Υπολογιστικά & Διακριτά Μαθηματικά

Ενότητα 8: Σχέσεις - Πράξεις – Δομές

Στεφανίδης Γεώργιος

Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Διμελείς σχέσεις

- Έστω A και B δύο μη κενά σύνολα. Μια **διμελής σχέση** R από το A στο B είναι ένα υποσύνολο R του καρτεσιανού γινομένου $A \times B$.
- Δοθέντος ενός (διατεταγμένου) ζεύγους (x, y) από το $A \times B$, το x σχετίζεται με το y δια της R, αν και μόνον αν το (x, y) ανήκει στο R. Συμβολικά

$$x\mathrm{R}y \Leftrightarrow (x, y) \in \mathrm{R}$$

- Στην ειδική περίπτωση που είναι $A = B$ τότε απλά λέμε ότι R είναι μια **διμελής σχέση στο A**.
- Παράδειγμα: Έστω $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{1, 3, 4, 6\}$ και η σχέση R να σημαίνει "διαιρεί".

➢ Επειδή 2R4, 2R6, 3R3, 3R6, έχουμε

$$\mathrm{R} = \{(2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6)\}.$$

- Μια διμελής σχέση μεταξύ πεπερασμένων συνόλων μπορεί να αναπαρασταθεί με διάφορους τρόπους.
- Ένας τρόπος χρησιμοποιεί τον πίνακα και ένας άλλος τον γράφο.

Ιδιότητες των σχέσεων [1]

- Μια σχέση R σε ένα σύνολο A λέγεται

- **ανακλαστική** όταν $\forall a \in A$, $a\mathrm{R}a$
- ➢ δηλ. όταν $(a, a) \in \mathrm{R}$, για κάθε στοιχείο του συνόλου A.

- **συμμετρική** όταν $\forall a, b \in A$, $a\mathrm{R}b \Rightarrow b\mathrm{R}a$
- ➢ δηλ. όταν $(a, b)\in\mathrm{R} \Rightarrow (b, a)\in\mathrm{R}$, για κάθε $a, b \in A$.

- **αντισυμμετρική** όταν $\forall a, b \in A$, ($a\mathrm{R}b$ και $b\mathrm{R}a \Rightarrow a = b$)
- ➢ δηλ. όταν ($(a, b)\in\mathrm{R}$ και $(b, a)\in\mathrm{R} \Rightarrow a = b$), για κάθε $a, b \in A$.

- **μεταβατική** όταν $\forall a, b, c \in A$, ($a\mathrm{R}b$ και $b\mathrm{R}c \Rightarrow a\mathrm{R}c$)
- ➢ δηλ. όταν ($(a, b)\in\mathrm{R}$ και $(b, c)\in\mathrm{R} \Rightarrow (a, c)\in\mathrm{R}$), για κάθε $a, b, c \in A$.

Ιδιότητες των σχέσεων [2]

- **Παράδειγμα**:
- Αν a, $b \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$, τότε με τον ακόλουθο τρόπο

$$a \equiv b \ (\mathrm{mod}\ n) \Leftrightarrow a - b = k \cdot n,\ k \in \mathbb{Z},$$

- ορίζεται μια σχέση "$\equiv$ (mod n)" στο σύνολο $\mathbb{Z}$ που διαβάζεται "a ισότιμο με το b modulo n" και η οποία λέγεται **ισοτιμία**.
- Έτσι, $11 \equiv -3$ (mod 7), αφού

$$11 - (-3) = 14 = 2 \cdot 7$$

- και $3 \equiv 42$ (mod 13), αφού

$$3 - 42 = -39 = (-3) \cdot 13.$$

- Η σχέση "$\equiv$ (mod n)" είναι

➢ ανακλαστική, γιατί για κάθε $a \in \mathbb{Z}$ είναι $\boldsymbol{a \equiv a}$ **(mod *n*),** αφού $a - a = 0 = 0 \cdot n$

➢ συμμετρική, γιατί αν $\boldsymbol{a \equiv b}$ **(mod *n*),** τότε υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ με $a - b = k \cdot n$,
οπότε $b - a = (-k) \cdot n$, που σημαίνει ότι $\boldsymbol{b \equiv a}$ **(mod *n*)**, αφού $-k \in \mathbb{Z}$

➢ μεταβατική, γιατί αν $\boldsymbol{a \equiv b}$ **(mod *n*)** και $\boldsymbol{b \equiv c}$ **(mod *n*)**, τότε υπάρχουν ακέραιοι k_1 και k_2 με $a - b = k_1 \cdot n$ και $b - c = k_2 \cdot n$, οπότε

$$a - c = (a - b) + (b - c) = k_1 \cdot n + k_2 \cdot n = (k_1 + k_2) \cdot n$$

και συνεπώς

$$\boldsymbol{a \equiv c}\ \textbf{(mod } \boldsymbol{n}\textbf{)}, \text{ αφού } (k_1 + k_2) \in \mathbb{Z}.$$

