ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

Ενότητα 3

Άγγελος Σιφαλέρας
Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ακέραιος Προγραμματισμός & δυϊκές τιμές

- Σε μαθηματικά μοντέλα ακεραίου προγραμματισμού (ακέραιο πρόβλημα ή α.π.) δεν μπορούμε εύκολα να ερμηνεύσουμε τις δυϊκές τιμές του προβλήματος.
- Εξαιτίας της διακριτής φύσης των προβλημάτων ακεραίου προγραμματισμού οι δυϊκές τιμές που προκύπτουν στη βέλτιστη λύση ενός προβλήματος ακεραίου προγραμματισμού, δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν εύκολα στην πράξη.
- Οπότε, όταν συναντούμε δυϊκές τιμές στην αναφορά επίλυσης ενός λογισμικού (π.χ. Lingo), οι οποίες αντιστοιχούν σε ακέραιες μεταβλητές, τότε πρέπει να τις αγνοήσουμε.

Αλγόριθμος κλάδου και φραγής Branch & Bound Algorithm (BBA)

Μια ιστορική αναδρομή…

- A.H. Land & A.G. Doig (1960). “An automatic method of solving discrete programming problems”, Econometrica, 28(3), 497-520.
- G.J Li & B.W Wah (1984). “Computational efficiency of parallel approximate branch-and-bound algorithms”, in Proceedings of the International Conference on Parallel Processing, pp. 473-480.
- E.L Lawler & D.W Wood (1986). “Branch-and-bound methods: A survey”, Operations Research, 14, 699-719.

Αλγόριθμος κλάδου και φραγής (περίγραμμα)

•Αρχικά λύνουμε το αντίστοιχο γραμμικό πρόβλημα (γ.π.) χαλάρωσης του α.π. ή μικτού γραμμικού ακεραίου προβλήματος (γ.α.π.). Αν το πρόβλημα χαλάρωσης, μας δίνει ακέραιες λύσεις, τότε αυτή είναι και η λύση του α.π.

•Σε κάθε περίπτωση, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στη λύση του γ.π. χαλάρωσης, αποτελεί ένα κάτω φράγμα για την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για το α.π. ή μικτό γ.α.π. (κατά ανάλογο τρόπο, αποτελεί ένα άνω φράγμα, όταν έχουμε πρόβλημα μεγιστοποίησης).

•Εξετάζουμε τις λύσεις του γ.π. χαλάρωσης για τις μεταβλητές εκείνες οι οποίες δεν είναι ακέραιες ενώ αυτό απαιτείται. Επιλέγουμε εκείνη που έχει το μεγαλύτερο δεκαδικό μέρος. Αν υπάρχουν δύο ή περισσότερες τέτοιες επιλέγουμε αυθαίρετα μια από όλες.

•Σχηματίζουμε δύο κλαδιά (υπό-προβλήματα) με βάση αυτή τη μεταβλητή διακλάδωσης.

Αλγόριθμος κλάδου και φραγής (fathomed node & incumbent solution)

- Η καλύτερη ακέραιη λύση που βρήκαμε σε οποιοδήποτε σημείο κατά την αναζήτηση ονομάζεται incumbent solution.
- Σταματούμε την περαιτέρω διακλάδωση σε έναν κόμβο (fathomed node), εάν για το αντίστοιχο γραμμικό πρόβλημα χαλάρωσης ισχύει ότι:
  – Δεν έχει εφικτή λύση (αδύνατο).
  – Η λύση του είναι χειρότερη (μεγαλύτερη) από την καλύτερη ακέραιη λύση (incumbent solution) που βρέθηκε μέχρι στιγμής καθώς, για οποιοδήποτε υπό-πρόβλημα προκύψει, δεν πρόκειται να οδηγήσει σε καλύτερη (μικρότερη) ακέραια λύση.

Αλγόριθμος κλάδου και φραγής (Best Bound & Gap)

- Μόλις βρεθεί μια ακέραια λύση (incumbent solution) τότε, η αντικειμενική τιμή αυτής της λύσης αποτελεί για το πρόβλημά ελαχιστοποίησης μας ένα έγκυρο άνω όριο (valid upper bound). Έτσι, γνωρίζουμε ότι δεν θα χρειαστεί να δεχθούμε οποιαδήποτε άλλη ακέραιη λύση με τιμή μεγαλύτερη από αυτή

