# ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ & ΔΙΚΤΥΑΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

## Ενότητα 3: Μαθηματικό Πρότυπο, Κανονική Μορφή, Τυποποιημένη Μορφή

**Σαμαράς Νικόλαος**

**Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής**

# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

# Χρηματοδότηση


- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Μαθηματικό Πρότυπο (1)

$$
\begin{array}{llccccccccc}
\min & z = & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \ldots & + & c_nx_n & & \\
\mu.\pi. & & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_nx_n & \oplus & b_1 \\
 & & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & \oplus & b_2 \quad (\Gamma.\Pi.1) \\
 & & \ldots\ \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \oplus & b_m
\end{array}
$$

# Μαθηματικό Πρότυπο (2)

•Δεδομένα προβλήματος
$c_j$, $a_{ij}$, $b_i$, $(i = 1, 2, ..., m) \wedge (j = 1, 2, ..., n)$

• min $\rightarrow$ "να βρεθεί το ελάχιστο της συνάρτησης"
• max $\rightarrow$ "να βρεθεί το μέγιστο της συνάρτησης"
• μ.π. $\rightarrow$ "με περιορισμούς"

• $\oplus = \{=, \geq, \leq\}$ (Είδος περιορισμού)

• Μεταβλητές $x_1, x_2, ..., x_n$ $\rightarrow$ "άγνωστες μεταβλητές"

• Ζητούμενο $\rightarrow$ οι τιμές των αγνώστων έτσι ώστε η τιμή της z να είναι ελάχιστη και ταυτόχρονα να ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί.

# Μαθηματικό Πρότυπο (3)

- $x_j$, ($j = 1, 2, ..., n$) $\rightarrow$ "μεταβλητές απόφασης" (decision variables)

- Η συνάρτηση z $\rightarrow$ "αντικειμενική συνάρτηση" (objective function)

- Οι τιμές της z $\rightarrow$ "αντικειμενικές τιμές" (objective values)

- Οι ανισότητες και ισότητες που πρέπει να ικανοποιούν οι μεταβλητές απόφασης, $\rightarrow$ "περιορισμοί"(constraints)

# Μαθηματικό Πρότυπο (4)

•Ισότητες → "ισοτικούς περιορισμούς" (equality constraints)

• Ανισότητες → "ανισοτικούς περιορισμούς" (inequality constraints)

• Ένα Γ.Π. στο οποίο ζητείται να βρεθεί το ελάχιστο → "πρόβλημα ελαχιστοποίησης" (minimization problem)

• Ένα Γ.Π. στο όποιο ζητείται το μέγιστο → "πρόβλημα μεγιστοποίησης" (maximization problem)

# Μαθηματικό Πρότυπο (5)

• $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, ..., n$ $\rightarrow$ "περιορισμοί μη αρνητικότητας" (non negativity constraints) ή "φυσικούς περιορισμούς" (natural constraints).

• Οι υπόλοιποι περιορισμοί $\rightarrow$ "τεχνολογικοί περιορισμοί" (technological constraints).

• Τα Γ.Π. της μορφής (Γ.Π.1) $\rightarrow$ "Γ.Π. τύπου Α"

# Μαθηματικό Πρότυπο (6)

Συμπαγής μορφή (χρήση μητρών και διανυσμάτων)

$$
\begin{array}{llll}
\text{min (ή max)} \quad z = & c^T x & & \\
\text{μ.π.} & Ax \;\oplus\; b & & (\Gamma.\Pi.2) \\
& x \geq 0 & &
\end{array}
$$

$c, x \in \Re^n$, $b \in \Re^m$ και $A \in \Re^{mxn}$, $\oplus = \{=, \geq, \leq\}$

# Μαθηματικό Πρότυπο (7)

• min(ή max) $\{c^T x : Ax \oplus b, \ \ x \geq 0\}$

• Σημεία που ικανοποιούν όλους του περιορισμούς $\rightarrow$ "εφικτά σημεία" (feasible points) ή "εφικτές λύσεις" (feasible solutions)

