ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

Ενότητα 6

Άγγελος Σιφαλέρας
Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

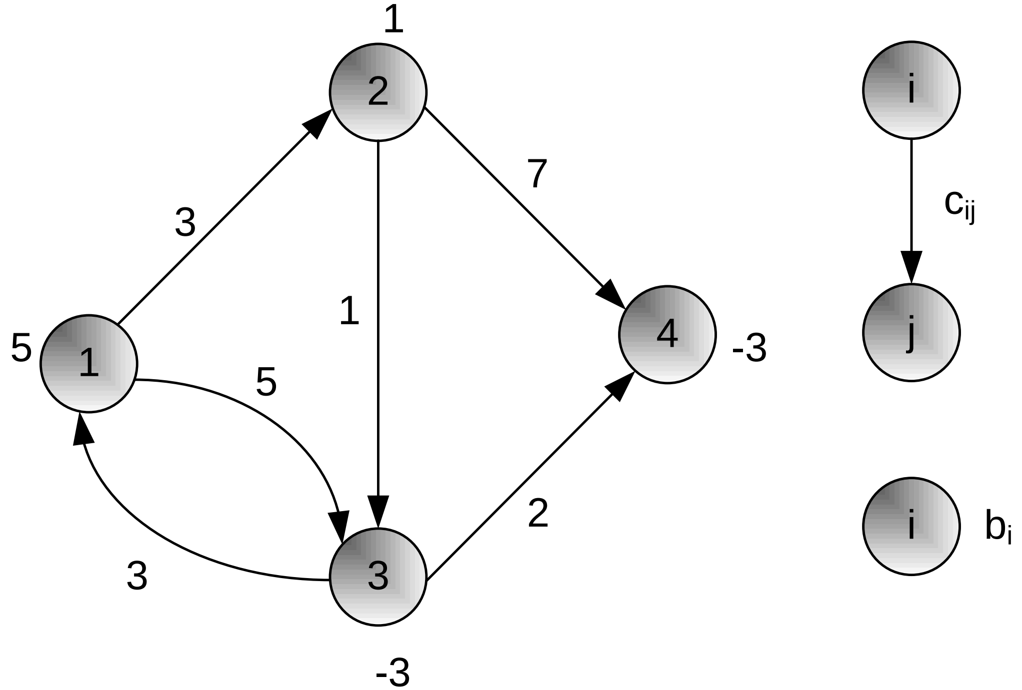
Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Πρόβλημα Ροής Ελαχίστου Κόστους[1]

Ζητούμενο: Σχέδιο μεταφοράς του προϊόντος από τους κόμβους προσφοράς στους κόμβους ζήτησης έτσι ώστε να ικανοποιηθεί όλη η ζήτηση και το κόστος μεταφοράς να είναι ελάχιστο (Πρόβλημα Ροής Ελαχίστου Κόστους – ΠΡΕΚ ή Minimum Cost Network Flow Problem – MCNFP).



Πρόβλημα Ροής Ελαχίστου Κόστους[2]

Η μαθηματική μορφοποίηση του ισοζυγισμένου ΠΡΕΚ είναι η παρακάτω:

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\mu.\pi. \sum_{\{j:(i,j)\in A\}} x_{ij} - \sum_{\{k:(k,i)\in A\}} x_{ki} = b(i), \quad i = 1,2 \ldots n$$

$$l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij}, \quad (i,j) \in A$$

Πρόβλημα Ελαχίστων Δρόμων[1]

Ειδική περίπτωση ΠΡΕΚ σε δίκτυα

Παραλλαγές του προβλήματος:

a) Μεταξύ ενός συγκεκριμένου ζεύγους κόμβων **(point-to-point (P2P) shortest path problem).**

b) Από έναν συγκεκριμένο κόμβο προς όλους τους υπολοίπους κόμβους ή το αντίστροφο **(single-source (SS) shortest paths problem)**

c) Μεταξύ όλων των δυνατών ζευγαριών κόμβων (**all-pairs (AP) shortest paths problem)**

d) Ελάχιστος κύκλος σε ένα δίκτυο.