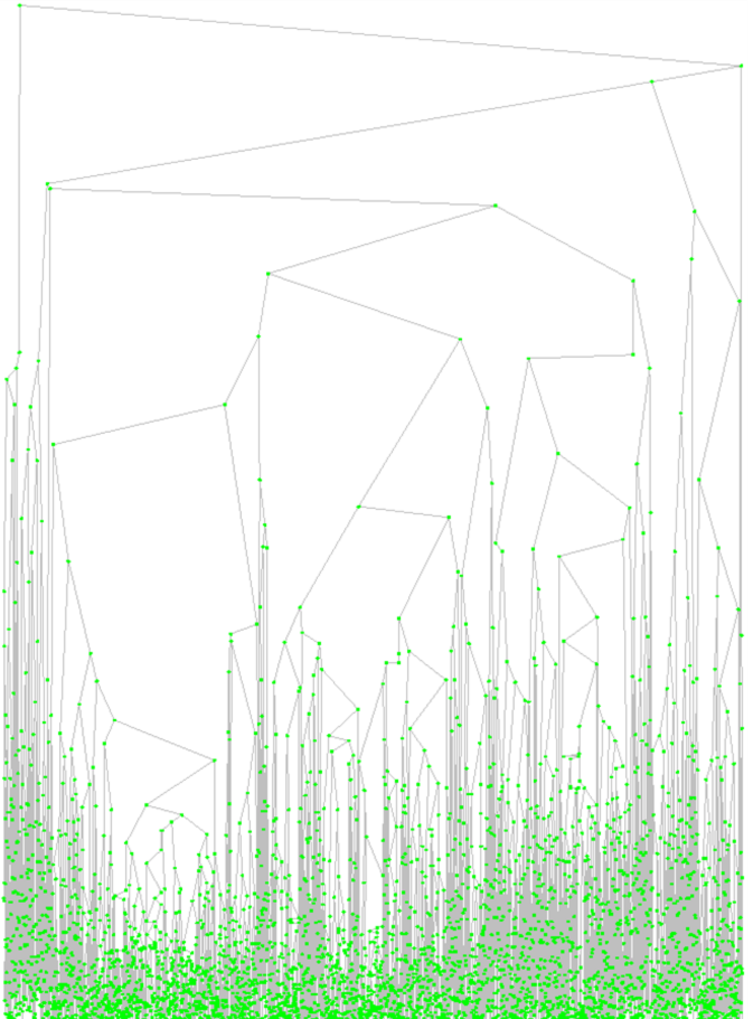
- Επίσης, κατά τη διάρκεια αναζήτησης του δέντρου διακλάδωσης και φραγής, η ελάχιστη των βέλτιστων τιμών αντικειμενικών συναρτήσεων των τωρινών κόμβων φύλλων του δέντρου (current leaf nodes), αποτελεί για το πρόβλημά ελαχιστοποίησης μας ένα έγκυρο κάτω όριο (valid lower bound).

- Η διαφορά μεταξύ της τρέχουσας τιμής του άνω και κάτω ορίου, ονομάζεται χάσμα (gap). Όταν το χάσμα μηδενιστεί, τότε πλέον έχουμε αποδεδειγμένα φτάσει σε βέλτιστη λύση.

Gurobi log file

```
gurobi> m = read("D:\Lab_files\MPS_examples\CLSP-RM-SS_1_10.mps")
Read MPS format model from file D:\Lab_files\MPS_examples\CLSP-RM-SS_1_10.mps
Reading time = 0.15 seconds
CLSP-RM-: 2464 rows, 768 columns, 20848 nonzeros
gurobi> m.optimize()
Optimize a model with 2464 rows, 768 columns and 20848 nonzeros
Found heuristic solution: objective 10369.3
Presolve removed 26 rows and 32 columns
Presolve time: 0.05s
Presolved: 2438 rows, 736 columns, 20776 nonzeros
Variable types: 488 continuous, 248 integer (248 binary)

Root relaxation: objective 5.881735e+03, 596 iterations, 0.01 seconds

    Nodes    |    Current Node    |     Objective Bounds      |     Work
 Expl Unexpl |  Obj  Depth IntInf | Incumbent    BestBd   Gap | It/Node Time

     0     0 5881.73487    0  237 10369.3304 5881.73487  43.3%     -    0s
     0     0 7126.27946    0  214 10369.3304 7126.27946  31.3%     -    0s
     0     0 7388.89546    0  213 10369.3304 7388.89546  28.7%     -    0s
     0     0 7504.00378    0  186 10369.3304 7504.00378  27.6%     -    0s
H    0     0                    8629.5714500 7504.00378  13.0%     -    0s
     0     0 7535.54919    0  202 8629.57145 7535.54919  12.7%     -    0s
H    0     0                    8437.1428000 7535.54919  10.7%     -    0s
     0     0 7547.35136    0  212 8437.14280 7547.35136  10.5%     -    0s
     0     0 7553.70015    0  220 8437.14280 7553.70015  10.5%     -    0s
     0     0 7557.21649    0  215 8437.14280 7557.21649  10.4%     -    0s
     0     0 7558.69615    0  228 8437.14280 7558.69615  10.4%     -    0s
     0     0 7558.69615    0  228 8437.14280 7558.69615  10.4%     -    0s
     0     2 7558.69615    0  228 8437.14280 7558.69615  10.4%     -    0s
H   83    84                    8395.5983000 7563.38573  9.91%   7.9    0s
H   85    86                    8353.2679000 7563.38573  9.46%   8.2    0s
H  341   337                    8265.6919500 7563.38573  8.50%   9.2    1s
```

Αλγόριθμος κλάδου και φραγής (search tree)



Χαρακτηριστικά μεγάλο δέντρο αναζήτησης με τόσους κόμβους, όσα τα MIPs που κατασκευάστηκαν & επιλύθηκαν συνολικά, από το στιγμιότυπο USA13509.