• Όλα τα υπόλοιπα $\rightarrow$ "μη εφικτά" (infeasible)

# Παράδειγμα

Δίνεται το παρακάτω Γ.Π.

$$
\begin{array}{llrcrcrcr}
\min & z = & -2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & \\
\text{μ.π.} & & 2x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & \leq & 8 \\
& & & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\
& & x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & \geq & -4
\end{array}
$$

$$x_j \geq 0, \qquad (j = 1, 2, 3)$$

Να υπολογιστούν τα c A, b, $\oplus$ και να ελεγχθεί αν τα σημεία (-1, 1, 4) και (0,1 ,2) είναι εφικτά ή όχι

# Λύση Γ.Π. (1)

•Σύνολο εφικτών σημείων $\rightarrow$ "εφικτή περιοχή" (feasible region)

•Αν η εφικτή περιοχή είναι κενό σύνολο, το Γ.Π. είναι "αδύνατο" ή "μη εφικτό" (infeasible). Διαφορετικά είναι "εφικτό" (feasible).

•Βέλτιστο (optimal) min $\rightarrow c^T x \leq c^T y$

•Βέλτιστο (optimal) max $\rightarrow c^T x \geq c^T y$

•Ένα Γ.Π. το οποίο έχει βέλτιστα σημεία ονομάζεται "βέλτιστο πρόβλημα" (optimal problem)

# Λύση Γ.Π. (2)

•Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σε ένα βέλτιστο σημείο ονομάζεται "βέλτιστη τιμή" (optimal value)

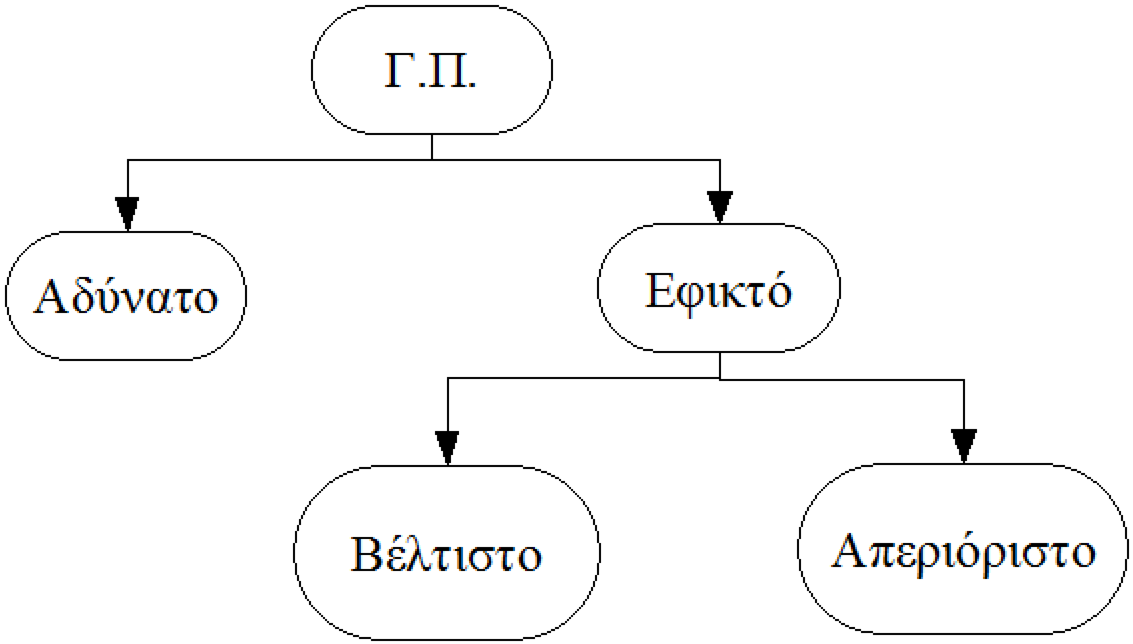
•Ένα εφικτό πρόβλημα, που δεν είναι βέλτιστο, είναι "απεριόριστο" (unbounded)

•Ένα εφικτό Γ.Π. min(ή max) είναι απεριόριστο αν υπάρχει ακολουθία εφικτών σημείων $\{x_1, x_2, \ldots\}$ τέτοια ώστε η ακολουθία των αντικειμενικών τιμών $\{c^T x_1, c^T x_2, \ldots\}$ να τείνει στο $-\infty$ ($+\infty$).

# Λύση Γ.Π. (3)

(Θεμελιώδες θεώρημα του γραμμικού προγραμματισμού).

Ένα γραμμικό πρόβλημα είναι αδύνατο ή εφικτό. Αν είναι εφικτό, τότε είναι βέλτιστο ή απεριόριστο.



# Ιδιότητες Γ.Π.

- Αναλογικότητας (proportionality)

  $c_j x_j \rightarrow$ Αν $c_j$ σταθερός αριθμός

  $a_{ij} x_j \rightarrow$ Αν $a_{ij}$ σταθερός αριθμός

- Προσθετικότητας (additivity)

  $c_j x_j$ , $c_i x_i \rightarrow c_j x_j + c_i x_i$

- Διαιρετότητας (divisibility)

  Οι $x_j$ μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή κλασματική ή ακέραια

- Αν $x_j$ ακέραιες τιμές $\rightarrow$ ακέραιο Γ.Π.

- Αν $x_j$ ακέραιες τιμές και συνεχείς τιμές $\rightarrow$ μικτό ακέραιο Γ.Π.

# Παράδειγμα

Να αποδειχτεί ότι το παρακάτω Γ.Π. είναι αδύνατο

$$
\begin{array}{llrcrcrcr}
\min & z = & -2x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & & \\
\text{μ.π.} & & 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & \geq & 5 \\
& & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \geq & 2 \\
& & 5x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & \leq & 6
\end{array}
$$

# Μορφές και Μετασχηματισμοί του Γ.Π.

- Είδη περιορισμών (=, ≥, ≤)
- Ελεύθερες μεταβλητές (free variables)
- Περιορισμούς στις μεταβλητές
- Κανονική ή ανισοτική μορφή (canonical form)
- Τυπική ή ισοτική μορφή (standard form)

# Κανονική μορφή

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| min (max) | $c_1x_1$ | + | $c_2x_2$ | + | … | + | $c_nx_n$ | | | |
| μ.π. | $a_{11}x_1$ | + | $a_{12}x_2$ | + | … | + | $a_nx_n$ | | $\otimes$ | $b_1$ |
| | $a_{21}x_1$ | + | $a_{22}x_2$ | + | … | + | $a_{2n}x_n$ | | $\otimes$ | $b_2$ |
| | … | … | … | … | … | … | … | | … | … |
| | $a_{m1}x_1$ | + | $a_{m2}x_2$ | + | … | + | $a_{mn}x_n$ | | $\otimes$ | $b_m$ |
| | | | $x_j$ | $\geq$ | 0, | | (j = 1, …,n) | | | |

min (ή max) $\{z = c^Tx : Ax \otimes b, x \geq 0\}$
όπου c, x $\in \Re^n$, b $\in \Re^m$ και A $\in \Re^{mxn}$

- $\otimes = \{\geq, \leq\}$

# Τυποποιημένη μορφή

$$
\begin{array}{llllllllll}
\text{min (max)} & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \dots & + & c_nx_n & & \\
\text{μ.π.} & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_nx_n & = & b_1 \\
 & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \\
 & & & & x_j \geq & 0, & & (j=1,\dots,n) & &
\end{array}
$$

min (ή max) $\{z = c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$

όπου $c, x \in \Re^n$, $b \in \Re^m$ και $A \in \Re^{mxn}$

# Μετασχηματισμοί Ισοδυναμίας (1)

<u>Ορισμός.</u> Δυο προβλήματα είναι *ισοδύναμα (equivalent)*, αν υπάρχει μία ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των εφικτών σημείων των και των αντίστοιχων αντικειμενικών τιμών.