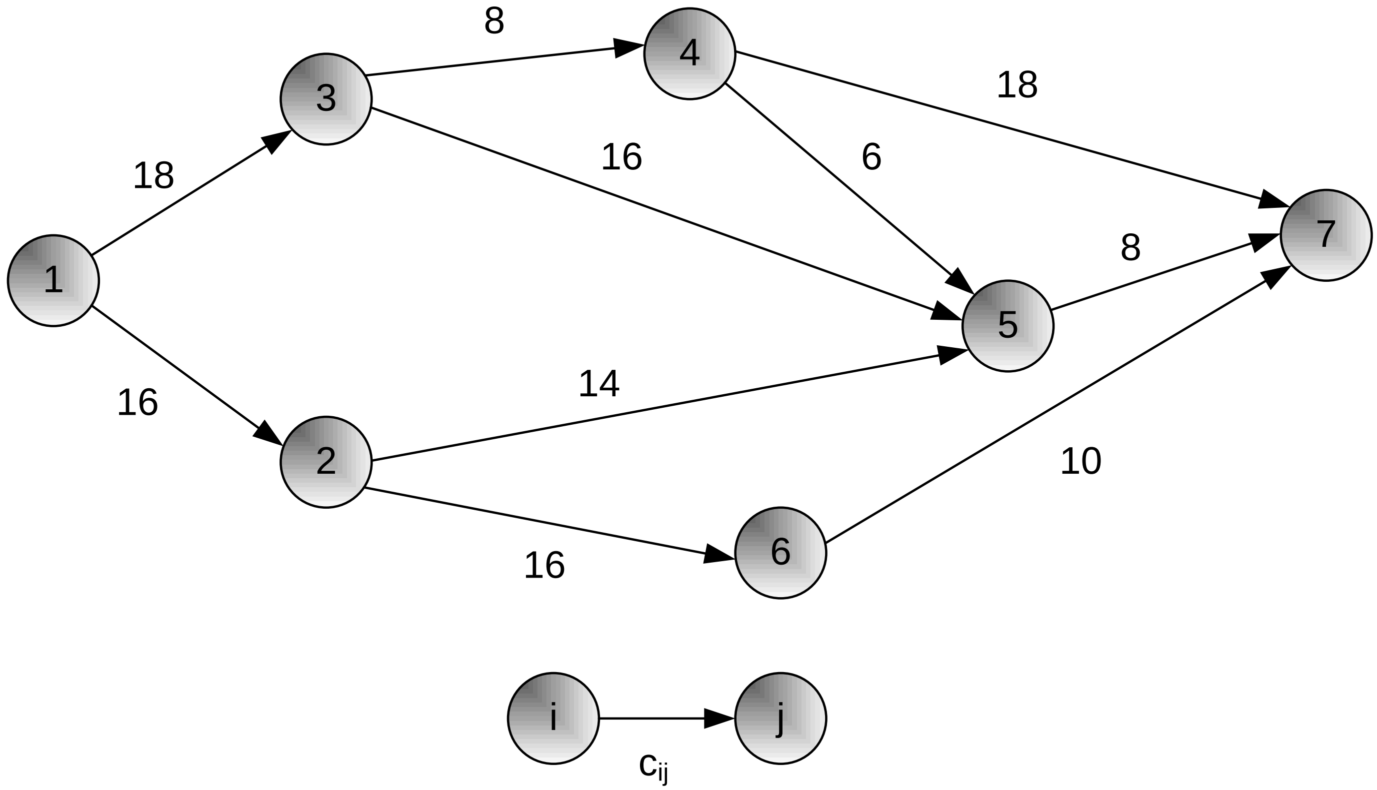
Πρόβλημα Ελαχίστων Δρόμων[2]

Επεκτάσεις του προβλήματος:

- Ελάχιστο μονοπάτι που διέρχεται δια μέσου ενός συγκεκριμένου συνόλου κόμβων.
- Ελάχιστο μονοπάτι με το πολύ k συνολικά τόξα.
- Ελάχιστο μονοπάτι με άρτιο ή περιττό πλήθος τόξων.

Πρόβλημα Ελαχίστων Δρόμων Παράδειγμα μορφοποίησης[1]

Έστω ότι στο δίκτυο του προηγούμενου παραδείγματος, ζητούμε τους ελάχιστους δρόμους με αφετηρία τον κόμβο 1 προς όλους τους υπόλοιπους κόμβους.



Πρόβλημα Ελαχίστων Δρόμων Παράδειγμα μορφοποίησης[2]

$$\min\ 16x_{12} + 18x_{13} + 14x_{25} + 16x_{26} + 8x_{34} + 16x_{35} + 6x_{45} + 18x_{47} + 8x_{57} + 10x_{67}$$

$$\begin{aligned}
s.t.\quad & x_{13} + x_{12} = 6 \\
& x_{25} + x_{26} - x_{12} = -1 \\
& x_{34} + x_{35} - x_{13} = -1 \\
& x_{45} + x_{47} - x_{34} = -1 \\
& x_{57} - x_{25} - x_{35} - x_{45} = -1 \\
& x_{67} - x_{26} = -1 \\
& -x_{47} - x_{57} - x_{67} = -1
\end{aligned}$$