(Το στιγμιότυπο USA13509 είναι ένα πρόβλημα ακεραίου προγραμματισμού -TSP-, του οποίου τα στοιχεία αποτελούν το χάρτη των 13509 πόλεων των ΗΠΑ (με πληθυσμό τουλάχιστον 500 όταν το στιγμιότυπο ενσωματώθηκε στη συλλογή TSPLIB)

http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/usa13509/usa13509.html

Presolve, Cutting Planes, Heuristics, & Parallelism

- Οι υπολογιστικές βελτιώσεις των αλγορίθμων επίλυσης ακεραίων προβλημάτων, οφείλονται κατά κύριο λόγο σε 4 παράγοντες:
  – Presolve (προλυτικές διαδικασίες)
  – Cutting Planes (επίπεδες τομές)
  – Heuristics (ευρετικές μέθοδοι)
  – Parallelism (Παραλληλοποίηση)

Presolve

- Οι προλυτικές διαδικασίες αποτελούν ένα σύνολο μεθοδολογιών για την αναγωγή των αρχικών προβλημάτων σε αντίστοιχα προβλήματα μικρότερης διάστασης.
- Οι προλυτικές διαδικασίες εφαρμόζονται πριν τη λύση του ακεραίου (ή και γραμμικού) προβλήματος.
- Οι προλυτικές διαικασίες μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε:

  i. LP-presolve reduction

  ii. MIP-specific reduction (όταν βασίζονται σε περιορισμούς ακεραιότητας)

Μέθοδοι περιορισμού του εφικτού χώρου: cutting-plane method

- Ralph E. Gomory, “Outline of an Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs”, Bulletin of the American Mathematical Society, 64, 275-278, 1958.
- Cornuejols, Gerard, “Revival of the Gomory Cuts in the 1990s”, Annals of Operations Research, 149(1), 63-66, 2007.
- Cornuejols, Gerard, “Valid inequalities for mixed integer linear programs”. Mathematical Programming, 112(1), 3-44, 2008.
- Κυρτό περίβλημα (convex hull) ενός συνόλου S από n σημεία είναι το ελάχιστο κυρτό πολύγωνο P τέτοιο ώστε κάθε ένα από τα n σημεία στο S βρίσκεται πάνω στο σύνορο του S ή στο εσωτερικό του S.

Cutting Planes

•Από υπολογιστικής απόψεως δεν είναι σωστό/εύκολο να προστεθεί ο νέος περιορισμός – τομή από την αρχή. Γενικώς, υπάρχει ένας πολύ μεγάλος αριθμός παρόμοιων επιπλέων περιορισμών, αλλά:

i. Έχει μεγάλο υπολογιστικό κόστος η εύρεση όλων των παρόμοιων περιορισμών και θα ήταν αδύνατη η εισαγωγή αυτών στο μαθηματικό μοντέλο.

ii. Επιπλέον, η προσθήκη περιορισμών δυσκολεύει την επίλυση του αντίστοιχου γραμμικού προβλήματος χαλάρωσης (το πλήθος περιορισμών επιφέρει πιο μεγάλο βαθμό δυσκολίας από το πλήθος των μεταβλητών).

•Γενικά, επιθυμούμε να προσθέσουμε κάποιους περιορισμούς – τομές, μόνο εάν γνωρίζουμε ότι πρόκειται να συνεισφέρουν. Με προσεκτική προσθήκη τέτοιων περιορισμών, μπορούμε να επιτύχουμε σημαντικά οφέλη κατά τη διαδικασία επίλυσης.

