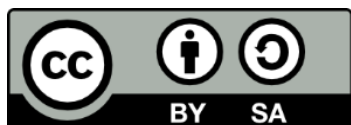


ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

Ενότητα 10

Άγγελος Σιφαλέρας
Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άλλα κλασικά προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης

- Traveling Salesman Problem, (TSP),
- Hamiltonian path / cycle problem,
- Eulerian path / cycle problem,
- Chinese postman problem,
- Minimum Steiner problem in networks
- ...

TSP

- Το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή (Traveling Salesman Problem – TSP) είναι στην ουσία εξειδίκευση του προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων (VRP), εάν θεωρήσουμε ότι ένα μόνο όχημα μπορεί να επισκεφθεί όλους τους πελάτες.
- Σε αυτήν την περίπτωση αναζητούμε μια κυκλική διαδρομή (και όχι πολλαπλούς υπόκυκλους), με αρχή και τέλος το ίδιο σημείο αφετηρίας.
- Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος της κυκλικής διαδρομής που εξυπηρετεί τους πελάτες από την αφετηρία.

Μεθοδολογίες επίλυσης για TSP

- Το TSP ανήκει στην κατηγορία προβλημάτων *NP-Complete*. Ως εκ τούτου, δεν αναμένεται κάποιος αποτελεσματικός αλγόριθμος (εκτός αν $P = NP$), παρά μόνο κάποιες βελτιωμένες προσεγγιστικές λύσεις.
- Ευρετικές μέθοδοι (*heuristics*)
 - Nearest-neighbor*
 - The Greedy Algorithm*
 - r-opt heuristics*
 - ...
- Μεθευρετικές μέθοδοι (*metaheuristics*)
 - Variable neighbourhood search*
 - Simulated annealing*
 - Tabu search*
 - Genetic algorithms*
 - Ant colony optimization*
 - ...
- *Exact algorithms*
 - Αλγόριθμοι κλάδου και φραγής
 - Cutting planes methods*
 - ...

Ευρετικές μέθοδοι (heuristics) για το TSP

□ *Heuristics για το TSP:*

- ✓ Ευρετικές μέθοδοι κατασκευής διαδρομής ή *Construction Heuristics*.
 - ❖ *Nearest-neighbor*
 - ❖ *The Greedy Algorithm*
 - ❖ *Insertion Heuristics*
 - *Nearest Insertion*
 - *Cheapest Insertion*
 - *Farthest Insertion*
 - *Random Insertion*
- ✓ Ευρετικές μέθοδοι βελτίωσης της υπάρχουσας λύσης ή *Improving Solutions*.
 - ❖ *r-opt heuristics*
 - ❖ *Sub-Tour reversal algorithm*
 - ❖ *Node and edge-insertion*
 - ❖ ...

□ ...

Nearest-neighbor heuristic για το TSP

• Ίσως η απλούστερη ιδέα κατασκευής μιας διαδρομής, είναι πάντοτε να επισκεπτόμαστε την κοντινότερη πόλη μεταξύ αυτών που δεν έχουμε ακόμη επισκεφθεί.

Greedy Algorithm heuristic για το TSP

- Ο άπληστος αλγόριθμος ελέγχει τις ακμές κατά αύξουσα σειρά.
- Προσθέτει μια ακμή στη λύση, μόνο εάν αυτή ενώνει δυο υπό-διαδρομές σε μια μεγαλύτερη υπό-διαδρομή.
- Ο άπληστος αλγόριθμος τερματίζει όταν έχουμε επισκεφθεί όλους τους κόμβους, άρα έχουμε μια πλήρη διαδρομή.

Insertion Heuristics για το TSP

- Μια άλλη προσέγγιση για το TSP είναι να ξεκινήσουμε με μια υπό-διαδρομή (*subtour*), δηλαδή μια διαδρομή με ένα μικρό υποσύνολο κόμβων και έπειτα να επεκτείνουμε αυτήν τη διαδρομή εισάγοντας διαδοχικά τους εναπομείναντες κόμβους μέχρις ότου να έχουν εισαχθεί όλοι οι κόμβοι.
- Υπάρχουν πολλές δυνατότητες για την υλοποίηση της διαδικασίας της εισαγωγής και μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ανάλογα με:
 - ❑ Πώς να κατασκευάσουμε την αρχική διαδρομή.
 - ❑ Πώς να επιλέξουμε τον επόμενο κόμβο προς εισαγωγή.
 - ❑ Που να εισάγουμε τον επιλεγμένο κόμβο.
- Για προβλήματα με Ευκλείδειες αποστάσεις, μπορούμε να βρούμε μια καλή αρχική υπό-διαδρομή εάν ακολουθήσουμε το κυρτό περίβλημα (*convex hull*) όλων των κόμβων.

