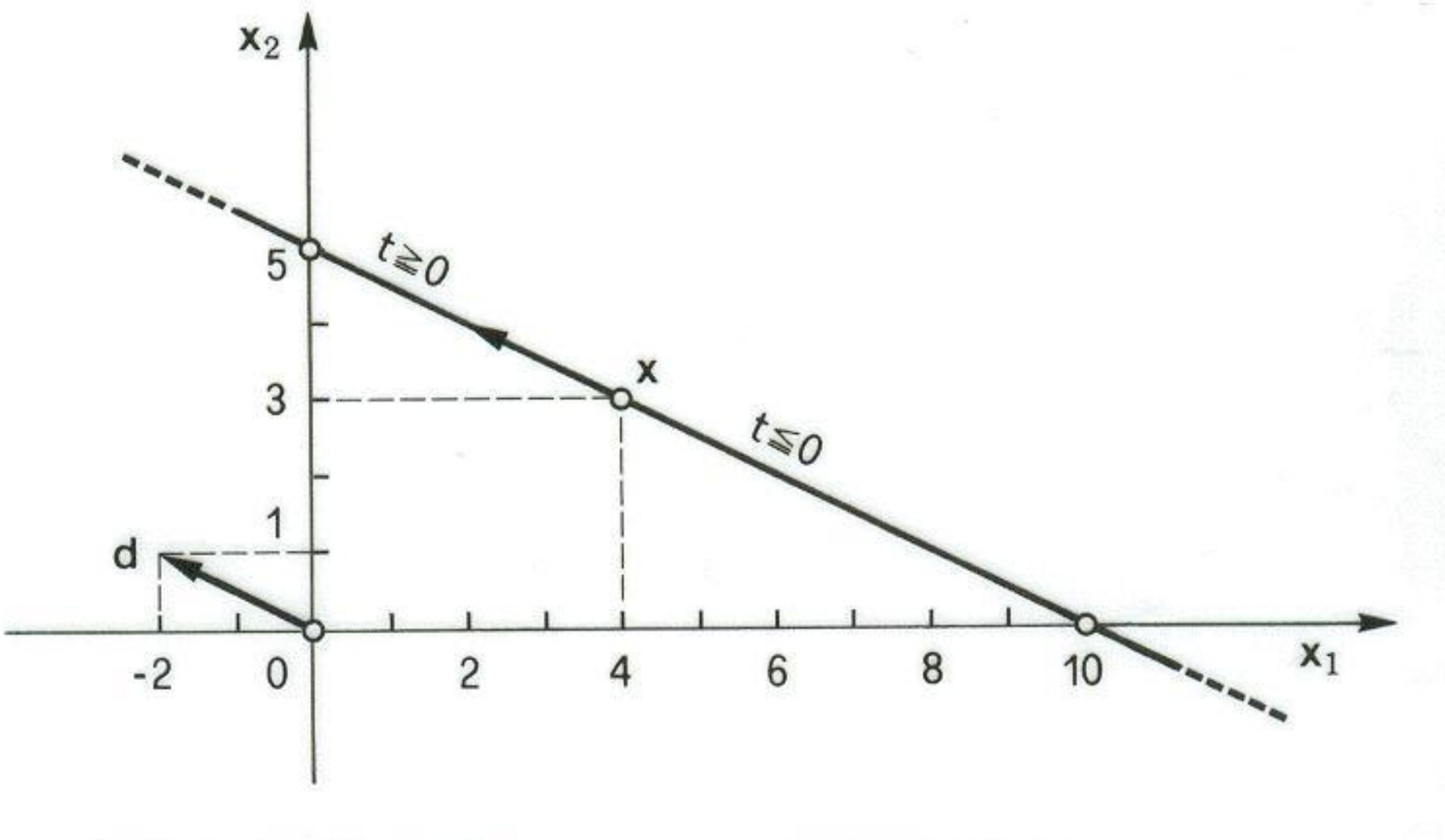
Το διάνυσμα d ονομάζεται και διάνυσμα κίνησης.

Παράδειγμα (1)

Έστω ότι $x^T = (4, 3)$ και $d^T = (-2, 1)$, τα σημεία της ευθείας $\{x + td : -\infty < t < \infty\}$ έχουν συντεταγμένες που δίνονται από τη σχέση

$$x + td = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 2t \\ 3 + t \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα (2)



Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης