Υπολογιστικά & Διακριτά Μαθηματικά

Ενότητα 7: Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

Στεφανίδης Γεώργιος
Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα [1]

- Δύο ενδεχόμενα A και B του δ. χ. Ω λέγονται **ανεξάρτητα**, αν και μόνον αν

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- Τρία ενδεχόμενα A, B και Γ του δ. χ. Ω λέγονται ανεξάρτητα, αν και μόνον αν είναι ανά δύο ανεξάρτητα και $P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma)$, δηλαδή όταν

$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),\ P(B \cap \Gamma) = P(B) \cdot P(\Gamma),\ P(\Gamma \cap A) = P(\Gamma) \cdot P(A) \\ P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma) \end{cases}$$

- Αν A, B ανεξάρτητα ενδεχόμενα τότε,

$$P\left(A/B\right) = P(A) \ \text{και}\ P\left(B/A\right) = P(B)$$

- Δηλαδή, η πληροφορία ότι πραγματοποιήθηκε το ένα δεν επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου ενδεχομένου.
- Αν A, B ασυμβίβαστα με $P(A) \neq 0$ και $P(B) \neq 0$, τότε τα A, B *δεν* είναι ανεξάρτητα.
- Αν A, B ανεξάρτητα ενδεχόμενα τότε,
  - A, B^c ανεξάρτητα
  - A^c, B^c ανεξάρτητα.

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα [2]

- **Παράδειγμα**: Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές διαδοχικά. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:
- A: «Η πρώτη ένδειξη είναι μικρότερη του 3»
- B: «Η δεύτερη ένδειξη είναι 2».
- Είναι τα ενδεχόμενα αυτά ανεξάρτητα;
- Είναι $|\Omega| = 6^2 = 36$. Επίσης
- ✓ $A = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, 6), (2, 1), (2, 2), \ldots, (2, 6)\}$
- ✓ $B = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)\}$
- ✓ $A \cap B = ((1, 2), (2, 2)\}$.
- Άρα

$$P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \quad \text{και} \quad P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

- Επομένως $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- και συνεπώς τα ενδεχόμενα *A* και *B* είναι ανεξάρτητα.

Παράδειγμα (Bernoulli) [1]

- Σε ένα πείραμα τύχης τα δυνατά αποτελέσματα είναι δύο. Το ένα ας το ονομάσουμε *E*: «επιτυχία» με πιθανότητα εμφάνισης *p* και το άλλο ας το ονομάσουμε *A*: «αποτυχία» με πιθανότητα εμφάνισης *q*. Έστω ότι το πείραμα το επαναλαμβάνουμε *n* φορές διαδοχικά. Ποια είναι η πιθανότητα, στις *n* αυτές επαναλήψεις οι επιτυχίες να είναι *k* ($0 \leq k \leq n$);
- *Λύση*
- Μια περίπτωση (διάταξη) αυτού του είδους είναι,

$$X : \underbrace{EE...E}_{k}\ \underbrace{AA...A}_{n-k}$$

- Η πιθανότητά της, αφού κάθε αποτέλεσμα σε κάθε επανάληψη δεν επηρεάζεται από τα αποτελέσματα στις προηγούμενες επαναλήψεις, είναι

$$P(X) = \underbrace{P(E)\cdot P(E)\cdot\ldots\cdot P(E)}_{k}\cdot\underbrace{P(A)\cdot P(A)\cdot\cdots\cdot P(A)}_{n-k}$$

$$= \underbrace{p\cdot p\cdot\ldots\cdot p}_{k}\cdot\underbrace{q\cdot q\cdot\ldots\cdot q}_{n-k} = p^{k}\cdot q^{n-k}$$

- Επειδή όμως το πλήθος των περιπτώσεων (διατάξεων) με *k* φορές *E* και *n* – *k* φορές *A* είναι, $\binom{n}{k}\cdot\binom{n-k}{n-k}=\binom{n}{k}$

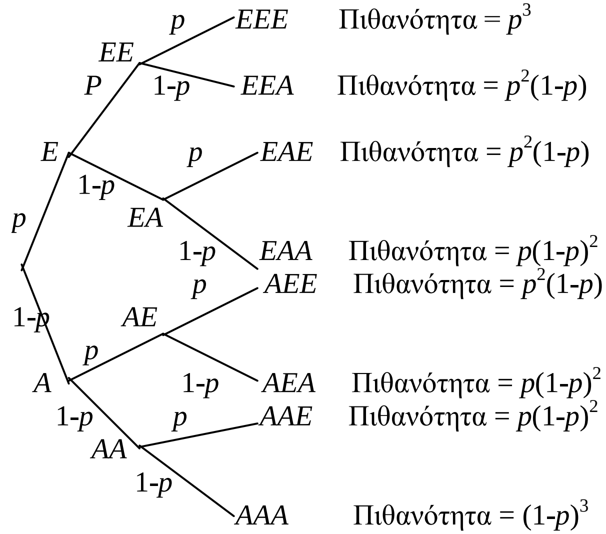
Παράδειγμα (Bernoulli) [2]

- η ζητούμενη πιθανότητα να είναι *k* φορές *E* με πιθανότητα σε κάθε επανάληψη *p* και *n* – *k* φορές *A* με πιθανότητα σε κάθε επανάληψη *q* = 1 – *p* είναι,

$$P(n,k,p)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

διότι $p + q = 1$.

- Για μια ακολουθιακή περιγραφή του δειγματικού χώρου ενός τέτοιου πειράματος με 3 επαναλήψεις, έχουμε το δενδρόγραμμα



Ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli

❖ *Παρατήρηση:*

- Οι επαναλήψεις ενός τέτοιου πειράματος με τα δύο αποτελέσματα, «επιτυχία» - «αποτυχία», ονομάζονται ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli και δείξαμε ότι
- Στις n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli, με πιθανότητα επιτυχίας p και αποτυχίας q, η πιθανότητα να έχουμε k επιτυχίες ($0 \leq k \leq n$), είναι

$$P(n,k,p)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

(είναι $p + q = 1$).

Τυχαία Μεταβλητή

- **Τυχαία μεταβλητή** (τ. μ.) είναι μια συνάρτηση από το δ. χ. Ω ενός π. τ. στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.
- **Παράδειγμα**: Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις φορές. Έστω X(*t*) ο αριθμός των ‘‘K’’ (K = κορώνα) που εμφανίζονται όταν το αποτέλεσμα είναι *t*.
- Η τ.μ. παίρνει τις εξής τιμές:

✓ X(ΚΚΚ) = 3
✓ X(ΚΚΓ) = X(ΚΓΚ) = X(ΓΚΚ) = 2
✓ X(ΓΓΚ) = X(ΓΚΓ) = X(ΚΓΓ) = 1
✓ X(ΓΓΓ) = 0

❑ Ορισμός: *Κατανομή* μιας τυχαίας μεταβλητής X σε έναν δ.χ. Ω είναι το σύνολο των ζευγών $(r, p(X = r))$ για κάθε $r \in X(\Omega)$, όπου $X(\Omega)$ το σύνολο τιμών της τ.μ X και $p(X = r)$ η πιθανότητα η τ. μ. X να παίρνει την τιμή r.

❖ Το σύνολο των ζευγών στην κατανομή αυτή προσδιορίζεται από τις πιθανότητες $p(X = r)$ για $r \in X(\Omega)$.

Αναμενόμενη Τιμή [1]

- Η **αναμενόμενη τιμή** της τ.μ. $X(w)$ στο δ.χ. Ω ορίζουμε να είναι

$$E(X) = \sum_{w \in \Omega} p(w) X(w)$$

- Όταν ο δ.χ. έχει n διακεκριμένα στοιχεία, δηλ. είναι $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, τότε

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) X(x_i)$$

- Στο παράδειγμα με τις τρεις ρίψεις του νομίσματος, αν X είναι η τ. μ. που αντιστοιχεί τον αριθμό των κορωνών Κ σ' ένα δυνατό αποτέλεσμα, η αναμενόμενη τιμή θα είναι,

$$E(X) = \frac{1}{8}\Big(X(\mathrm{KKK}) + X(\mathrm{KK\Gamma}) + X(\mathrm{K\Gamma K}) + X(\mathrm{\Gamma KK}) + X(\mathrm{\Gamma\Gamma K}) + X(\mathrm{\Gamma K\Gamma}) + X(\mathrm{K\Gamma\Gamma}) + X(\mathrm{\Gamma\Gamma\Gamma})\Big)$$

$$= \frac{1}{8}(3+2+2+2+1+1+1+0) = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

Αναμενόμενη Τιμή [2]