Insertion Heuristics για το TSP[1]

- Η κύρια διαφορά των διαφόρων τρόπων εισαγωγής είναι η σειρά με την οποία οι κόμβοι εισάγονται. Θα παρουσιαστούν οι ακόλουθες τέσσερις στρατηγικές:
 - ❑ *Nearest Insertion*: Ξεκινούμε από μια τυχαία διαδρομή δυο πόλεων. Επιλέγουμε την επόμενη πόλη που απέχει λιγότερο από οποιαδήποτε συνδεδεμένη πόλη και την εισάγουμε στη θέση για την οποία προκύπτει η ελάχιστη αύξηση του μήκους της διαδρομής.
 - ❑ *Cheapest Insertion*: Ξεκινούμε πάλι από μια τυχαία διαδρομή δυο κόμβων. Από το σύνολο των κόμβων που δεν έχουν εισαχθεί μέχρι στιγμής, επιλέγουμε τον κόμβο του οποίου η εισαγωγή προκαλεί την ελάχιστη αύξηση του μήκους της διαδρομής, (η ιδέα βασίζεται σε άπληστη στρατηγική).

Insertion Heuristics για το TSP[2]

- ❑ *Farthest Insertion*: Ξεκινούμε από τη μακρύτερη διαδρομή δυο πόλεων. Έπειτα, από το σύνολο των κόμβων που δεν έχουν εισαχθεί μέχρι στιγμής, επιλέγουμε τον κόμβο του οποίου η ελάχιστη απόσταση προς έναν κόμβο της διαδρομής είναι η μέγιστη. (Η ιδέα είναι να διορθώσει τη συνολική σχεδίαση της διαδρομής από νωρίς στη διαδικασία της εισαγωγής).
- ❑ *Random Insertion*: Επιλέγουμε με τυχαίο τρόπο μια πόλη κάθε φορά και την προσθέτουμε στη μερική υπό-διαδρομή με τέτοιο τρόπο ώστε να προκύπτει η ελάχιστη αύξηση του μήκους της διαδρομής.

- Εποπτική παρουσίαση των παραπάνω:

<http://www-e.uni-magdeburg.de/mertens/TSP>

Growing trees heuristics για TSP

Εάν υποθέσουμε ότι έχουμε ένα δίκτυο με συμμετρικές τιμές αποστάσεων (*symmetric TSP*) και επίσης ότι ισχύει η «τριγωνική ανισότητα» (δηλαδή $c_{AC} \leq c_{AB} + c_{BC}$), τότε:

- Με τη μέθοδο *nearest-neighbor*, θα υπολογίσουμε λύση όχι χειρότερη από $1 + \frac{\log n}{2}$ φορές, της τιμής του κόστους της βέλτιστης διαδρομής για ένα n -πόλεων *TSP*.

- Με τη *greedy* μέθοδο, θα υπολογίσουμε λύση όχι χειρότερη από $0,5 + \frac{\log n}{2}$ φορές, της τιμής του κόστους της βέλτιστης διαδρομής για ένα n -πόλεων *TSP*.

Παρ' όλα αυτά, συνήθως σε μεγάλα προβλήματα η *greedy* μέθοδος υπολογίζει σημαντικά καλύτερες λύσεις από τη μέθοδο *nearest-neighbor*.

