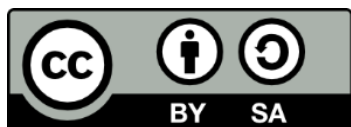


ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

Ενότητα 4

Άγγελος Σιφαλέρας
Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Knapsack Problem, με πολλαπλούς περιορισμούς

- Εάν υπάρχουν περισσότεροι από ένας περιορισμοί (π.χ., ένα όριο στο συνολικό όγκο και ένα όριο στο βάρος των αντικειμένων, όπου όμως ο όγκος και το βάρος ενός αντικειμένου δεν σχετίζονται), προκύπτει το knapsack problem με πολλαπλούς περιορισμούς, multi-dimensional knapsack problem, ή m-dimensional knapsack problem.
- Σε αυτήν την κατηγορία προβλημάτων δεν αναφερόμαστε στο σχήμα των αντικειμένων. Αυτό το πρόβλημα έχει διάφορες παραλλαγές, όπως π.χ. με μεταβλητές που λαμβάνουν δυαδικές τιμές, ή με μεταβλητές, φραγμένες ή μη, που παίρνουν ακέραιες τιμές, όπως για παράδειγμα:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \sum_{j=1}^n p_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j \leq W_i \quad , \quad 1 \leq i \leq m \\ & x_j \in \mathbb{N} \quad , \quad 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

Knapsack-like Problems, bin packing problem[1]

- Εάν έχουμε έναν αριθμό φορηγών οχημάτων (containers) ιδίου μεγέθους, και επιθυμούμε να στοιβάξουμε όλα τα n αντικείμενα (π.χ., παλέτες προϊόντων) σε όσο το δυνατόν λιγότερα φορηγά οχήματα, το πρόβλημα που προκύπτει αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως bin packing problem.
- Η μαθηματική του μορφοποίηση περιλαμβάνει δυαδικές μεταβλητές αποφάσεων:

$y_i = 1$ ή 0 , εφόσον το i φορηγό όχημα χρησιμοποιείται ή όχι αντίστοιχα:

$$\min z = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^n w_j x_{ij} \leq W_i$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0,1\}$$

$$i \in [1, n] \text{ (containers), } \quad j \in [1, n] \text{ (items)}$$

Knapsack-like Problems, bin packing problem[2]

- Για παράδειγμα, όταν ένα ferry boat φορτώνεται, οι στρατηγικές με τις οποίες χωρούν τα περισσότερα οχήματα σε κάθε ταξίδι μειώνει τους χρόνους αναμονής και κάνουν τη βέλτιστη χρήση των διαθέσιμων πόρων.

Προεκτάσεις στο Knapsack Problem

Μελέτη ανάλυσης ευαισθησίας σε αλλαγές ενός υποσυνόλου βαρών στα σακίδια (knapsacks).

Mhand Hifi, Hedi Mhalla, (2013). “Sensitivity analysis to perturbations of the weight of a subset of items: The knapsack case study”, *Discrete Optimization*, 10(4), 320-330.

(URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.disopt.2013.08.003>)

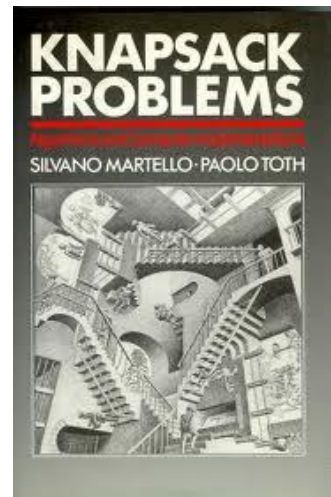
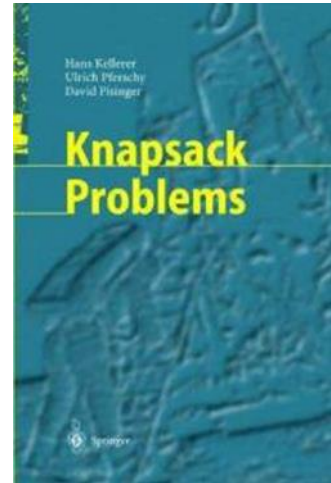
Knapsack Problem, βιβλιογραφία

•Hans Kellerer, Ulrich Pferschy & David Pisinger, Knapsack Problems, Springer, 2010.

•Silvano Martello & Paolo Toth, Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, 1990.

Εφαρμογές στην κρυπτογραφία:

Merkle, Ralph and Martin Hellman, (1978) “Hiding information and signatures in trapdoor knapsacks”, IEEE Transactions on Information Theory, 24(5), 525-530.



Κνapsack Problem, μέθοδοι επίλυσης

- Πλήρη απαρίθμηση (brute force): Δοκιμάζουμε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς αντικειμένων. Πόσοι είναι...?
- Quiz: Έστω ότι, έχουμε στη διάθεση μας έναν σύγχρονο Η/Υ με επεξεργαστή τελευταίας γενιάς ο οποίος διενεργεί τον κάθε έλεγχο σε 10^{-6} δευτερόλεπτα. Πόσο υπολογιστικό χρόνο εκτιμάτε ότι απαιτείται για την επίλυση ενός στιγμιότυπου προβλήματος με $n = 40$ μεταβλητές ?
- Υπάρχουν καλύτερες μέθοδοι επίλυσης από τη μέθοδο πλήρη απαρίθμησης?