Heuristics

•Η γρήγορη εύρεση καλών προσωρινών εφικτών ακεραίων λύσεων (incumbents), έχει εξαιρετική σημασία στην αναζήτηση ενός MIP για αρκετούς λόγους:

i. Πρώτον, ίσως είναι αδύνατον να καταλήξουμε σε βελτιστότητα. Για παράδειγμα, το αντίστοιχο MIP ίσως να είναι πολύ δύσκολο, ή μπορεί να υπάρχουν περιορισμοί στο μέγιστο χρόνο επίλυσης από τον χρήστη (π.χ., αεροπορικά δρομολόγια σε καθημερινή βάση…). Σε κάθε περίπτωση, επιθυμούμε να έχουμε τη καλύτερη δυνατή εφικτή λύση κατά τον τερματισμό του αλγορίθμου.

ii. Δεύτερον, οι καλές εφικτές λύσεις επίσης βοηθούν στη διαδικασία αναζήτησης πριν τον τερματισμό. Όσο καλύτερη είναι η αντικειμενική τιμή της προσωρινής λύσης (incumbent), τόσο πιο πιθανό είναι η τιμή ενός γραμμικού υπό-προβλήματος χαλάρωσης (LP relaxation) να την υπερβαίνει (σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης) οπότε μπορούμε να μην κάνουμε επιπλέον διακλαδώσεις σε αυτόν τον κόμβο (fathomed node).

Parallelism

•Ο κύριος τρόπος παραλληλοποίησης είναι το γεγονός ότι, διαφορετικοί κόμβοι στο δένδρο αναζήτησης του MIP μπορούν να επεξεργαστούν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο.

•Όμως, ο κόμβος ρίζα έχει περιορισμένες δυνατότητες παραλληλοποίησης.

•Ως εκ τούτου, μαθηματικά μοντέλα τα οποία εξερευνούν πολύ μεγάλα δένδρα αναζήτησης είναι σε θέση να αξιοποιήσουν τους διαφορετικούς πυρήνες του επεξεργαστή (CPU cores) αρκετά αποτελεσματικά, ενώ αυτά τα οποία δαπανούν τον περισσότερο υπολογιστικό χρόνο στον αρχικό κόμβο ρίζα είναι πιο περιορισμένα σε ικανότητες αξιοποίησης πολλαπλών επεξεργαστικών πυρήνων.

Συλλογές μετρό-προβλημάτων (Benchmarks) [1]

Η συλλογή MIPLIB 2010 διατίθεται δωρεάν από την ιστοσελίδα: http://miplib.zib.de

Koch T., Achterberg T., Andersen E., Bastert O., Berthold T., Bixby R., Danna E., Gamrath G., Gleixner A., Heinz S., Lodi A., Mittelmann H., Ralphs T., Salvagnin D., Steffy D., & Wolter K. (2011). MIPLIB 2010 Mixed Integer Programming Library version 5. *Mathematical Programming Computation*, 3(2), 103-163. (URL: http://dx.doi.org/10.1007/s12532-011-0025-9)

Achterberg T., Koch T., & Martin A. (2006). MIPLIB 2003, *Operations Research Letters*, 34(4), 361-372. (URL: http://dx.doi.org/10.1016/j.orl.2005.07.009)

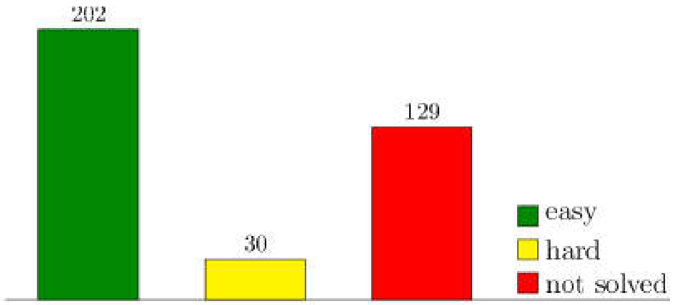
Bixby R., Ceria S., McZeal C., & Savelsbergh M. (1998). An updated mixed integer programming library: MIPLIB 3.0. *Optima*, 58, 12-15.

Bixby R., Boyd E., & Indovina R. (1992). MIPLIB: a test set of mixed integer programming problems, *SIAM News*, 25(2), 16.

Συλλογές μετρό-προβλημάτων (Benchmarks) [2]

•Η νέα έκδοση αποτελείται από 361 στιγμιότυπα προβλημάτων ταξινομημένα σε διάφορες κατηγορίες.

•Η συλλογή περιέχει το κυρίως σύνολο προβλημάτων benchmark το οποίο περιλαμβάνει 87 στιγμιότυπα προβλημάτων, τα οποία είναι όλα επιλύσιμα από τους σημερινές υλοποιήσεις των αλγορίθμων, καθώς και ένα (challenge) σύνολο από 164 στιγμιότυπα προβλημάτων, πολλά από τα οποία ακόμη και στη σημερινή εποχή παραμένουν άλυτα.

