ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ & ΔΙΚΤΥΑΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Ενότητα 4: Μετασχηματισμοί Ισοδυναμίας

Σαμαράς Νικόλαος

Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Μετασχηματισμοί Ισοδυναμίας (6)

Μετατροπή από τυποποιημένη σε κανονική μορφή (Ισοτικοί περιορισμοί $\rightarrow$ Ανισοτικοί Περιορισμοί)

$$\boxed{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b}$$

$$\boxed{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq b}$$

$$\boxed{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geq b}$$

Μετασχηματισμοί Ισοδυναμίας (7)

Υπολογιστικό μειονέκτημα: Αύξηση των περιορισμών

$$\boxed{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b}$$

$$\Big\downarrow{\scriptstyle a_1 \neq 0}$$

$$\boxed{x_1 = (b - (a_2x_2 + \ldots + a_nx_n))/a_1}$$

$$\boxed{x_1 \geq 0}$$

$$\boxed{(a_2/a_1)x_2 + (a_3/a_1)x_3 + \ldots + (a_n/a_1)x_n \leq b/a_1}$$

Μετασχηματισμοί Ισοδυναμίας (8)

Έκφραση του ισοτικού περιορισμού ως προς μια μεταβλητή x_j με $a_{ij} \neq 0$.

Απαλοιφή της x_j από τους υπόλοιπους περιορισμούς και από την αντικειμενική συνάρτηση.

Το νέο πρόβλημα έχει μια μεταβλητή λιγότερη και έναν ισοτικό περιορισμό λιγότερο.

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρις ότου απαλειφθούν όλοι οι ισοτικοί περιορισμοί.

Παράδειγμα (1)

Δίνεται το παρακάτω Γ.Π. στην τυποποιημένη μορφή

$$
\begin{array}{lllllllll}
\min & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & \\
\text{μ.π.} & & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 5 \\
& & 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 4 \\
& & 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 9
\end{array}
$$

$$x_j \geq 0, \ (j = 1, 2, 3, 4)$$

Να μετατραπεί στην κανονική μορφή.

Παράδειγμα (2)

Μετά την απαλοιφή της x_1 από την αντικειμενική συνάρτηση και τους υπόλοιπους περιορισμούς, το Γ.Π. που προκύπτει έχει τη μορφή

$$
\begin{array}{llrcrcrcr}
\min & z = & 5x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & + & 10 \\
\text{μ.π.} & & -x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & \leq & 5 \\
& & 4x_2 & - & 5x_3 & - & 3x_4 & = & -6 \\
& & 4x_2 & - & 5x_3 & - & 3x_4 & = & -6
\end{array}
$$

$$x_j \geq 0, \ (j = 2, 3, 4)$$

Παράδειγμα (3)

Μετά την απαλοιφή της x_2 από την αντικειμενική συνάρτηση και τους υπόλοιπους περιορισμούς, το Γ.Π. που προκύπτει έχει τη μορφή

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\min \quad z = & (13/4)x_3 & + & (7/4)x_4 & + & 10/4 \\
\mu.\pi. & (3/4)x_3 & + & (1/4)x_4 & \leq & 14/4 \\
 & (-5/4)x_3 & - & (3/4)x_4 & \leq & -6/4
\end{array}
$$

$$x_j \geq 0, \ (j = 3, 4)$$

Μετασχηματισμοί Ισοδυναμίας (9)

Μετατροπή από γενική σε τυποποιημένη μορφή

$$
\begin{array}{lllllllll}
\text{min (max)} & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \dots & + & c_nx_n & & \\
\text{μ.π.} & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_nx_n & \otimes & b_1 \\
 & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & \otimes & b_2 \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & \otimes & b_m
\end{array}
$$

$l_j \leq x_j \leq u_j$, $j=1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n$, x_k-ελεύθερη

$\otimes = \{\geq, =, \leq\}$ $l_j \leq x_j \leq u_j$, περιορισμοί ορίων

Μετασχηματισμοί Ισοδυναμίας (10)

$x_j \le u_j \Rightarrow x_j + x_{n+1} = u_j \Rightarrow x_j = u_j - x_{n+1}$
Αντικατάσταση x_j στο Γ.Π.