Απάντηση: Δυναμικός προγραμματισμός.

Ανάλυση Αλγορίθμων & Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

- Εισαγωγή
- Προβλήματα
- Υπολογιστικά προβλήματα
- Στιγμιότυπα – περιπτώσεις
- Διάσταση προβλήματος: αριθμός που δηλώνει πόσο μεγάλο είναι ένα πρόβλημα.
- **Ασυμπτωτικός ρυθμός αύξησης** (Asymptotic growth rate): Ένας τρόπος σύγκρισης συναρτήσεων που αγνοεί σταθερές και δεδομένα εισόδου μικρής διάστασης.

Ορισμός: Δοθέντων δυο κατάλληλων συναρτήσεων $g(n)$ και $h(n)$ θα συμβολίζουμε με $\Theta(h(n), g(n))$ το σύνολο των συναρτήσεων $t(n)$ για τις οποίες υπάρχουν σταθερές $A, B > 0$ τέτοιες ώστε να ισχύει η σχέση:

$$Bh(n) \leq t(n) \leq Ag(n), \quad \text{για } n = 1, 2, \dots$$

Εμπειρική πολυπλοκότητα

- Στην ανάλυση αυτή κατασκευάζονται με τον ηλεκτρονικό υπολογιστή ομάδες προβλημάτων με ποικίλες (συνήθως αυξανόμενες) διαστάσεις.
- Τα προβλήματα κάθε ομάδας λύνονται με διαφορετικούς αλγόριθμους και υπολογίζονται οι μέσοι χρόνοι κάθε ομάδας για κάθε αλγόριθμο.
- Συγκρίνοντας τους μέσους χρόνους καθώς η διάσταση αυξάνει, είναι δυνατόν να εξάγουμε συμπεράσματα για τη σχετική αποτελεσματικότητα των αλγόριθμων.

Παράδειγμα υπολογιστικής μελέτης[1]

- Κατασκευή με Η/Υ ομάδων προβλημάτων με αυξανόμενες διαστάσεις.
- Τα προβλήματα κάθε ομάδας λύνονται με διαφορετικούς αλγόριθμους και υπολογίζονται οι μέσοι χρόνοι κάθε ομάδας για κάθε αλγόριθμο.
- Σύγκριση των μέσων χρόνων καθώς η διάσταση αυξάνει.
- Εξαγωγή συμπερασμάτων για τη σχετική αποτελεσματικότητα των αλγόριθμων.

Παράδειγμα υπολογιστικής μελέτης[2]

- Κατασκευή **10** ομάδων προβλημάτων, με αυξανόμενες διαστάσεις από 1.000 έως 10.000, με βήμα 1.000.
- Για κάθε ομάδα, δημιουργούμε **5** στιγμιότυπα.
- Τα $10 * 5 = 50$ διαφορετικά προβλήματα θα λυθούν με 3 διαφορετικούς αλγόριθμους ταξινόμησης και θα υπολογιστούν οι μέσοι χρόνοι κάθε ομάδας για κάθε αλγόριθμο.
- Γράφημα που καταδεικνύει τη σύγκριση των μέσων χρόνων, καθώς η διάσταση αυξάνει.

Υπολογιστική πολυπλοκότητα (Computational Complexity)

- Ένας αλγόριθμος επιλύει ένα πρόβλημα σε πολυωνυμικό χρόνο, εάν η πολυπλοκότητα του της χειρότερης περίπτωσης ανήκει στην κλάση $O(p(n))$, όπου $p(n)$ είναι ένα πολυώνυμο του μεγέθους n της εισόδου του προβλήματος.
- Τα προβλήματα που μπορούν να επιλυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο ονομάζονται βατά (***tractable problems***), ενώ αυτά που δεν μπορούν να επιλυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο ονομάζονται μη-βατά (***intractable problems***).
- Η θεωρία της NP-πληρότητας εφαρμόζεται (τυπικά) σε προβλήματα αποφάσεων και όχι σε προβλήματα βελτιστοποίησης. Όμως, κάθε πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι δυνατόν να το ανάγουμε σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα απόφασης.
- Προβλήματα:
 - Βελτιστοποίησης: λύση με βέλτιστη αντικειμενική τιμή.
 - Απόφασης: απάντηση ΝΑΙ ή ΟΧΙ.
- Για παράδειγμα, το ισοδύναμο πρόβλημα απόφασης του προβλήματος του περιοδεύοντος πωλητή (TSP) είναι, δεδομένου ενός δικτύου G και ενός μη-αρνητικού αριθμού k , εάν υπάρχει διαδρομή με συνολική απόσταση το πολύ k (?)

