Υπολογιστικά & Διακριτά Μαθηματικά

Ενότητα 6: Πιθανότητες

Στεφανίδης Γεώργιος

Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Πείραμα τύχης – Ενδεχόμενα [1]

- **Δειγματικός χώρος** Ω είναι το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος τύχης.
- **Ενδεχόμενο** ενός πειράματος τύχης ονομάζουμε κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω.
- Επειδή τα ενδεχόμενα ενός π. τ. είναι υποσύνολα του δ. χ. Ω, μεταφέρονται σ' αυτά οι έννοιες και οι πράξεις που έχουμε ορίσει στα σύνολα, θα λέμε δε *ότι το ενδεχόμενο A πραγματοποιείται όταν το αποτέλεσμα του π. τ. είναι στοιχείο του συνόλου A.*
  - $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$

➢ *όταν πραγματοποιείται το A, πραγματοποιείται και το B.*

  - $A^c = \{x \in \Omega : x \notin A\}$ = «όχι Α»

➢ *πραγματοποιείται το «όχι A», όταν δεν πραγματοποιείται το A.*

  - $A \cup B = \{x \in \Omega : x \in A$ ή $x \in B\}$ = «A ή B»

➢ *πραγματοποιείται το «A ή B», όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B.*

  - $A \cap B = \{x \in \Omega : x \in A$ και $x \in B\}$ = «A και B»

➢ *πραγματοποιείται το «A και B», όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A, B.*

Πείραμα τύχης – Ενδεχόμενα [2]

- αν $A \cap B = \varnothing$ τότε τα σύνολα A, B είναι ξένα και λέμε τα ενδεχόμενα A, B **ασυμβίβαστα** δηλαδή, *η πραγματοποίηση του ενός αποκλείει την πραγματοποίηση του άλλου.*

- $A \cup A^c = \Omega$ και $A \cap A^c = \varnothing$ (δύο **συμπληρωματικά** ή **αντίθετα** ενδεχόμενα είναι και ασυμβίβαστα αλλά δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα δεν είναι κατ' ανάγκη και αντίθετα).

  - $A - B = \{x \in \Omega : x \in A$ και $x \notin B\} = A \cap B^c =$ «A και όχι B»

- *το «A και όχι B» πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται μόνο το A.*

  - $A \,\Delta\, B = \{x \in \Omega : x \in (A - B)$ ή $x \in (B - A)\} = (A - B) \cup (B - A)$ $=$ «A και όχι B ή B και όχι A»

- *το «A και όχι B ή B και όχι A» πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα μόνον από τα A, B.*

Πιθανότητα

- **Μέτρο πιθανότητας ή πιθανότητα**, ονομάζουμε τη συνάρτηση

$$P : \wp(\Omega) \to \mathbb{R}$$

- όπου $\wp(\Omega)$ = δυναμοσύνολο του Ω, που είναι τέτοια, ώστε για κάθε A, $B \in \Omega$ να είναι:
  - $0 \leq P(A) \leq 1$
  - $P(\Omega) = 1$
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ αν $A \cap B = \varnothing$.
- Ο αριθμός $P(A)$ λέγεται **πιθανότητα του ενδεχομένου** ***A***.
- Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι:

αν $A_1, A_2, \ldots, A_k$ είναι ανά δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα, τότε

1. $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k)$
2. $P(\varnothing) = 0$

❖ αν σ’ ένα δ. χ. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ τα στοιχειώδη ενδεχόμενα $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots, \{\omega_n\}$ είναι ομοιόμορφα ή ισοπίθανα (ομοιόμορφος ή ισοπίθανος δ. χ.) τότε,

1. $P(\{\omega_i\}) = 1/|\Omega|$, $i = 1, 2, \ldots, n$
2. αν $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ (a_i = δυνατό αποτέλεσμα του π. τ.) τότε,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{ευνοϊκές περιπτώσεις}}{\text{δυνατές περιπτώσεις}}$$

- Για τις πιθανότητες ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες.