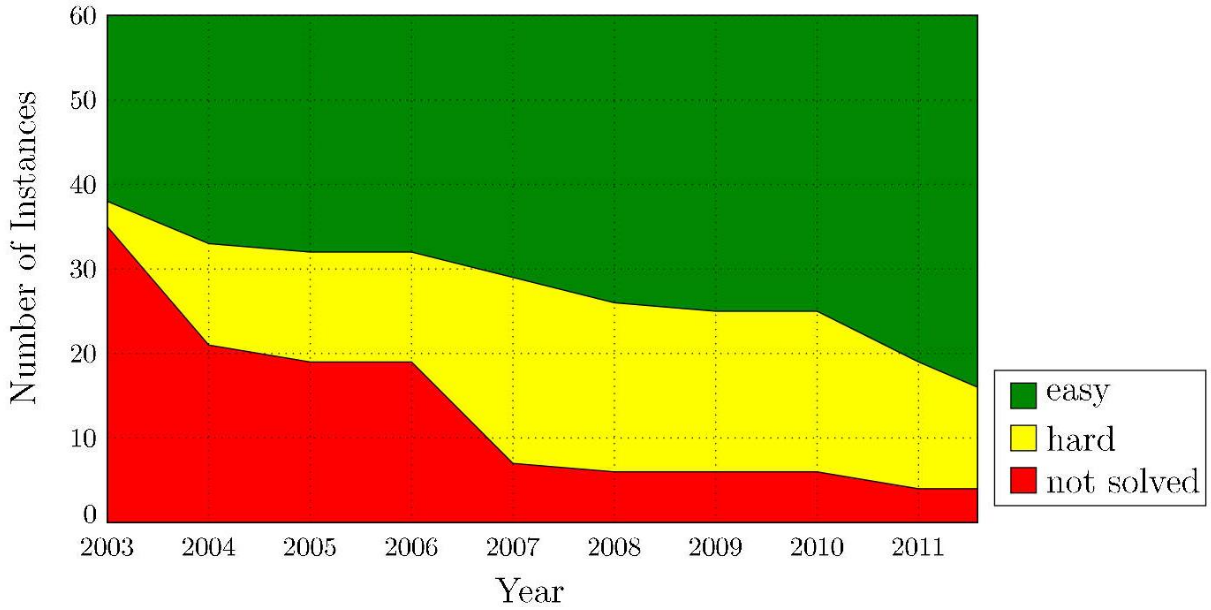


- Πλήθος λυμένων προβλημάτων της συλλογής MIPLIB 2010 τα οποία είναι κατηγοριοποιημένα ως εύκολα, δύσκολα, ή άλυτα.
- «Εύκολο» σημαίνει ότι, το συγκεκριμένο πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί μέσα σε μια ώρα χρησιμοποιώντας έναν εμπορικό λύτη προβλημάτων μ.π.α.π., «δύσκολο» σημαίνει ότι το πρόβλημα λύνεται μεν, αλλά απαιτείται περισσότερος υπολογιστικός χρόνος.

Συλλογές μετρό-προβλημάτων (Benchmarks) [3]

Η συλλογή MIPLIB 2003 διατίθεται δωρεάν από την ιστοσελίδα:
http://miplib.zib.de/miplib2003

Σύγκριση του πλήθους των λυμένων προβλημάτων της συλλογής MIPLIB 2003 στην αρχή κάθε έτους.



Συλλογές μετρό-προβλημάτων για προβλήματα μικτού-ακεραίου μη γραμμικού προγραμματισμού

Η συλλογή MINLPLib διατίθεται δωρεάν από την ιστοσελίδα: http://www.gamsworld.org/minlp/minlplib.htm

Bussieck, M.R., Drud, A.S. & Meeraus, A. (2003). MINLPLib - A collection of test models for mixed-integer nonlinear programming, *INFORMS Journal on Computing*, 15(1), 114-119.
(URL: http://dx.doi.org/10.1287/ijoc.15.1.114.15159)

MINLPLib Model Statistics:
http://www.gamsworld.org/minlp/minlplib/minlpstat.htm

Η συλλογή MINLPLib περιέχει και τη συλλογή MacMINLP:
Leyffer, S. (2000). MacMINLP – AMPL collection of mixed integer nonlinear programs.
http://wiki.mcs.anl.gov/leyffer/index.php/MacMINLP

Συλλογές μετρό-προβλημάτων για προβλήματα ολικής βελτιστοποίησης (global optimization)

Bussieck, M. (2004). Globallib – a collection of nonlinear programming problems. http://www.gamsworld.org/global/globallib.htm

- Η βιβλιοθήκη Globallib αποτελεί μια συλλογή μοντέλων μη γραμμικού προγραμματισμού, σε γλώσσα GAMS.
- Μπορεί εύκολα να γίνει μετατροπή των προβλημάτων της Globallib από μορφή .gms σε .lp, .mps, .mod, κ.α. μέσω του παρακάτω εργαλείου:
- PAVER – GAMS Model Translation Web Submission Tool (GMS2XX)
  http://www.gamsworld.org/performance/paver/convert_submit.htm