- Έστω τώρα ότι ομαδοποιούμε τα δυνατά αποτελέσματα του π. τ. στα οποία αντιστοιχίζεται, με την τ.μ., η ίδια τιμή.
- Ειδικότερα, έστω ότι X είναι μια τ. μ. με σύνολο τιμών $X(\Omega)$ και $p(X = r)$ η πιθανότητα η τ. μ. X να παίρνει την τιμή r.
- Επομένως, $p(X = r)$ είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων των αποτελεσμάτων w τέτοιων, ώστε $X(w) = r$. Συνεπάγεται ότι

$$\boldsymbol{E(X) = \sum_{r \in X(\Omega)} p(X = r) r}$$

- **Παράδειγμα**:
- Ας βρούμε την αναμενόμενη τιμή του αθροίσματος των ενδείξεων στη ρίψη δύο ζαριών.
- Η τ.μ. X είναι το άθροισμα των ενδείξεων και είναι:

Αναμενόμενη Τιμή [3]

- $X((1,1)) = 2$
- $X((1,2)) = X((2,1)) = 3$
- $X((1,3)) = X((3,1)) = X((2,2)) = 4$
- $X((1,4)) = X((4,1)) = X((2,3)) = X((3,2)) = 5$
- $X((1,5)) = X((5,1)) = X((2,4)) = X((4,2)) = X((3,3)) = 6$
- $X((1,6)) = X((6,1)) = X((2,5)) = X((5,2)) = X((3,4)) = X((4,3)) = 7$
- $X((2,6)) = X((6,2)) = X((3,5)) = X((5,3)) = X((4,4)) = 8$
- $X((3,6)) = X((6,3)) = X((4,5)) = X((5,4)) = 9$
- $X((4,6)) = X((6,4)) = X((5,5)) = 10$
- $X((5,6)) = X((6,5)) = 11$
- $X((6,6)) = 12$

Αναμενόμενη Τιμή [4]

- Δηλαδή το σύνολο τιμών της X είναι το σύνολο {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}. Τώρα, έχουμε

- $p(X = 2) = p(X = 12) = 1/36$
- $p(X = 3) = p(X = 11) = 2/36$
- $p(X = 4) = p(X = 10) = 3/36$
- $p(X = 5) = p(X = 9) = 4/36$
- $p(X = 6) = p(X = 8) = 5/36$
- $p(X = 7) = 6/36$

- οπότε

- $E(X) = 2\cdot(1/36) + 3\cdot(2/36) + 4\cdot(3/36) + 5\cdot(4/36) + 6\cdot(5/36) + 7\cdot(6/36) + 8\cdot(5/36) + 9\cdot(4/36) + 10\cdot(3/36) + 11\cdot(2/36) + 12\cdot(1/36) = 7$

Παράδειγμα (Bernoulli) [3]

- Η αναμενόμενη τιμή του πλήθους των επιτυχιών όταν εκτελούνται *n* ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli είναι ίση με *np* όπου *p* είναι η πιθανότητα επιτυχίας σε κάθε δοκιμή.

➢ Πράγματι, έστω ότι η τυχαία μεταβλητή *X* είναι το πλήθος των επιτυχιών σε *n* δοκιμές. Από το Παράδειγμα για τις ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli γνωρίζουμε ότι

$$p(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

➢ Έχουμε

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n} kp(X=k)=\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k}=\sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}p^k q^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}q^{n-k}=np\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}p^i q^{n-1-i}=np(p+q)^{n-1}=np$$

❖ Χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα (η απόδειξή της δίνεται ως άσκηση)

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$$

Θεώρημα

- **Θεώρημα**:
- Αν X και Y είναι τυχαίες μεταβλητές σ’ ένα δ.χ. Ω, τότε

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

- Επιπλέον, αν X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$, είναι τυχαίες μεταβλητές στον δ.χ Ω και $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, τότε

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)$$

- και αν $a, b \in \mathbb{R}$, τότε

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

- Το παραπάνω θεώρημα είναι χρήσιμο στον υπολογισμό αναμενόμενων τιμών επειδή πολλές τυχαίες μεταβλητές είναι αθροίσματα απλούστερων τυχαίων μεταβλητών.

Παράδειγμα [1]

- **Παράδειγμα**: χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα στον υπολογισμό της αναμενόμενης τιμής του αθροίσματος των ενδείξεων που εμφανίζονται στη ρίψη δύο ζαριών, έχουμε

➢ Αν X_1 και X_2 είναι οι τυχαίες μεταβλητές με

$$X_1((i, j)) = i \quad \text{και} \quad X_2((i, j)) = j$$

έτσι, ώστε X_1 να είναι ο αριθμός που εμφανίζεται στο πρώτο ζάρι και X_2 να είναι ο αριθμός που εμφανίζεται στο δεύτερο ζάρι, θα είναι

$$E(X_1) = E(X_2) = 7/2$$

επειδή και οι δύο είναι ίσες με $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)/6 = 21/6 = 7/2$. Το άθροισμα των δύο αριθμών που εμφανίζονται όταν ρίχνονται τα δύο ζάρια, είναι το άθροισμα $X_1 + X_2$, συνεπώς

