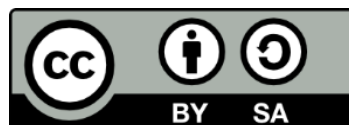


ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ & ΔΙΚΤΥΑΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Ενότητα 2: Τεχνικές Μοντελοποίησης, Εφαρμογές Μοντελοποίησης Γραμμικών Προβλημάτων

Σαμαράς Νικόλαος
Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Λεκτική περιγραφή (1)

- Κάποτε στο μέλλον ο κύριος Χρηματιστής πήρε το υπερπολυτελές διαστημόπλοίο του για ένα ολιγοήμερο ταξίδι αναψυχής στον έναστρο ουρανό. Μετά από λίγες μέρες καθώς περιπλανιόταν ανάμεσα στους αστεροειδείς και τους γαλαξίες του διαστήματος μερικά κόκκινα φωτάκια των υπερσύγχρονων οργάνων του διαστημοπλοίου του άρχισαν να αναβοσβήνουν προειδοποιώντας τον ότι υπάρχουν μικροπροβλήματα στους προωθητικούς πυραύλους. Αναγκάστηκε τότε να προγαλαξιώσει το διαστημόπλοίο του στον κοντινότερο γαλαξία. Αφού έκανε τις απαραίτητες μικροεπισκευές έριξε μια ματιά τριγύρω του για να απολαύσει τη θέα του διαστημικού τοπίου.

Λεκτική περιγραφή (2)

- Προς μεγάλη του έκπληξη και ευχαρίστηση βέβαια διαπίστωσε ότι ο γαλαξίας ήταν γεμάτος από πολύτιμα ορυκτά μέταλλα, κυρίως, χρυσό και ασήμι. Φυσικά, ο κύριος Χρηματιστής ήθελε να πάρει όλη την ποσότητα των πολύτιμων μετάλλων πίσω στη γη, τεχνικοί όμως λόγοι δεν επέτρεπαν κάτι τέτοιο. Ο διαθέσιμος χώρος για έξτρα φορτίο στο διαστημόπλοιο ήταν ελάχιστος και το διαστημόπλοιο λόγω της μεγάλης βαρύτητας του γαλαξία δεν μπορούσε να απογαλαξιωθεί αν το έξτρα βάρος ξεπερνούσε ένα όριο. Δεν θυμόταν απ' έξω τα όρια αντοχής του διαστημοπλοίου του αλλά τα υπερακριβή όργανα τον προειδοποίησαν αυστηρά.

Λεκτική περιγραφή (3)

- Το έξτρα φορτίο δεν πρέπει να υπερβαίνει ούτε τις διαθέσιμες 24 διαστημικές μονάδες χώρου (δμχ) ούτε το μέγιστο όριο των 3 διαστημικών μονάδων βάρους (δμβ). Ήξερε ότι ήταν καλύτερο να χρησιμοποιήσει τις πιο πρόσφατες τιμές του χρυσού και ασημιού. Δυστυχώς όμως πίσω στην γη την ημέρα εκείνη ήταν αργία και ως εκ τούτου ήταν αναγκασμένος να χρησιμοποιήσει τιμές που ίσχυαν όταν απογειώθηκε, μια βδομάδα περίπου πριν. Οι τιμές εκείνες ήταν 7 και 13 διαστημικές λογιστικές μονάδες (δλμ) για κάθε δμβ χρυσού και ασημιού αντίστοιχα. Αναγκασμένος να αποφασίσει με αυτές τις τιμές χρησιμοποίησε αμέσως τα όργανα του διαστημοπλοίου του και βρήκε ότι 1 δμβ χρυσού καταλαμβάνει 6 δμχ, ενώ 1 δμβ ασημιού 13.