Μέθοδοι βελτίωσης μιας αρχικής διαδρομής για το TSP

Improving Solutions: 2-opt[1]

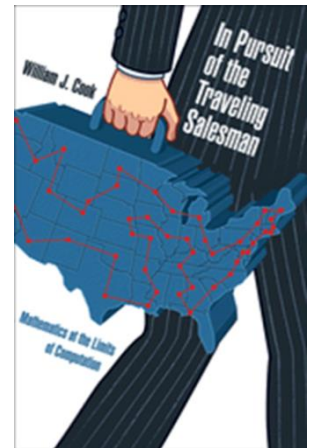
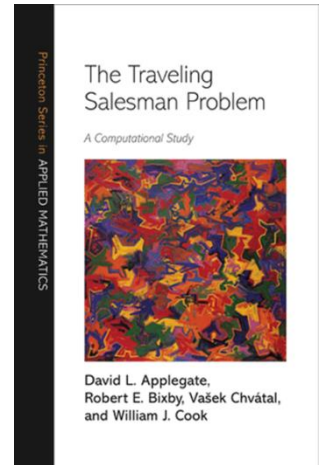
- Οι διαδρομές που έχουν υπολογιστεί με κάποιο από τα διάφορα *construction heuristics* της προηγούμενης ενότητας συνήθως είναι μέτριας ποιότητας...
- Έστω ότι τώρα μας ενδιαφέρει να βελτιώσουμε μια ήδη υπάρχουσα διαδρομή. Γενικά, οι ευρετικές μέθοδοι βελτίωσης μιας λύσης χαρακτηρίζονται από μια συγκεκριμένη ενέργεια τροποποίησης της υπάρχουσας διαδρομής. Παράδειγμα τρόπου βελτίωσης είναι η ευρετική μέθοδος *2-opt* η οποία πραγματοποιεί κινήσεις *2-exchange*.
- Εποπτική παρουσίαση των παραπάνω:
<http://www-e.uni-magdeburg.de/mertens/TSP>

Improving Solutions: 2-opt[2]

- Μια κίνηση *2-exchange* πραγματοποιείται διαγράφοντας δυο ακμές και επανασυνδέοντας τα δυο μονοπάτια που προκύπτουν με διαφορετικό τρόπο ώστε να πάρουμε μια νέα διαδρομή.
- Υπάρχει ένας μοναδικός τρόπος για να επανασυνδεθούν τα μονοπάτια, ο οποίος οδηγεί σε μια διαφορετική διαδρομή. Μεταξύ όλων των ζευγών ακμών τα οποία η ανταλλαγή (*2-exchange*) ελαττώνει το συνολικό μήκος, επιλέγουμε εκείνο το ζεύγος ακμών το οποίο μας δίνει την ελάχιστη διαδρομή.
- Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται, μέχρις ότου δεν μπορεί να βρεθεί κάποιο κατάλληλο ζεύγος ακμών.
- Η διαδρομή που προκύπτει τότε, θα ονομάζεται *2-optimal*.