1. $P(A^c) = 1 - P(A)$
2. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Παράδειγμα [1]

Σ' ένα Λύκειο υπάρχουν 70 μαθητές στην Α′ τάξη, 62 στη Β′ και 50 στη Γ′. Επιλέγουμε τυχαία τρεις μαθητές. Ποια είναι η πιθανότητα,

i. και οι τρεις να είναι από την Α′ τάξη;
ii. οι δύο να είναι από την Α′ και ο ένας από την Γ′ τάξη;
iii. να είναι ένας από κάθε μια τάξη;

- *Λύση*
- Επειδή οι τριάδες που σχηματίζονται δεν είναι διατεταγμένες (έχουμε απλή επιλογή τριών στοιχείων από 70 + 62 + 50 = 182), ο δ. χ. έχει πληθικό αριθμό

$$|\Omega| = \binom{182}{3} = \frac{182!}{3! \cdot 179!} = \frac{179! \cdot 180 \cdot 181 \cdot 182}{2 \cdot 3 \cdot 179!} = 988620$$

i. Επειδή το ενδεχόμενο *A*: «και οι τρεις από την Α′ τάξη» είναι το σύνολο των τριάδων (όχι διατεταγμένων) που επιλέγονται από 70, συνεπάγεται ότι

$$|A| = \binom{70}{3} = \cdots = 54740 \Rightarrow P(A) = \frac{54740}{988260} \cong 0,0554$$

ii. Επειδή το ενδεχόμενο *B*: «οι δύο από την Α′ τάξη και ένας από την Γ′» είναι το σύνολο των τριάδων (όχι διατεταγμένων) που επιλέγονται όπως φαίνεται στο διάγραμμα, έχουμε ότι οι ευνοϊκές περιπτώσεις του ενδεχομένου B είναι

Παράδειγμα [2]

$$|B| = \binom{70}{2} \cdot \binom{50}{1} = \cdots = 120750$$

- **Άρα,**

$$P(B) = \frac{120750}{988260} \cong 0{,}1222$$

iii. παρόμοια για το ενδεχόμενο *Γ*: «να είναι ένας από κάθε μια τάξη», οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι,

$$|\Gamma| = \binom{70}{1}\binom{62}{1}\binom{50}{1} = \cdots = 217000$$

- **Άρα,**

$$P(\Gamma) = \frac{217.000}{988260} \cong 0,219$$

Δεσμευμένη Πιθανότητα

- Έστω Ω ένας δ. χ. και *A*, *B* δύο ενδεχόμενα με *P*(*B*) > 0. **Δεσμευμένη πιθανότητα** του *A* με δεδομένο το *B* ονομάζουμε τον αριθμό,

$$\boldsymbol{P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$

- ή *την πιθανότητα του A με την προϋπόθεση ότι έχει ήδη πραγματοποιηθεί το B*.
- Αν και *P*(*A*) > 0, τότε ορίζεται και η δεσμευμένη πιθανότητα του *B* με δεδομένο το *A*,

$$\boldsymbol{P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}}$$

- Είναι,

$$P\left(A\cap B\right)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B)$$

πολλαπλασιαστικός νόμος πιθανοτήτων

- Είναι επίσης,

$$\boldsymbol{P\left(A\cap B\cap \Gamma\right)=P(A)\cdot P(B/A)\cdot P(\Gamma/A\cap B)}$$

- και γενικότερα,

$$\boldsymbol{P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=P(A_1)\cdot P\left(A_2/A_1\right)\cdot P\left(A_3/A_1\cap A_2\right)\cdot\ldots\cdot P\left(A_n\Big/\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right).}$$

Παράδειγμα [3]

- **Παράδειγμα:** Ένα Λύκειο έχει την παρακάτω δύναμη μαθητών κατά φύλο:

τάξεις	μαθητές	κορίτσια	αγόρια
Α	38	20	18
Β	35	16	19
Γ	32	17	15

- Επιλέγουμε τυχαία μια τάξη και από την τάξη αυτή επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι κορίτσι;
- *Λύση*
- Για να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο *Κ*: «είναι κορίτσι» αρκεί να πραγματοποιηθεί ένα από τα ενδεχόμενα:

✓ «επιλέγεται η τάξη Α και απ' αυτή ένα κορίτσι» ή,

✓ «επιλέγεται η τάξη Β και απ' αυτή ένα κορίτσι» ή,

✓ «επιλέγεται η τάξη Γ και απ' αυτή ένα κορίτσι»