Λεκτική περιγραφή (4)

- Ποιες ποσότητες χρυσού και ασημιού πρέπει να φορτώσει ο χρηματιστής για να μεγιστοποιήσει το κέρδος του όταν επιστρέψει στη γη;
- Ο Ηλεκτρονικός Υπολογιστής του διαστημοπλοίου ήταν εφοδιασμένος με ένα πολύ σύγχρονο Σύστημα Στήριξης Αποφάσεων (Decision Support System) βασισμένο στα τελευταία ερευνητικά αποτελέσματα και στους ταχύτερους αλγορίθμους. Τροφοδότησε αμέσως τα δεδομένα στον ηλεκτρονικό υπολογιστή και σε κλάσματα του δευτερολέπτου το Σύστημα Στήριξης Αποφάσεων (Σ.Σ.Α.), έδωσε έτοιμη τη βέλτιστη λύση την οποία ετοιμαζόταν γρήγορα-γρήγορα να υλοποιήσει. Ποιο ήταν το γραμμικό πρόβλημα το οποίο επιλύθηκε;

Μαθηματική Μορφοποίηση (1)

x_1 – δμβ χρυσού

x_2 – δμβ ασημιού

Αντικειμενικός σκοπός του χρηματιστή:

$$\left. \begin{array}{l} 7x_1 - \text{κέρδος δλμ χρυσού} \\ 13x_2 - \text{κέρδος δλμ ασημιού} \end{array} \right\} \max 7x_1 + 13x_2$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{Φυσικές} \\ \text{ποσότητες} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{Φυσικοί περιορισμοί} \\ \text{ή περιορισμοί μη} \\ \text{αρνητικότητας} \end{array} \right\}$$

Μαθηματική Μορφοποίηση (2)

Περιορισμός βάρους

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array} \right\} \leq 3 \text{ δμβ} \Rightarrow x_1 + x_2 \leq 3$$

Περιορισμός χώρου

$$\left. \begin{array}{l} 6x_1 \\ 13x_2 \end{array} \right\} \leq 24 \text{ δμχ} \Rightarrow 6x_1 + 13x_2 \leq 24$$

Τεχνολογικοί Περιορισμοί

Μαθηματική Μορφοποίηση (3)

$$\max 7x_1 + 13x_2$$

περιορισμοί

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$6x_1 + 13x_2 \leq 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Επίλυση

Έστω η λύση που υπολόγισε ο Η/Υ του διαστημόπλοιου είναι $x_1 = 15/7$ δμβ και $x_2 = 6/7$ δμβ

Το μέγιστο κέρδος: $7 * 15/7 + 13 * 6/7 = 183/7$

Εναλλακτική πρόταση: Μέγιστο κέρδος $189/7$

Συμφέρει να πουλήσει?

Η βέλτιστη λύση παραμένει βέλτιστη: Δεν πουλάει

Παράδειγμα: Κατανομή Πόρων (1)

- Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει πόρτες, παράθυρα, τραπέζια και καρέκλες από αλουμίνιο και πλαστικό. Οι κατασκευαστικές απαιτήσεις των προϊόντων αυτών σε πλαστικό, αλουμίνιο και εργατοώρες φαίνονται στον επόμενο Πίνακα. Τα στοιχεία του Πίνακα ερμηνεύονται ως εξής. Για παράδειγμα, οι αριθμοί της πρώτης στήλης δηλώνουν ότι για την κατασκευή μιας πόρτας απαιτούνται 15 dm³ αλουμινίου, 12 κιλά πλαστικού υλικού και 150 εργατοώρες.

	Πόρτα	Παράθυρο	Τραπέζι	Καρέκλα
Αλουμίνιο (dm ³)	15	4	5	3
Πλαστικό (κιλά)	12	6	3	3
Εργατοώρες	150	60	50	40

Παράδειγμα: Κατανομή Πόρων (2)

Η επιχείρηση έχει ήδη παραγγελίες για 150 πόρτες, 270 παράθυρα, 310 τραπέζια και 450 καρέκλες, αλλά γνωρίζει ότι, οποιαδήποτε ποσότητα των προϊόντων και αν κατασκευάσει με τους πόρους που διαθέτει, θα πουληθεί στην αγορά. Οι τιμές πώλησης είναι 540 € για κάθε πόρτα, 205 € για κάθε παράθυρο, 175 € για κάθε τραπέζι και 90 € για κάθε καρέκλα. Το εργοστάσιο διαθέτει 50000 dm³ αλουμινίου, 40000 κιλά πλαστικού και μπορεί να διαθέσει για την παραγωγή των παραπάνω προϊόντων το πολύ 300000 εργατοώρες.