$x_j \ge l_j \Rightarrow x_j - x_{n+1} = l_j \Rightarrow x_j = l_j + x_{n+1}$
Αντικατάσταση x_j στο Γ.Π.

$l_j \le x_j \le u_j \Rightarrow 0 \le x_j - l_j \le u_j - l_j \Rightarrow$

- $y = x_j - l_j \ge 0 \Rightarrow x_j = y + l_j$
  Αντικατάσταση χ_j στο Γ.Π.
- $y \le u_j - l_j \Rightarrow y + x_{n+1} = u_j - l_j$
  Παραμένει ο περιορισμός στο Γ.Π.

Μετασχηματισμοί Ισοδυναμίας (11)

x_j – ελεύθερη μεταβλητή

Ισοτικό περιορισμό $a_i x_i + x_j = b_i \Rightarrow x_j = b_i - a_i x_i$

Αντικατάσταση x_j στο Γ.Π.
Διαγραφή του ισοτικού περιορισμού από το Γ.Π.

Ένας ανισοτικός περιορισμός μπορεί να διαγραφεί αν είναι περιττός ή πλεονασματικός (redundant).

Ένας περιορισμός είναι περιττός αν επαληθεύεται από κάθε σημείο που επαληθεύει όλους τους υπόλοιπους περιορισμούς.

Παράδειγμα (1)

Δίνεται το παρακάτω γενικό Γ.Π.

$$
\begin{array}{llrrrrrrrrl}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & - & x_4 & & \\
\text{μ.π.} & & 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 5 \\
 & & x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & \geq & 4 \\
 & & -x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & \leq & 3
\end{array}
$$

x_1 ελεύθερη, $x_2 \geq -1$, $x_3 \leq 1$, $-1 \leq x_4 \leq 1$

Να μετατραπεί στην τυποποιημένη μορφή.

Παράδειγμα (2)

Μετά τη μετατροπή σε min και τη μετατροπή των ανισοτικών τεχνολογικών περιορισμών σε ισοτικούς το πρόβλημα γράφεται

$$\begin{array}{llrcrcrcrcrcl}
\min & z = & -2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & & & & \\
\mu.\pi. & & 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & & & = & 5 \\
& & x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & - & x_5 & = & 4 \\
& & -x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & + & x_6 & = & 3
\end{array}$$

x_1 ελεύθερη, $x_2 \geq -1$, $x_3 \leq 1$, $-1 \leq x_4 \leq 1$, $x_5, x_6 \geq 0$

Παράδειγμα (3)

- Οι προηγούμενες αλλαγές μετατρέπουν το αρχικό Γ.Π. στο πρόβλημα με μορφή

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrr}
\min & -2x_1 & - & 3(y_2-1) & + & 4(1-y_3) & + & (y_4-1) & & & & \\
\text{μ.π.} & 2x_1 & - & (y_2-1) & + & 3(1-y_3) & + & (y_4-1) & & & = & 5 \\
 & x_1 & + & 3(y_2-1) & + & 2(1-y_3) & - & 2(y_4-1) & -x_5 & & = & 4 \\
 & -x_1 & - & (y_2-1) & + & 3(1-y_3) & + & (y_4-1) & + & x_6 & = & 3 \\
 & & & & & & & y_4 & + & y_5 & = & 2 \\
 & y_2, & & y_3, & & y_4, & & y_5, & x_5, & x_6 & \geq & 0
\end{array}
$$

Το τελευταίο πρόβλημα μετά τις πράξεις γράφεται

$$
\begin{array}{llllllllllllll}
\min & -2x_1 & - & 3y_2 & - & 4y_3 & + & y_4 & + & 6 & & & & \\
\text{μ.π.} & 2x_1 & - & y_2 & - & 3y_3 & + & y_4 & & & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & 3y_2 & - & 2y_3 & - & 2y_4 & -x_5 & & & & = & 3 \\
 & -x_1 & - & y_2 & - & 3y_3 & + & y_4 & & + & & x_6 & = & 0 \\
 & & & & & & & y_4 & & + & & y_5 & = & 2 \\
 & & y_2, & & y_3, & & y_4, & y_5, & x_5, & & & x_6 & \geq & 0
\end{array}
$$