Έστω A και B δυο ισοδύναμα Γ.Π.
*Το Γ.Π. A είναι βέλτιστο, αδύνατο ή απεριόριστο ανν το Γ.Π. B είναι βέλτιστο, αδύνατο ή απεριόριστο αντίστοιχα.*

• $\max \{c^T x + c_0\} = -\min \{-c^T x - c_0\}$

• Μετασχηματισμός από την κανονική στην τυποποιημένη μορφή (Ανισοτικοί περιορισμοί $\rightarrow$ Ισοτικοί Περιορισμοί)

# Μετασχηματισμοί Ισοδυναμίας (2)

$$\boxed{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \leq b}$$

$$\boxed{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + x_{n+1} = b}$$

$$\boxed{\text{και } x_{n+1} \geq 0}$$

$x_{n+1} \rightarrow$ Ελλειματική μεταβλητή (deficit variable)

# Μετασχηματισμοί Ισοδυναμίας (3)

$$\boxed{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \geq b}$$

$$\boxed{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n - x_{n+1} = b} \qquad \boxed{\text{και } x_{n+1} \geq 0}$$

$x_{n+1} \rightarrow$ Πλεονασματική μεταβλητή (surplus variable)

Ελλειματικές μεταβλητές
Πλεονασματικές μεταβλητές $\Big\}$ Χαλαρές μεταβλητές (Slack variables)

# Μετασχηματισμοί Ισοδυναμίας (4)

**Ορισμός 1.** Ένας ανισοτικός περιορισμός είναι *ενεργός (active)* στο σημείο x αν το σημείο επαληθεύει τον περιορισμό σαν ισότητα. Διαφορετικά, θα λέμε ότι ο περιορισμός είναι *μη ενεργός (non active).*

**Ορισμός 2.** Η τιμή της χαλαρής μεταβλητής $x_j$ αποκαλύπτει αν ο αντίστοιχος περιορισμός είναι ενεργός ή όχι. Αν $x_j=0$, ο περιορισμός είναι ενεργός, διαφορετικά είναι μη ενεργός. Ειδικότερα, αν είναι $x_j \geq 0$, ο περιορισμός ικανοποιείται, ενώ αν είναι $x_j<0$, δεν ικανοποιείται.

# Μετασχηματισμοί Ισοδυναμίας (5)

Οι περιορισμοί, που είναι ενεργοί στα βέλτιστα σημεία διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στη διαδικασία λήψης αποφάσεων, γιατί είναι αυτοί που περιορίζουν την παραπέρα βελτίωση της αντικειμενικής συνάρτησης.

Γι' αυτό το λόγο μερικά πληροφοριακά συστήματα αποφάσεων εκτός των άλλων πληροφοριών που δίνουν προσδιορίζουν και τους ενεργούς και μη ενεργούς περιορισμούς.

# Παράδειγμα

Το παρακάτω Γ.Π. να μετατραπεί στην τυποποιημένη μορφή με αντικειμενική συνάρτηση ελαχιστοποίησης. Στο σημείο $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$ να προσδιοριστούν οι ενεργοί και μη ενεργοί περιορισμοί. Ποιοι περιορισμοί ικανοποιούνται και ποιοι όχι;

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & 2x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & -15 & \\
\text{μ.π.} & -3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 5 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & \leq & 9 \\
 & x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 5
\end{array}
$$

$$x_j \geq 0,\ (j = 1, 2, 3)$$

# Άσκηση

Δίνεται το παρακάτω Γ.Π. και το σημείο $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$. Να προσδιοριστούν οι ενεργοί και μη ενεργοί περιορισμοί. Ποιοι περιορισμοί ικανοποιούνται και ποιοι όχι;

$$
\begin{array}{llrcrcrcr}
\text{min} & & -4x_1 & + & 7x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{μ.π.} & & -3x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & \geq & 0 \\
 & & -2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & \geq & -3 \\
 & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & \leq & 6
\end{array}
$$

$$x_j \geq 0, \ (j = 1, 2, 3)$$

# Τέλος Ενότητας