P, NP, και NP-πλήρη προβλήματα[1]

- Η κλάση **P** είναι εκείνη η κλάση των προβλημάτων απόφασης, τα οποία μπορούν να επιλυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο, με τη χρήση αιτιοκρατικών (*deterministic*) αλγορίθμων. Η κλάση αυτή των προβλημάτων ονομάζεται **πολυωνυμική** (*polynomial*).
- Ορισμένα προβλήματα απόφασης δεν είναι επιλύσιμα από κανέναν γνωστό αλγόριθμο. Τέτοιου είδους προβλήματα ονομάζονται **μη-αποφασίσιμα** (*undecidable problems*). Για παράδειγμα το πρόβλημα του τερματισμού (*halting problem*), από τον A. Turing το 1936.
- Η κλάση **NP** είναι εκείνη η κλάση των προβλημάτων απόφασης, τα οποία μπορούν να επιλυθούν από μη-αιτιοκρατικούς πολυωνυμικούς αλγορίθμους. Η κλάση αυτή των προβλημάτων, αποκαλείται **πολυωνυμική μη-αιτιοκρατική** (*nondeterministic polynomial*).

P, NP, και NP-πλήρη προβλήματα[2]

- Πιο απλά, ένας πολυωνυμικός μη-αιτιοκρατικός αλγόριθμος θεωρούμε ότι είναι ικανός να «μαντέψει» μια λύση ενός προβλήματος απόφασης, τουλάχιστον μια φορά και να είναι σε θέση να επιβεβαιώσει την εγκυρότητα της σε πολυωνυμικό χρόνο.
- Τα περισσότερα προβλήματα ανήκουν στην κλάση NP, η οποία συμπεριλαμβάνει όλα τα προβλήματα της κλάσης P:

$$P \subseteq NP$$

- Αυτό ισχύει διότι, εάν ένα πρόβλημα ανήκει στην κλάση P τότε μπορεί να επιλυθεί αιτιοκρατικά σε πολυωνυμικό χρόνο. Οπότε, για αυτό το πρόβλημα μπορεί και να επαληθευτεί η (βέλτιστη) λύση (από έναν μη-αιτιοκρατικό αλγόριθμο) σε πολυωνυμικό χρόνο.

P, NP, και NP-πλήρη προβλήματα[3]

- Η κλάση NP συμπεριλαμβάνει πάρα πολλά προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης, όπως για παράδειγμα τις εκδόσεις των προβλημάτων απόφασης του προβλήματος του περιοδεύοντος πωλητή (TSP), του προβλήματος του σακιδίου (*knapsack problem*), κ.λ.π.
- Το πλέον σημαντικό ανοιχτό ερευνητικό πρόβλημα της επιστήμης της θεωρητικής πληροφορικής, είναι εάν η κλάση P είναι γνήσιο υποσύνολο της κλάσης NP ή αυτές οι δυο κλάσεις ταυτίζονται στην πραγματικότητα...?
- Lance Fortnow, “The status of the P versus NP problem”, *Communications of the ACM*, 52(9), 78-86, 2009.
(URL: <http://doi.acm.org/10.1145/1562164.1562186>)

http://www.claymath.org/millennium/P_vs_NP
Βραβείο: 1.000.000\$

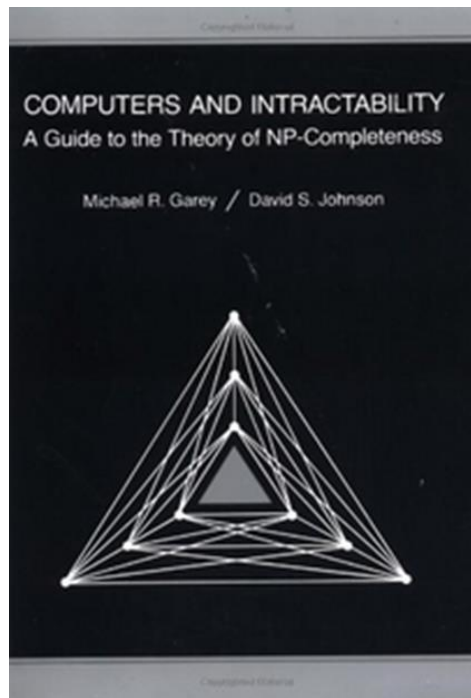
P, NP, και NP-πλήρη προβλήματα[4]

Ένα πρόβλημα απόφασης D καλείται NP-πλήρες (NP-complete), εάν:

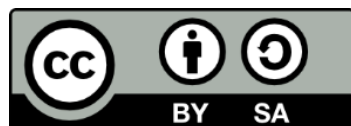
- Ανήκει στην κλάση NP
- Κάθε άλλο πρόβλημα της κλάσης NP είναι πολυωνυμικά αναγόμενο στο D.
- Τα NP-hard προβλήματα αποτελούν μια κλάση προβλημάτων τα οποία είναι «τουλάχιστον τόσο δύσκολα όσο και τα δυσκολότερα προβλήματα της κατηγορίας NP».

P, NP, και NP-πλήρη προβλήματα[5]

M. Garey, D. Johnson, Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness, W. H. Freeman Publications, (1979).



Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