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = (7/2) + (7/2) = 7$$

Ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

- Οι τυχαίες μεταβλητές X και Y σ’ ένα δ.χ. Ω είναι ανεξάρτητες, αν

$$p(X(w) = r_1 \text{ και } Y(w) = r_2) = p(X(w) = r_1) \cdot p(Y(w) = r_2)$$

- δηλαδή, αν η πιθανότητα να είναι $X(w) = r_1$ και $Y(w) = r_2$ είναι ίση με το γινόμενο των πιθανοτήτων να είναι $X(w) = r_1$ και $Y(w) = r_2$, αντίστοιχα, για όλους τους πραγματικούς αριθμούς r_1 και r_2.
- **Παράδειγμα**:
- Οι τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2 στη ρίψη των δύο ζαριών είναι ανεξάρτητες, διότι αν Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6} και $i, j \in \Omega$, επειδή υπάρχουν 36 δυνατά αποτελέσματα (ισοπίθανα), θα έχουμε

$$p(X_1 = i \text{ και } X_2 = j) = 1/36.$$

- Επιπλέον,

$$p(X_1 = i) = 1/6 \text{ και } p(X_2 = j) = 1/6$$

επειδή η πιθανότητα να εμφανιστεί το i στο πρώτο ζάρι και η πιθανότητα να εμφανιστεί το j στο δεύτερο ζάρι είναι και στις δύο περιπτώσεις, 1/6.

- Επομένως

$$p(X_1 = i \text{ και } X_2 = j) = 1/36 = (1/6)\cdot(1/6) = p(X_1 = i) \cdot p(X_2 = j)$$

- **Θεώρημα:** Αν X και Y είναι ανεξάρτητες μεταβλητές σ’ ένα δ. χ. Ω, τότε

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Διακύμανση [1]

- Η αναμενόμενη τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής μάς λέει για τη μέση τιμή της, αλλά δε μας λέει τίποτα για το πώς είναι οι τιμές της κατανεμημένες.
  Παράδειγμα: αν X και Y είναι οι τυχαίες μεταβλητές στο δ. χ. Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6} με $X(w) = 0\ \forall w \in \Omega$ και $Y(w) = -1$ αν $w \in \{1, 2, 3\}$ και $Y(w) = 1$ αν $w \in \{4, 5, 6\}$, τότε οι αναμενόμενες τιμές των X και Y είναι και οι δύο μηδέν. Όμως, η τ. μ. X ποτέ δε μεταβάλλεται από το μηδέν ενώ η τ. μ. Y διαφέρει από το μηδέν κατά 1.
- Η διακύμανση της τ. μ. μάς βοηθάει να προσδιορίζουμε πόσο ευρέως διεσπαρμένη είναι μια τυχαία μεταβλητή.
- **Ορισμός**: Έστω X μια τ. μ. σ' ένα δ. χ. Ω. Η **διακύμανση** της X, συμβολικά $V(X)$, είναι

$$V(X) = \sum_{w \in \Omega} \left(X(w) - E(X) \right)^2 \cdot p(w)$$

- και η **τυπική απόκλιση** της X, συμβολικά $\sigma(X)$, είναι

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Διακύμανση [2]

- **Θεώρημα**: Αν X είναι μια τ. μ. σ' ένα δ.χ. Ω, τότε

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

- **Θεώρημα**: Αν X και Y είναι δύο ανεξάρτητες τ. μ. σ' ένα δ. χ. Ω, τότε $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$. Επιπλέον, αν X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$, είναι ανά δύο ανεξάρτητες τ. μ. στον Ω, τότε

$$V(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \ldots + V(X_n).$$

Παράδειγμα [2]

- **Παράδειγμα**:
- Έστω η τ. μ. $X((i, j)) = 2i$, όπου i είναι ο αριθμός που εμφανίζεται στο πρώτο ζάρι και j ο αριθμός που εμφανίζεται στο δεύτερο ζάρι.
- Επειδή $p(X = k) = 1/6$, $k = 2, 4, 6, 8, 10, 12$, και 0 διαφορετικά, θα είναι

$$E(X) = (2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12)/6 = 7$$

και

$$E(X^2) = (2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 + 12^2)/6 = 182/3$$

οπότε

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 182/3 - 49 = 35/3$$

Τέλος Ενότητας