Παράδειγμα (5)

Το τελευταίο πρόβλημα μετά την αντικατάσταση της ελεύθερης μεταβλητής x_1 και την απαλοιφή του σταθερού όρου από την αντικειμενική συνάρτηση γράφεται

$$
\begin{array}{llllllllllllll}
\min & 3y_2 & - & 8y_3 & - & 3y_4 & - & 2x_5 & & & & \\
\text{μ.π.} & -7y_2 & + & y_3 & + & 5y_4 & + & 2x_5 & & & = & -4 \\
 & 2y_2 & - & 5y_3 & - & y_4 & - & x_5 & + & x_6 & = & 3 \\
 & & & & & y_4 & + & y_5 & & & = & 2 \\
 & & & y_2, & y_3, & y_4, & & y_5, & x_5, & x_6 & \geq & 0
\end{array}
$$

Οδηγός μετατροπής από τη γενική στην τυποποιημένη μορφή

•Μετατροπή του τύπου της αντικειμενικής συνάρτησης σε min.

• Μετατροπή στην τυποποιημένη μορφή (ανισοτικοί περιορισμοί → ισοτικοί περιορισμοί)

• Μετατροπή των μονών περιορισμών ορίων των μεταβλητών σε ισοτικούς και αντικατάσταση των αρχικών μεταβλητών x_j, j=1, …, n στο Γ.Π.

• Μετατροπή των διπλών περιορισμών ορίων των μεταβλητών σε ισοτικούς.

• Απαλοιφή (αν γίνεται) των ελεύθερων μεταβλητών από το πρόβλημα.

Άσκηση (1)

Δίνεται το παρακάτω γενικό Γ.Π.

$$
\begin{array}{llrcrcrcr}
\max & z = & -x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & & \\
\text{μ.π.} & & 2x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & \leq & 12 \\
 & & x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 7 \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & \leq & 8
\end{array}
$$

x_1 – ελεύθερη, $x_2 \geq 0$, $1 \leq x_3 \leq 2$

Να μετατραπεί στην τυποποιημένη μορφή.

Άσκηση (2)

Μετά την προσθήκη των χαλαρών μεταβλητών το Γ.Π. είναι

$$
\begin{array}{llrrrrrrrrrrr}
\min & z = & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & & & & & & \\
\mu.\pi. & & 2x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 12 \\
 & & x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & & & & = & 7 \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & & & + & x_5 & = & 8
\end{array}
$$

x_1 – ελεύθερη, $x_2 \geq 0$, $1 \leq x_3 \leq 2$, $x_4, x_5 \geq 0$

Άσκηση (3)

Οι προηγούμενες αλλαγές μετατρέπουν το αρχικό Γ.Π. στο πρόβλημα με μορφή

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
\min & x_1 & - & 2x_2 & + & 3y_3 & + & 3 & & & & & & \\
\text{μ.π.} & 2x_1 & - & 4x_2 & + & y_3 & + & x_4 & & & & & = & 11 \\
 & x_1 & + & x_2 & - & 2y_3 & & & & & & & = & 9 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & - & 5y_3 & & & & & + & x_5 & = & 13 \\
 & & & & & y_3 & & & & & + & y_4 & = & 1 \\
 & & & x_2, & & y_3, & & y_4, & & & & x_4,\; x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Άσκηση (4)

Το τελευταίο πρόβλημα μετά την αντικατάσταση της ελεύθερης μεταβλητής x_1 γράφεται

$$
\begin{array}{llllllll}
\min & -3x_2 & + & 5y_3 & + & 12 & & \\
\text{μ.π.} & -6x_2 & + & 5y_3 & + & x_4 & & = -7 \\
 & -x_2 & - & y_3 & & & + \; x_5 & = -5 \\
 & & & y_3 & & & + \; y_4 & = 1 \\
 & x_2, & & y_3, & & y_4, \quad x_4, & x_5 & \geq 0
\end{array}
$$

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