Συλλογές μετρό-προβλημάτων για σχεδίαση δικτύων τηλεπικοινωνιών

- **SNDlib 1.0 – Survivable Network Design Library**
  SNDlib is a library of test instances for Survivable fixed telecommunication Network Design
  http://sndlib.zib.de

  Orlowski S., Wessäly R., Pióro M., and Tomaszewski A. (2010). SNDlib 1.0 – Survivable Network Design Library, *Networks*, 55(3), 276-286.
  (URL: http://dx.doi.org/10.1002/net.20371)

- **FAP web**
  FAP web is a web-site devoted to Frequency Assignment Problems (FAPs) in wireless communication networks
  http://fap.zib.de

Open Source λογισμικά πακέτα βελτιστοποίησης για Μικτό Ακέραιο Γραμμικό Προγραμματισμό

- **GLPK** (GNU Linear Programming Kit). Το πακέτο GLPK υποστηρίζει τη γλώσσα μοντελοποίησης GNU MathProg, η οποία αποτελεί υποσύνολο της γλώσσας μοντελοποίησης AMPL. Διατίθεται δωρεάν από την ιστοσελίδα: http://www.gnu.org/s/glpk
- **GLPK Lab for Windows**. Σύνολο εργαλείων και βιβλιοθηκών, βασισμένο στο πακέτο GLPK. Επίσης, παρέχει και ένα γραφικό περιβάλλον επεξεργασίας κώδικα GNU MathProg. Διατίθεται δωρεάν από την ιστοσελίδα: http://glpklabw.sourceforge.net
- **GUSEK (GLPK Under Scite Extended Kit)**. Άλλο ένα σύνολο εργαλείων και βιβλιοθηκών, βασισμένο στο πακέτο GLPK. Επίσης, παρέχει και ένα γραφικό περιβάλλον επεξεργασίας κώδικα GNU MathProg. Διατίθεται δωρεάν από την ιστοσελίδα: http://gusek.sourceforge.net
- **lp_solve**. Το πακέτο lp_solve (free με άδεια GNU lesser general public license) αποτελεί έναν λύτη προβλημάτων μικτού ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού. Το πακέτο περιέχει και το γραφικό περιβάλλον επεξεργασίας κώδικα GNU MathProg με όνομα LPSolve IDE. Διατίθεται δωρεάν από την ιστοσελίδα: http://lpsolve.sourceforge.net

Gurobi Optimizer State-of-the-Art Mathematical Programming Solver

Παρουσίαση επίλυσης μετρό-προβλημάτων από τη συλλογή **MIPLIB 2010**, με τον λύτη ***Gurobi***:

1 «εύκολο πρόβλημα»: **30_70_4.5_0.95_100**

(12,526 γραμμές x 10,976 στήλες, 46,640 μη μηδενικές τιμές παραμέτρων

10,975 δυαδικές μεταβλητές, και 1 συνεχή μεταβλητή).

```
m =
read("D:/Lab_files/MPS_examples/30_70_4.5_0.95_100.mps")
m.optimize()
```

30_70_4.5_0.95_100.mps

C:\Windows\system32\cmd.exe

```
Python 2.7.2 (default, Jun 12 2011, 14:24:46) [MSC v.1500 64 bit (AMD64)] on win
32
Type "help", "copyright", "credits" or "license" for more information.
Warning: Failed to open log file 'gurobi.log'

Gurobi Interactive Shell (win64), Version 5.0.1
Copyright (c) 2012, Gurobi Optimization, Inc.
Type "help()" for help

gurobi> m = read("D:/Lab_files/MPS_examples/30_70_4.5_0.95_100.mps")
Read MPS format model from file D:/Lab_files/MPS_examples/30_70_4.5_0.95_100.mps

Reading time = 0.07 seconds
30_70_4.5_0.95_100: 12526 rows, 10976 columns, 46640 nonzeros
gurobi> m.optimize()
Optimize a model with 12526 rows, 10976 columns and 46640 nonzeros
Presolve removed 32 rows and 18 columns
Presolve time: 0.30s
Presolved: 12494 rows, 10958 columns, 46552 nonzeros
Variable types: 0 continuous, 10958 integer (10957 binary)
Found heuristic solution: objective 355.0000000

Root relaxation: objective 3.000000e+00, 11100 iterations, 2.29 seconds

    Nodes    |    Current Node    |     Objective Bounds      |     Work
 Expl Unexpl |  Obj  Depth IntInf | Incumbent    BestBd   Gap | It/Node Time

     0     0    3.00000    0   23  355.00000    3.00000  99.2%     -    4s
H    0     0                       4.0000000    3.00000  25.0%     -    4s
H    0     0                       3.0000000    3.00000   0.0%     -    4s

Explored 0 nodes (19357 simplex iterations) in 4.77 seconds
Thread count was 8 (of 8 available processors)

Optimal solution found (tolerance 1.00e-04)
Best objective 3.000000000000e+00, best bound 3.000000000000e+00, gap 0.0%
gurobi>
```