Ποιο πρόβλημα πρέπει να λύσει η επιχείρηση για να προσδιορίσει το σχέδιο παραγωγής το οποίο θα μεγιστοποιήσει τα έσοδά της;

Παράδειγμα: Κατανομή Πόρων (3)

x_1 = αριθμός από πόρτες που θα κατασκευαστούν

x_2 = αριθμός παραθύρων που θα κατασκευαστούν

x_3 = αριθμός τραπεζιών που θα κατασκευαστούν

x_4 = αριθμός καρεκλών που θα κατασκευαστούν

Αντικειμενικός σκοπός της επιχείρησης:

$540x_1$ – κέρδος από πώληση από πόρτες σε €

$205x_2$ – κέρδος από πώληση παραθύρων σε €

$175x_3$ – κέρδος από πώληση τραπεζιών σε €

$90x_4$ – κέρδος από πώληση καρεκλών σε €

$$\max 540x_1 + 205x_2 + 175x_3 + 90x_4$$

Παράδειγμα: Κατανομή Πόρων (4)

$$\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}} \right\} \begin{array}{c} \text{Φυσικές} \\ \text{ποσότητες} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Φυσικοί} \\ \text{περιορισμοί ή} \\ \text{περιορισμοί μη} \\ \text{αρνητικότητας} \end{array}$$

Παράδειγμα: Κατανομή Πόρων (5)

$$\left. \begin{array}{l} 15x_1 \\ \text{Περιορισμός} \\ \text{αλουμινίου} \\ 4x_2 \\ 5x_3 \\ 3x_4 \end{array} \right\} \leq 50000 \text{ dm}^3 \Rightarrow$$
$$15x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 50000$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Περιορισμός} \\ \text{πλαστικού} \end{array} \right\} 12x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 40000$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Περιορισμός} \\ \text{εργατωρών} \end{array} \right\} 150x_1 + 60x_2 + 50x_3 + 40x_4 \leq 300000$$

Παράδειγμα: Κατανομή Πόρων (6)

Ικανοποίηση
παραγγελίας

$$x_1 \geq 150, \quad x_2 \geq 270, \quad x_3 \geq 310, \quad x_4 \geq 450$$

$$\max 540x_1 + 205x_2 + 175x_3 + 90x_4$$

περιορισμοί

$$15x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 50000$$

$$12x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 40000$$

$$150x_1 + 60x_2 + 50x_3 + 40x_4 \leq 300000$$

$$x_1 \geq 150, \quad x_2 \geq 270, \quad x_3 \geq 310, \quad x_4 \geq 450$$

Παράδειγμα: Το πρόβλημα της δίαιτας (1)

Σε μια ειδική διαίτα αδυνατίσματος έχει αποφασιστεί ότι η ημερήσια διατροφή πρέπει να αποτελείται από ψωμί, κρέας, λαχανικά, γαλακτοκομικά προϊόντα και φρούτα. Η διαίτα πρέπει να επιτυγχάνει ένα συγκεκριμένο ρυθμό ελάττωσης βάρους. Για την επιτυχία του σκοπού αυτού η ποσότητα τροφής που καταναλώνεται ημερησίως δεν πρέπει να περιέχει περισσότερες από 1200 θερμίδες, περισσότερα από 100 mgr ζαχάρου και περισσότερα από 30 mgr λιπαρών ουσιών.

Επίσης, η διαίτα πρέπει να ικανοποιεί ορισμένα ελάχιστα όρια υγιεινής διατροφής. Ημερησίως πρέπει να καταναλώνονται τουλάχιστον 100 mgr πρωτεϊνών και 25 mgr βιταμινών.

Παράδειγμα: Το πρόβλημα της δίαιτας (2)

Οι περιεκτικότητες σε θερμίδες, ζάχαρο, λιπαρά, πρωτεΐνες και βιταμίνες ανά μονάδα μέτρησης των διαφόρων ειδών διατροφής φαίνονται αναλυτικά στον παρακάτω Πίνακα.

Είδος Τροφής	Θερμίδες Kcal	ζάχαρο mgr	Λιπαρά mgr	Πρωτεΐνες mgr	Βιταμίνες Mgr
Ψωμί (Τεμάχια)	400	35	10	5	3
Κρέας (Κιλά)	3000	0	15	400	0
Λαχανικά (Κιλά)	90	0	0	0	10
Γαλακτοκομικά (Τεμάχια)	600	10	25	20	5
Φρούτα (Τεμάχια)	150	150	0	0	2

Παράδειγμα: Το πρόβλημα της δίαιτας (3)

Αντικειμενικός σκοπός του ατόμου που θέλει να εφαρμόσει τη δίαιτα, είναι ο προσδιορισμός των ποσοτήτων των διαφόρων τροφών που πρέπει να καταναλώνονται ημερησίως έτσι ώστε να επιτυγχάνονται οι δυο επιδιώξεις του (ρυθμός ελάττωσης βάρους και ικανοποίηση ελαχίστων ορίων υγιεινής διατροφής) και να ελαχιστοποιείται το κόστος.