Σχέσεις ισοδυναμίας

- Μια διμελής σχέση R σε ένα σύνολο A λέγεται ότι είναι μια **σχέση ισοδυναμίας** στο A όταν είναι
- ➢ (i) ανακλαστική,
- ➢ (ii) συμμετρική και
- ➢ (iii) μεταβατική.
- Μια σχέση ισοδυναμίας συμβολίζεται συνήθως με το σύμβολο ~ (ή $\equiv$) που διαβάζεται συνήθως "ισοδύναμο". Δύο στοιχεία που συνδέονται με μια σχέση ισοδυναμίας λέγονται **ισοδύναμα**.
- Δηλαδή για μια σχέση ισοδυναμίας στο A ισχύουν:

i. $\forall a \in A, a \sim a$

ii. $\forall a, b \in A, a \sim b \Rightarrow b \sim a$

iii. $\forall a, b, c \in A, (a \sim b$ και $b \sim c \Rightarrow a \sim c)$

- Παραδείγματος χάριν, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό και όσα αναφέρθηκαν σε προηγούμενο Παράδειγμα, η σχέση "$\equiv$ (mod n)" είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathbb{Z}$.

Κλάσεις ισοδυναμίας [1]

- Αν $a \in A$ και ~ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο A, το σύνολο όλων των στοιχείων x του A που ικανοποιούν την $x \sim \alpha$ λέγεται **κλάση ισοδυναμίας** του α στο A και συμβολίζεται με $[a]$, δηλαδή

$$[a] = \{x : x \in A \text{ με } x \sim a\}$$

- Κάθε $x \in [a]$ ονομάζεται **αντιπρόσωπος** της κλάσης ισοδυναμίας $[a]$. Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι για τις κλάσεις ισοδυναμίας ισχύουν οι ιδιότητες

i. $a \in [a]$

ii. αν $b \in [a]$, τότε $[b] = [a]$

iii. αν $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, τότε $[\alpha] = [b]$

Κλάσεις ισοδυναμίας [2]

- **Θεώρημα**:
  - Αν ~ είναι μια σχέση ισοδυναμίας σ’ ένα σύνολο *A*, τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

i. $a \sim b$

ii. $[a] = [b]$

iii. $[a] \cap [b] \neq \varnothing$

- **Θεώρημα** :
  - Μια σχέση ισοδυναμίας ~ σ’ ένα σύνολο *A* δημιουργεί μια διαμέριση του *A* και αντίστροφα, μια διαμέριση του *A* ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας στο *A*.

Παράδειγμα

- **Παράδειγμα**: Οι κλάσεις ισοδυναμίας ως προς τη σχέση ισοδυναμίας "$\equiv$ (mod n)" που ορίσαμε στο Παράδειγμα 4.5 ονομάζονται **κλάσεις καταλοίπων modulo *n***.
- Έτσι η κλάση καταλοίπων modulo n του $a \in \mathbb{Z}$ περιέχει όλους τους ακέραιους x, για τους οποίους η διαφορά $x - a$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του n, δηλαδή

$$[a] = \{x : x = a + kn,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

- Η σχέση "$\equiv$ (mod n)" ορίζει τις ακόλουθες κλάσεις καταλοίπων modulo n στο $\mathbb{Z}$:

✓ $[0] = \{x : x = kn,\ k \in \mathbb{Z}\}$

✓ $[1] = \{x : x = kn + 1,\ k \in \mathbb{Z}\}$

…

✓ $[n-1] = \{x : x = kn + (n-1),\ k \in \mathbb{Z}\}$

- γιατί τα υπόλοιπα της διαίρεσης ενός ακεραίου με το n είναι 0, 1, …, $n - 1$.
- Έτσι ορίζεται, για κάθε τιμή του $n \in \mathbb{N}$, μια διαμέριση του $\mathbb{Z}$: [0], [1], …, [n–1].
- Το σύνολο αυτών των κλάσεων το συμβολίζουμε ως $\mathbb{Z}_n$, δηλαδή

$$\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}.$$

- Η σχέση για παράδειγμα "$\equiv$ (mod 3)" ορίζει τις ακόλουθες κλάσεις καταλοίπων modulo 3 στο $\mathbb{Z}$:

$$[0] = \{x : x = 3k,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$[1] = \{x : x = 3k + 1,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$[2] = \{x : x = 3k + 2,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

γιατί τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης ενός ακεραίου με το 3 είναι 0, 1 και 2. Έτσι ορίζεται και μια διαμέριση του $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z}_3 = \{[0], [1], [2]\}$.

Διμελής πράξη – Εσωτερική πράξη[1]

- Αν A, B και $Γ$ είναι μη κενά σύνολα, τότε μια απεικόνιση ϖ ενός μη κενού υποσυνόλου $Δ$ του $A \times B$ στο $Γ$ λέγεται **(διμελής) πράξη** από το $A \times B$ στο $Γ$.
- **Εσωτερική πράξη** στο A είναι μια απεικόνιση της μορφής

$$\begin{aligned} * :\ & A \times A \to A \\ & (a, b) \longmapsto a * b \end{aligned}$$

- Αν $*$ είναι μια εσωτερική πράξη σε ένα σύνολο $Σ$ και A ένα μη κενό υποσύνολο του $Σ$, τότε λέμε ότι το A είναι κλειστό ως προς την πράξη $*$, ανν για κάθε $(a, b) \in A \times A$ είναι $a * b \in A$.
- Μια πράξη $*$ σε ένα σύνολο $Σ$ ονομάζεται

➢ **προσεταιριστική**, ανν για κάθε $a, b, c \in Σ$ ισχύει $(a * b) * c = a * (b * c)$

➢ **αντιμεταθετική**, ανν για κάθε $a, b \in Σ$ ισχύει $a * b = b * a$.