Χαρακτηριστικό παράδειγμα υπολογιστικής δυσκολίας Ακεραίου Προγραμματισμού [1]

- Αν και υπάρχουν εξαιρετικά αποτελεσματικοί λύτες προβλημάτων γραμμικής βελτιστοποίησης, η επίλυση προβλημάτων ακέραιης βελτιστοποίησης μπορεί να είναι ιδιαίτερα δύσκολη πρόκληση, ακόμη και για ορισμένα προβλήματα μικρής διάστασης.
- Για παράδειγμα, το παρακάτω πρόβλημα (*unbounded knapsack problem*), δεν είναι δυνατόν να λυθεί ούτε και μετά από ώρες υπολογισμού, χρησιμοποιώντας ακόμη και την πρόσφατη έκδοση του *state-of-the-art* λύτη *Gurobi*:

$$\min\ z = 213x_1 - 1928x_2 - 11111x_3 - 2345x_4 - 9123x_5$$

$$12223x_1 + 12224x_2 + 36674x_3 + 61119x_4 + 85569x_5 = 89643482$$

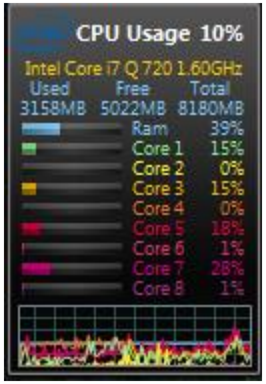
$$x_i \in \mathrm{N},\ i = 1..5$$

Karen Aardal and Arjen K. Lenstra (2004) “Hard equality constrained integer knapsacks”, *Mathematics of Operations Research*, 29(3), 724-738.
(URL: http://dx.doi.org/10.1287/moor.1040.0099)

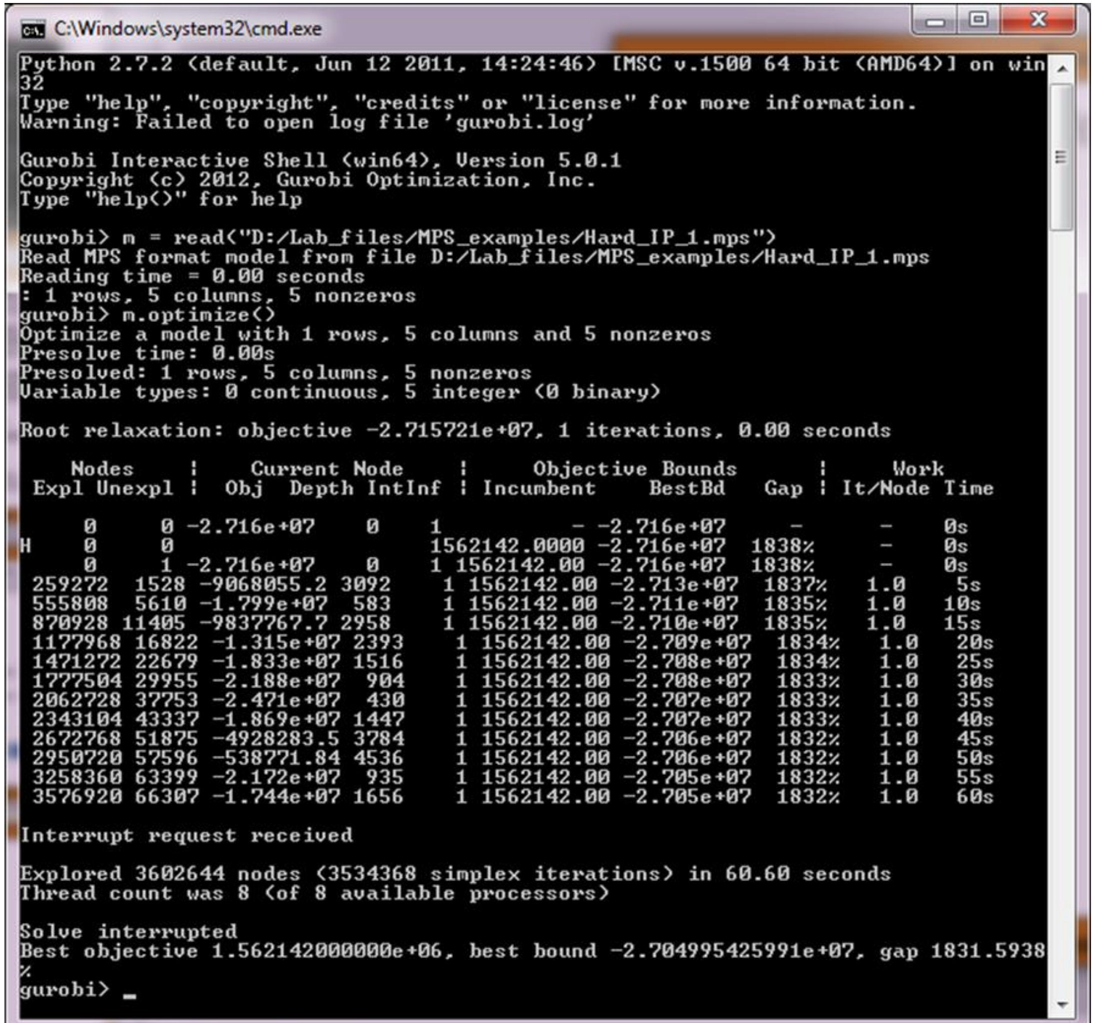
Χαρακτηριστικό παράδειγμα υπολογιστικής δυσκολίας Ακεραίου Προγραμματισμού [2]

```
#--- Variables ---
var x1 integer >= 0;
var x2 integer >= 0;
var x3 integer >= 0;
var x4 integer >= 0;
var x5 integer >= 0;

#--- Objective function ---
minimize cost: 213*x1 - 1928*x2 - 11111*x3 - 2345*x4 - 9123*x5;

#--- Constraints ---
s.t. C1: 12223*x1 + 12224*x2 + 36674*x3 + 61119*x4 + 85569*x5 = 89643482;
```

```
model Hard_IP_1.mod;
option solver gurobi_ampl;
solve;
display x1, x2, x3, x4, x5;
```