Γνωρίζοντας ότι οι τιμές του ψωμιού, του κρέατος, των λαχανικών, των γαλακτοκομικών προϊόντων και των φρούτων είναι 0,7 € / τεμάχιο, 5,6 € / κιλό, 0,4 € / κιλό, 1 € / τεμάχιο και 0,2 € / τεμάχιο αντίστοιχα, να βρεθεί το πρόβλημα εκείνο του οποίου η λύση θα επιτυγχάνει το ελάχιστο κόστος.

Παράδειγμα: Το πρόβλημα της δίαιτας (4)

x_1 = τεμάχια ψωμιού που καταναλώνονται ημερησίως

x_2 = κιλά κρέατος που καταναλώνονται ημερησίως

x_3 = κιλά λαχανικών που καταναλώνονται ημερησίως

x_4 = τεμάχια γαλακτοκομικών προϊόντων που καταναλώνονται ημερησίως

x_5 = τεμάχια φρούτων που καταναλώνονται ημερησίως

Αντικειμενικός σκοπός της επιχείρησης:

$0,7x_1$ – κόστος από κατανάλωση ψωμιού σε €

$5,6x_2$ – κόστος από κατανάλωση κρέατος σε €

$0,4x_3$ – κόστος από κατανάλωση λαχανικών σε €

$1,0x_4$ – κόστος από κατανάλωση γαλακ/κών σε €

$0,2x_5$ – κόστος από κατανάλωση φρούτων σε €

Παράδειγμα: Το πρόβλημα της δίαιτας (5)

Συνολικό ημερήσιο κόστος της δίαιτας είναι

$$\min 0,7x_1 + 5,6x_2 + 0,4x_3 + 1,0x_4 + 0,2x_5$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \right\} \text{Φυσικές} \left. \begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \\ x_5 \geq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ποσότητες} \\ \text{Φυσικοί} \\ \text{περιορισμοί ή} \\ \text{περιορισμοί μη} \\ \text{αρνητικότητας} \end{array}$$

Παράδειγμα: Το πρόβλημα της δίαιτας (6)

Περιορισμός θερμίδων

$$\left. \begin{array}{l} 400x_1 \\ 3000x_2 \\ 90x_3 \\ 600x_4 \\ 150x_5 \end{array} \right\} \leq 1200 \text{ Kcal} \Rightarrow$$
$$400x_1 + 3000x_2 + 90x_3 + 600x_4 + 150x_5 \leq 1200$$

Περιορισμός για ζάχαρο

$$\left. \right\} 35x_1 + 10x_4 + 150x_5 \leq 100$$

Περιορισμός για λιπαρές ουσίες

$$10x_1 + 400x_2 + 20x_4 \leq 30$$

Παράδειγμα: Το πρόβλημα της διαίτας (7)

Περιορισμός
για πρωτεΐνες

$$5x_1 + 400x_2 + 20x_4 \geq 100$$

Περιορισμός
για βιταμίνες

$$3x_1 + 10x_3 + 5x_4 + 20x_5 \geq 25$$

$$\min \quad 0,7x_1 + 5,6x_2 + 0,4x_3 + 1,0x_4 + 0,2x_5$$

$$\mu.π. \quad 400x_1 + 3000x_2 + 90x_3 + 600x_4 + 150x_5 \leq 1200$$

$$35x_1 + 10x_4 + 150x_5 \leq 100$$

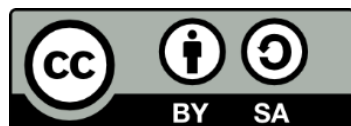
$$10x_1 + 15x_2 + 25x_4 \leq 30$$

$$5x_1 + 400x_2 + 20x_4 \geq 100$$

$$3x_1 + 10x_3 + 5x_4 + 20x_5 \geq 25$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5)$$

Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