➢ Ένα στοιχείο e του συνόλου $Σ$ ονομάζεται **ουδέτερο στοιχείο** ως προς την πράξη $*$, ανν για κάθε $a \in Σ$ ισχύει

$$a * e = e * a = a.$$

➢ Αν $*$ είναι μια πράξη στο $Σ$ ως προς την οποία υπάρχει ουδέτερο στοιχείο $e \in Σ$, δύο στοιχεία $a, a' \in Σ$ ονομάζονται **συμμετρικά** ως προς την πράξη αυτή, ανν ισχύει

$$a * a' = a' * a = e.$$

Διμελής πράξη – Εσωτερική πράξη[2]

- Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το a' είναι το συμμετρικό του a ως προς την πράξη $*$ και αντίστροφα το a συμμετρικό του a' ως προς την $*$.
- Επίσης, στην περίπτωση μιας πράξης που τη λέμε "πρόσθεση" το συμμετρικό του a θα το συμβολίζουμε με $-a$ και θα το λέμε προσθετικό αντίστροφο ή **αντίθετο** του a,
- ενώ στην περίπτωση μιας πράξης που τη λέμε "πολλαπλασιασμό", θα το συμβολίζουμε με a^{-1} και θα το λέμε πολλαπλασιαστικό αντίστροφο ή **αντίστροφο** του a.

➢ Έτσι θα έχουμε αντιστοίχως

$$a + (-a) = (-a) + a = 0 \quad \text{και} \quad a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

➢ Από τις ισότητες αυτές προκύπτει ότι

$$-(-a) = a \quad \text{και} \quad (a^{-1})^{-1} = a.$$

Θεώρημα

- **Θεώρημα**: Έστω $*$ μια πράξη προσεταιριστική στο S και με ουδέτερο στοιχείο e. Αν υπάρχουν τα συμμετρικά a', $b' \in S$ των στοιχείων a, $b \in S$, τότε είναι

$$(a * b)' = b' * a'.$$

- Η παραπάνω σχέση του θεωρήματος για πράξη που σημειώνεται + γράφεται
- $-(a + b) = (-b) + (-a)$

  ενώ για πράξη που σημειώνεται · γράφεται

$$(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$$

- Αν $*$, $\circ$ είναι δυο πράξεις στο Σ, τότε λέμε ότι η πράξη $*$ είναι **επιμεριστική** ως προς την $\circ$, αν για κάθε a, b, $c \in \Sigma$ ισχύει

$$a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c) \text{ και } (b \circ c) * a = (b * a) \circ (c * a).$$

Άσκηση [1]

- Στο σύνολο $\mathbb{R}$ ορίζουμε την πράξη $*$ με τον ακόλουθο τρόπο

$$a * b = ab + a + b$$

i. Να εξετάσετε αν η πράξη αυτή είναι προσεταιριστική ή αντιμεταθετική.

ii. Να βρείτε ποια στοιχεία του $\mathbb{R}$ έχουν συμμετρικό στοιχείο ως προς την πράξη αυτή.

- *Λύση*

i. Είναι

$$a*(b*c)=a*(bc+b+c)=a(bc+b+c)+a+bc+b+c=abc+ab+bc+ca+a+b+c$$

$$(a*b)*c=(ab+a+b)*c=(ab+a+b)c+ab+a+b+c=abc+ab+bc+ca+a+b+c$$

- Επομένως πράξη αυτή είναι προσεταιριστική.
- Εύκολα διαπιστώνουμε ότι είναι και αντιμεταθετική, αφού

$$a * b = ab + a + b = ba + b + a = b * a.$$

Άσκηση [2]

ii. Έχουμε,

$$a * e = a \Leftrightarrow ae + a + e = a \Leftrightarrow (a+1)e = 0. \qquad (1)$$

- Η (1) αληθεύει αν $e = 0$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Επομένως το ουδέτερο στοιχείο της πράξης $*$ είναι το $e = 0$.
- Για να έχει το $a \in \mathbb{R}$ συμμετρικό στοιχείο το $a' \in \mathbb{R}$, πρέπει

$$a * a' = e \Leftrightarrow aa' + a + a' = 0 \Leftrightarrow (a+1)a' = -a \qquad (2)$$

- Αν $a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1$, τότε η (2) είναι αδύνατη.
- Αν $a + 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1$, τότε (2) $\Leftrightarrow$ $a' = -\dfrac{a}{a+1} \in \mathbb{R}$
- Επομένως όλα τα $a \in \mathbb{R}$ εκτός από το $a = -1$ έχουν αντίστροφο.

Τέλος Ενότητας