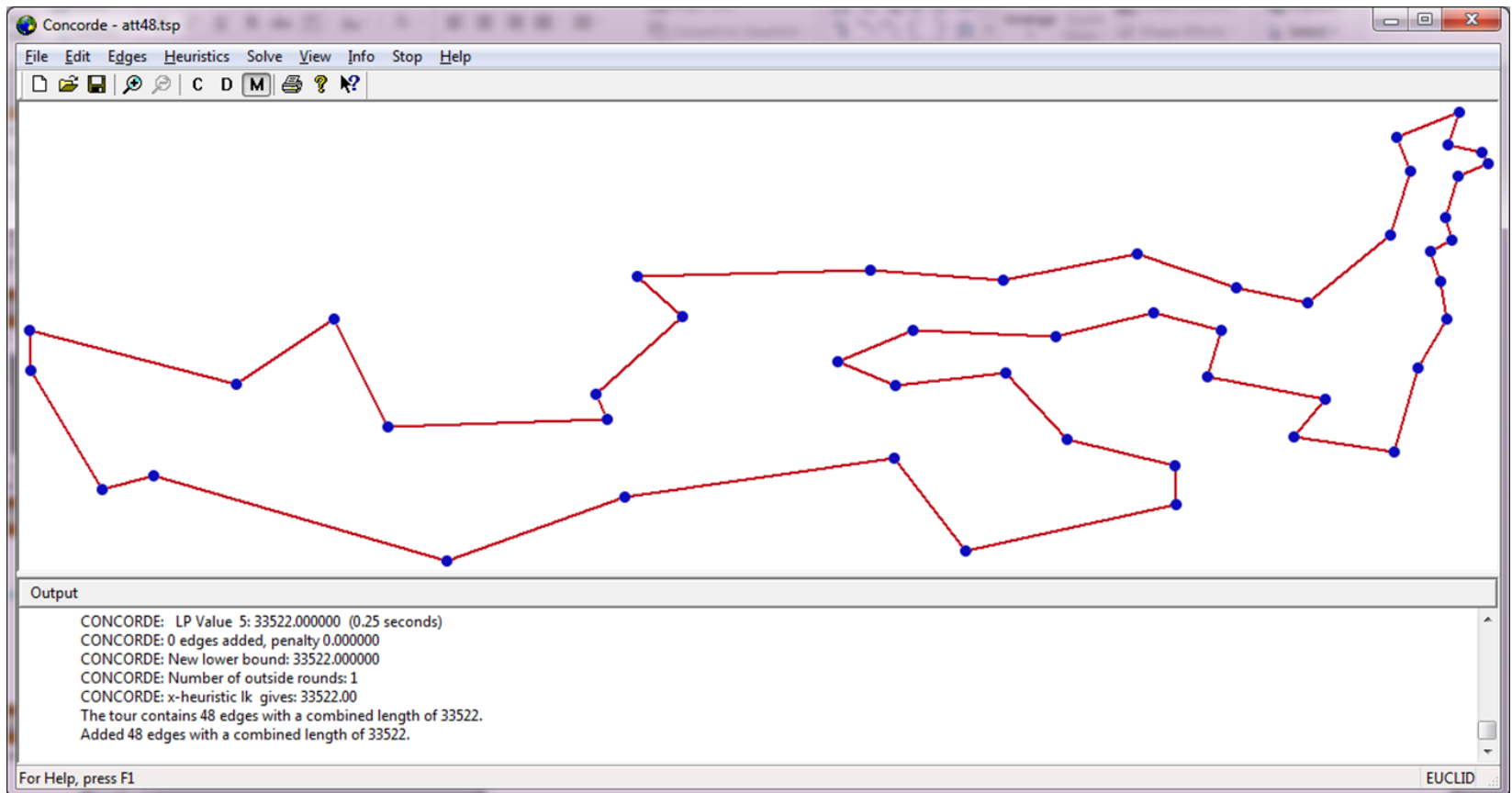
Βιβλιογραφία στο TSP

- David L. Applegate, Robert E. Bixby, Vasek Chvátal & William J. Cook, **The Traveling Salesman Problem: A Computational Study**, Princeton University Press, 2006.
- William J. Cook, **In Pursuit of the Traveling Salesman: Mathematics at the Limits of Computation**, Princeton University Press, 2012.



Λύτης προβλημάτων TSP

Concorde TSP solver (διατίθεται δωρεάν για ακαδημαϊκή χρήση):
<http://www.tsp.gatech.edu/concorde/downloads/downloads.htm>



Υλικό για TSP

Καλές πηγές ενημέρωσης:

- **TSP:** <http://www.tsp.gatech.edu>
- **Animated Examples of Heuristic Algorithms:**
<http://www-e.uni-magdeburg.de/mertens/TSP>
- **TSPLIB:** <http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95>

The Steiner Tree Problem[1]

- Euclidean Steiner Problem
- Steiner Problem in Networks
- Rectilinear Steiner Problem
- Other Steiner Problems...

The Steiner Tree Problem[2]

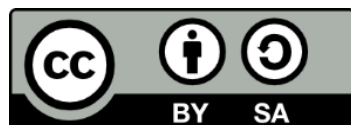
Βιβλιογραφία / Εφαρμογές:

- Grötschel M., Martin A., Weismantel R., “The Steiner tree packing problem in VLSI design”, *Mathematical Programming*, 78(2), 265–281, 1997.
(URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF02614374>)
- Chin Lung Lu, Chuan Yi Tang, Richard Chia-Tung Lee, “The Full Steiner Tree Problem in Phylogeny”, *Lecture Notes in Computer Science*, 2387, 107–116, 2002.
(URL: http://dx.doi.org/10.1007/3-540-45655-4_13)
- Winter P., “Steiner problem in networks: A survey”, *Networks*, 17(2), 129–167, 1987.
(URL: <http://dx.doi.org/10.1002/net.3230170203>)

Steiner Tree Problem Applet:

<http://www.personal.kent.edu/~rmuhamma/Compgeometry/MyCG/CG-Applets/SteinerTree/msteinercli.htm>

Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