- οπότε, αν *Α* είναι το ενδεχόμενο «είναι η τάξη Α», *Β* το ενδεχόμενο «είναι η τάξη Β» και *Γ* το ενδεχόμενο «είναι η τάξη Γ», έχουμε

$$P(K) = P(A \cap K) + P(B \cap K) + P(\Gamma \cap K).$$

- Είναι, $P(A \cap K) = P(A) \cdot P(K / A) = (1/3) \cdot (20/38) = 10/57$

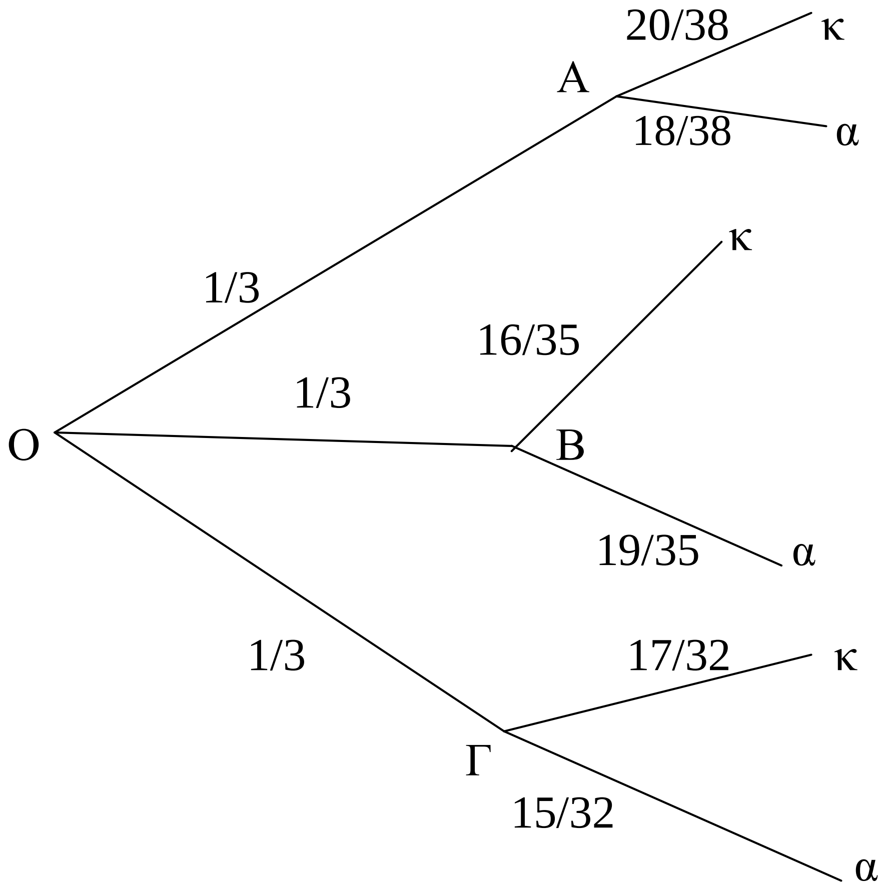
$$\boldsymbol{P(B \cap K) = P(B) \cdot P(K/B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{35} = \frac{16}{105}} \quad \boldsymbol{P(\Gamma \cap K) = P(\Gamma) \cdot P(\Gamma/K) = \frac{1}{3} \cdot \frac{17}{32} = \frac{17}{96}}$$

- Τελικά είναι,

$$\boldsymbol{P(K) = \frac{10}{57} + \frac{16}{105} + \frac{17}{96} = \cdots}$$

Παρατήρηση [1]

- Την παραπάνω λύση μπορούμε να την αποδώσουμε με το παρακάτω δενδρόγραμμα:



Παρατήρηση [2]

- Οι κλάδοι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ αντιστοιχούν στις επιλογές των τάξεων Α, Β, Γ αντίστοιχα, και είναι σημειωμένες οι αντίστοιχες πιθανότητες πάνω σ' αυτούς.
- Από το καταληκτικό σημείο κάθε κλάδου ξεκινούν δύο άλλοι κλάδοι που αντιστοιχούν στις επιλογές κοριτσιού (κ) ή αγοριού (α) με τις αντίστοιχες δεσμευμένες πιθανότητες.
- Για τη λύση της άσκησης ξεχωρίζουμε τις διαδρομές από το Ο μέχρι το τελικό που ζητούμε και στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον πολλαπλασιαστικό νόμο των πιθανοτήτων.
- Το άθροισμα των πιθανοτήτων κατά διαδρομή μας δίνει τη ζητούμενη πιθανότητα:

$$\left.\begin{array}{l} O \to A \to K \Rightarrow \ \textbf{πιθανότητα}\ \ p_1 = (1/3)\cdot(20/38) \\ O \to B \to K \Rightarrow \ \textbf{πιθανότητα}\ \ p_2 = (1/3)\cdot(16/35) \\ O \to \Gamma \to K \Rightarrow \ \textbf{πιθανότητα}\ \ p_3 = (1/3)\cdot(17/32) \end{array}\right\} \Rightarrow P(K) = p_1 + p_2 + p_3 = \cdots$$

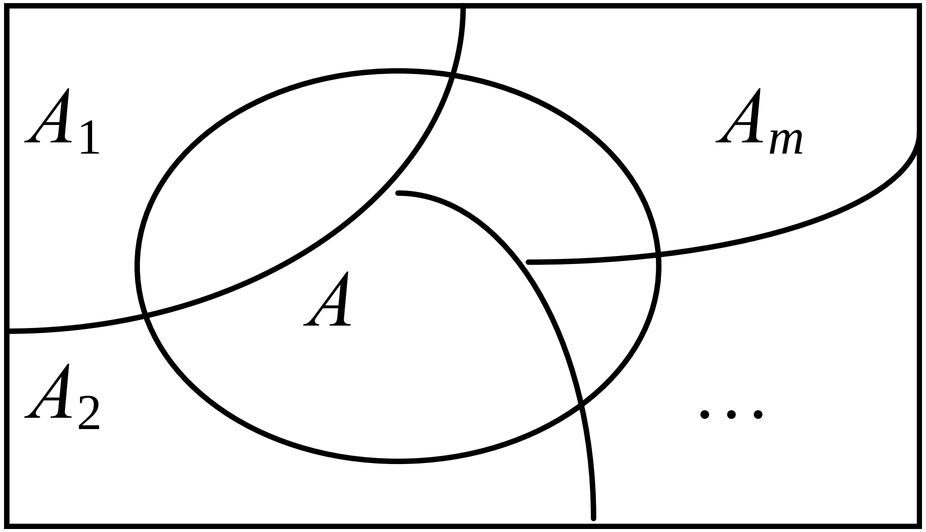
- **Παρατήρηση:**

Κλάδοι με κοινή αρχή αντιστοιχούν σε πιθανότητες με άθροισμα 1.

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας** Αν $A_1, A_2, \ldots, A_m$ είναι μια διαμέριση του δ. χ. Ω και A είναι ένα ενδεχόμενο τότε,

$$P(A) = P(A_1)\cdot P(A / A_1) + P(A_2)\cdot P(A / A_2) + + P(A_m)\cdot P(A / A_m)$$



$$\{\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing,\ i, j = 1, 2, \ldots, m \quad \text{και} \quad A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m = \Omega\}$$

Κανόνας του Bayes

- **Κανόνας του Bayes:** Αν $A_1, A_2, \ldots, A_m$ είναι μια διαμέριση του δ. χ. Ω με $P(A_k) > 0$, για όλα τα k με $1 \le k \le m$, και A είναι ένα ενδεχόμενο, τότε

$$P(A_k/A) = \frac{P(A_k)\cdot P(A/A_k)}{P(A_1)\cdot P(A/A_1) + P(A_2)\cdot P(A/A_2) + \cdots + P(A_m)\cdot P(A/A_m)}$$

- Ο *κανόνας του Bayes* χρησιμοποιείται συχνά για εξαγωγή συμπεράσματος. Υπάρχει ένα πλήθος ‘‘αιτίων’’ που μπορεί να έχουν ως συνέπεια ένα ‘‘αποτέλεσμα’’.
- Παρατηρούμε το αποτέλεσμα και θέλουμε να συμπεράνουμε για το αίτιο.
- Τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_m$ συσχετίζονται με τα αίτια και το ενδεχόμενο A αντιπροσωπεύει το αποτέλεσμα. Η πιθανότητα $P(A/A_k)$ ότι το αποτέλεσμα θα παρατηρηθεί όταν το αίτιο A_k είναι παρόν, ισοδυναμεί με ένα τυχαιοκρατικό μοντέλο της σχέσης αίτιο / αιτιατό.
- Με δεδομένο ότι το ενδεχόμενο A έχει πραγματοποιηθεί / παρατηρηθεί, θέλουμε να υπολογίσουμε τη (δεσμευμένη) πιθανότητα $P(A_k/A)$ ότι το αίτιο A_k είναι παρόν.

Παράδειγμα Ολικής Πιθανότητας - Bayes

- Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα και ένα μεροληπτικό το οποίο πάντοτε φέρνει Κ.
- Εκτελούμε ένα π.τ. ως εξής: επιλέγουμε τυχαία ένα από τα δύο νομίσματα, ρίχνουμε το επιλεγέν νόμισμα μία φορά και στη συνέχεια το ρίχνουμε ξανά.
- Αν υποτεθεί ότι το επιλεγέν νόμισμα φέρνει και τις δύο φορές Κ, ποια είναι η πιθανότητα να είναι το μεροληπτικό;
- Θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του Bayes.
- Έστω A_1 το ενδεχόμενο ότι επιλέγεται το μεροληπτικό νόμισμα και A το ενδεχόμενο ότι το νόμισμα φέρνει Κ δύο φορές.
- Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα $\Pr\{A_1/A\}$.
- Η διαμέριση του δ. χ. Ω που θεωρούμε, αποτελείται από τα A_1, $A_2 = A_1^c$.
- Έχουμε $P(A_1) = 1/2$, $\Pr(A/A_1) = 1$, $\Pr(A_2) = 1/2$ και $\Pr(A/A_2) = 1/4$. Επομένως,

$$P(A_1/A) = \frac{(1/2)\cdot 1}{(1/2)\cdot 1 + (1/2)\cdot(1/4)} = \frac{4}{5}$$

- Με αφορμή το τελευταίο παράδειγμα να πούμε ότι, επειδή τα σύνολα A και A^c αποτελούν μια διαμέριση του δ. χ. Ω, μια συνήθης μορφή του κανόνα του Bayes είναι η ακόλουθη (B είναι ένα ενδεχόμενο):

$$\mathrm{P}(A/B) = \frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B/A)}{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B/A) + \mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B/A^c)}$$

Παράδειγμα [4]

- **Παράδειγμα:**

  Μια αποθήκη ηλεκτρικών ειδών προμηθεύεται το 40% των ηλεκτρικών της λαμπτήρων από τη βιομηχανία X, το 35% από την Y και το 25% από τη Z. Ορισμένοι λαμπτήρες είναι ελαττωματικοί: το 1% της παραγωγής λαμπτήρων της X, το 2% της Y και το 3% της Z. επιλέγουμε τυχαία ένα λαμπτήρα από την αποθήκη αυτή και διαπιστώνουμε ότι είναι ελαττωματικός. Ποια είναι η πιθανότητα ο λαμπτήρας αυτός να είναι της βιομηχανίας Z;
- *Λύση*
- Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

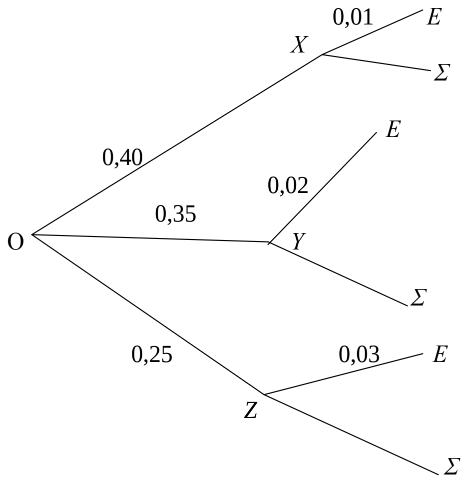
✓ *X*, *Y*, *Z*: «λαμπτήρας από τη βιομηχανία X, Y, Z», αντίστοιχα

✓ *E*: «λαμπτήρας ελαττωματικός»

✓ *Σ*: «λαμπτήρας σωστός»

- για τα οποία έχουμε $P(Z) = 0{,}25$ και $P(E/Z) = 0{,}03$. Από το σχετικό δενδρόγραμμα βρίσκουμε

$$P(E) = P(X)P(E/X) + P(Y)P(E/Y) + P(Z)P(E/Z)$$



- Έτσι, σύμφωνα με τον κανόνα του Bayes, έχουμε

$$P(Z/E) = \frac{P(E/Z)\cdot P(Z)}{P(E)} = \frac{(0,25)\cdot(0,03)}{0,0185} = \frac{75}{185} = \frac{15}{37}$$

{40% < (15/37) < 41%}

Τέλος Ενότητας