$$x_{ij} \in \mathrm{N}\ ,\ \ \forall (i, j) \in A,$$

Total unimodularity

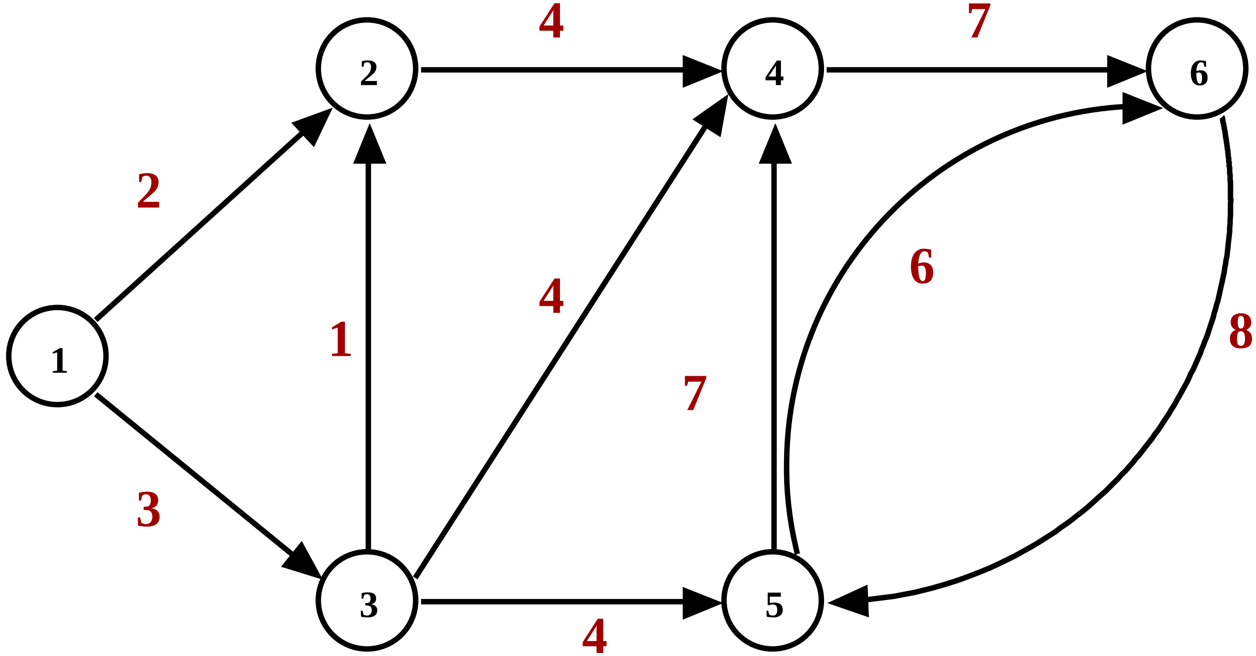
Ορισμός. Ένας πίνακας $A \in Z^{m \times n}$ είναι *totally unimodular* εάν η ορίζουσα κάθε τετραγωνικού του υπό-πίνακα έχει τιμή 0, +1, ή −1.

Θεώρημα. Εάν ο πίνακας *A* είναι *totally unimodular* τότε η λύση που αντιστοιχεί σε κάθε εφικτή κορυφή του πολυέδρου που ορίζεται από $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ έχει ακέραιες τιμές.

Χρησιμότητα. Οι *totally unimodular* πίνακες (π.χ., μήτρα κόμβων-τόξων) είναι ιδιαίτερα σημαντικοί στη συνδυαστική βελτιστοποίηση, διότι μας δίνουν ένα γρήγορο τρόπο να ελέγξουμε εάν ένα γραμμικό πρόβλημα έχει ακέραιη βέλτιστη λύση, (όταν υπάρχει βέλτιστη λύση).

Άσκηση

Να βρεθούν οι ελάχιστοι δρόμοι και τα μήκη τους από τον κόμβο 1 προς όλους τους υπόλοιπους κόμβους για το παρακάτω δίκτυο.



Ενδεικτικές εφαρμογές

- Zeng W. and Church R.L. (2009). Finding shortest paths on **real road networks**: the case for A*. International Journal of Geographical Information Science. 23(4), 531-543.
- Chuang S. John and Roth Dan. (2001). **Gene Recognition** Based on DAG Shortest Paths. Bioinformatics, 17(suppl 1), S56-S64.
- Hoceini S., Mellouk A. and Amirat Y. (2005). K-Shortest Paths Q-Routing: A New QoS Routing Algorithm in **Telecommunication Networks**, in Proc. of Networking - ICN 2005, Lecture Notes in Computer Science, 3421, 164-172.

Τέλος Ενότητας