Χαρακτηριστικό παράδειγμα υπολογιστικής δυσκολίας Ακεραίου Προγραμματισμού [3]



```
C:\Windows\system32\cmd.exe
Python 2.7.2 (default, Jun 12 2011, 14:24:46) [MSC v.1500 64 bit (AMD64)] on win
32
Type "help", "copyright", "credits" or "license" for more information.
Warning: Failed to open log file 'gurobi.log'

Gurobi Interactive Shell (win64), Version 5.0.1
Copyright (c) 2012, Gurobi Optimization, Inc.
Type "help()" for help

gurobi> m = read("D:/Lab_files/MPS_examples/Hard_IP_1.mps")
Read MPS format model from file D:/Lab_files/MPS_examples/Hard_IP_1.mps
Reading time = 0.00 seconds
: 1 rows, 5 columns, 5 nonzeros
gurobi> m.optimize()
Optimize a model with 1 rows, 5 columns and 5 nonzeros
Presolve time: 0.00s
Presolved: 1 rows, 5 columns, 5 nonzeros
Variable types: 0 continuous, 5 integer (0 binary)

Root relaxation: objective -2.715721e+07, 1 iterations, 0.00 seconds

    Nodes    |    Current Node    |     Objective Bounds      |     Work
 Expl Unexpl |  Obj  Depth IntInf | Incumbent    BestBd   Gap | It/Node Time

     0     0 -2.716e+07    0    1          - -2.716e+07     -      -    0s
H    0     0                    1562142.0000 -2.716e+07  1838%     -    0s
     0     1 -2.716e+07    0    1 1562142.00 -2.716e+07  1838%     -    0s
 259272  1528 -9068055.2 3092    1 1562142.00 -2.713e+07  1837%   1.0    5s
 555808  5610 -1.799e+07  583    1 1562142.00 -2.711e+07  1835%   1.0   10s
 870928 11405 -9837767.7 2958    1 1562142.00 -2.710e+07  1835%   1.0   15s
 1177968 16822 -1.315e+07 2393    1 1562142.00 -2.709e+07  1834%   1.0   20s
 1471272 22679 -1.833e+07 1516    1 1562142.00 -2.708e+07  1834%   1.0   25s
 1777504 29955 -2.188e+07  904    1 1562142.00 -2.708e+07  1833%   1.0   30s
 2062728 37753 -2.471e+07  430    1 1562142.00 -2.707e+07  1833%   1.0   35s
 2343104 43337 -1.869e+07 1447    1 1562142.00 -2.707e+07  1833%   1.0   40s
 2672768 51875 -4928283.5 3784    1 1562142.00 -2.706e+07  1832%   1.0   45s
 2950720 57596 -538771.84 4536    1 1562142.00 -2.706e+07  1832%   1.0   50s
 3258360 63399 -2.172e+07  935    1 1562142.00 -2.705e+07  1832%   1.0   55s
 3576920 66307 -1.744e+07 1656    1 1562142.00 -2.705e+07  1832%   1.0   60s

Interrupt request received

Explored 3602644 nodes (3534368 simplex iterations) in 60.60 seconds
Thread count was 8 (of 8 available processors)

Solve interrupted
Best objective 1.562142000000e+06, best bound -2.704995425991e+07, gap 1831.5938
%
gurobi> _
```

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης