Υπολογιστικά & Διακριτά Μαθηματικά

Ενότητα 5: Αναδρομικές σχέσεις - Υπολογισμός Αθροισμάτων

Στεφανίδης Γεώργιος
Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Αναδρομικές σχέσεις [1]

- **Ορισμός**:

  Κάθε συνάρτηση

  $$\alpha: \mathbb{N} \to E: n \to \alpha(n) \in E$$

  $$(\text{ή } \alpha: \mathbb{N}_\rho \to E: n \to \alpha(n) \in E)$$

  με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ (ή το $\mathbb{N}_\rho$) και τιμές σ' ένα σύνολο E, λέγεται **ακολουθία** στοιχείων του συνόλου E στο $\mathbb{N}$ (ή στο $\mathbb{N}_\rho$). Ειδικότερα αν $E \subseteq \mathbb{R}$ η ακολουθία λέγεται ακολουθία πραγματικών αριθμών.
- Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι μια ακολουθία $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι καλώς ορισμένη, όταν έχουμε μια συνάρτηση f: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, η οποία εκφράζει ρητά το γενικό όρο α_n της ακολουθίας, δηλ. όταν έχουμε τον τύπο: $\alpha_n = f(n)$, όπου f είναι γνωστή συνάρτηση του n.
- Μια ακολουθία είναι επίσης καλώς ορισμένη, όταν δίνονται οι απαραίτητοι πρώτοι όροι της ακολουθίας και ένας αναδρομικός τύπος (**αναδρομική σχέση**) που επιτρέπει να βρίσκουμε τον επόμενο όρο α_{n+1} κάθε όρου α_n από τον προηγούμενό του ή γενικότερα από ορισμένους από τους προηγούμενούς του. Έτσι έχουμε ακολουθίες της μορφής

  $$\alpha_0 = \alpha \quad \text{και} \quad \alpha_{n+1} = f(\alpha_n)$$

  ή γενικότερα της μορφής

  $$\alpha_0 = \alpha, \ \ \alpha_1 = \beta \quad \text{και} \quad \alpha_{n+1} = f(\alpha_n, \alpha_{n-1})$$

Αναδρομικές σχέσεις [2]

- Υπάρχουν περιπτώσεις ακολουθιών που ορίζονται αναδρομικά και είναι δυνατό να βρούμε τον αναλυτικό τους τύπο. Η βασική μέθοδος για να το πετύχουμε αυτό, όποτε είναι δυνατό, είναι η *επανάληψη*, σύμφωνα με την οποία ξεκινάμε με τις αρχικές συνθήκες και υπολογίζουμε διαδοχικούς όρους της ακολουθίας μέχρι να «δούμε» τον γενικό τύπο της. Στη συνέχεια ελέγχουμε με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής την ορθότητα της αναλυτικής έκφρασης για τον γενικό όρο που με διαίσθηση γράψαμε προηγούμενα.
- **Παράδειγμα**:

  Έστω η ακολουθία $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \alpha_{n+1} = \alpha_n + \omega,\ \ \omega \in \mathbb{R}.$$

  Είναι

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \omega$$
$$\alpha_3 = \alpha_2 + \omega = \alpha_1 + 2\omega$$

  οπότε ισχυριζόμαστε ότι

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega \qquad (1)$$

  Πράγματι, η (1)
  - ισχύει για $n = 1$ (προφανής)
  - υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$, δηλ. ότι είναι $\alpha_k = \alpha_1 + (k-1)\omega$
  - δείχνουμε ότι ισχύει για $n = k+1$, δηλ. ότι είναι $\alpha_{k+1} = \alpha_1 + k\omega$:

    Είναι, $\alpha_{k+1} = \alpha_k + \omega = \alpha_1 + (k-1)\omega + \omega = \alpha_1 + k\omega$.

    (Η ακολουθία αυτή είναι η γνωστή μας Αριθμητική Πρόοδος.)

Πρόβλημα

- Μια εφαρμογή των αναδρομικών σχέσεων είναι στην καταμέτρηση των *δυαδικών συμβολοσειρών* (bit strings) μήκους *n* που ικανοποιούν μια συγκεκριμένη ιδιότητα. Για παράδειγμα, ας βρούμε πόσες δυαδικές συμβολοσειρές ***δεν*** έχουν δύο διαδοχικά 0.

➢ Έστω a_n το ζητούμενο πλήθος (με *n* > 2). Τότε θα είναι

$$\boldsymbol{a_n = \left(\underset{n-1}{\dots\ 0}\right) + \left(\underset{n-1}{\dots\ 1}\right) = \left(\underset{n-2}{\dots\ 10}\right) + \left(\underset{n-1}{\dots\ 1}\right) = a_{n-2} + a_{n-1}, \quad n \geq 3}$$

- Αρχικές συνθήκες: $a_1 = 2 \quad (0,\ 1)$

  $a_2 = 3 \quad (01,\ 10,\ 11)$

- Άρα,

$$a_n = a_{n\text{-}1} + a_{n\text{-}2}\,,\ \text{με}\ \ a_1 = 2,\, a_2 = 3.$$

Εφαρμογή: για *n* = 5

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \boldsymbol{a_5} &\boldsymbol{= a_4 + a_3} \\ \boldsymbol{a_4} &\boldsymbol{= a_3 + a_2} \\ \boldsymbol{a_3} &\boldsymbol{= a_2 + a_1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \boldsymbol{a_3} &\boldsymbol{= 3 + 2 = 5} \\ \boldsymbol{a_4} &\boldsymbol{= 5 + 3 = 8} \\ \boldsymbol{a_5} &\boldsymbol{= 8 + 5 = 13} \end{aligned}\right.$$

a_n = ? (= $f\,(n)$)

Γραμμική ομογενής αναδρομική σχέση [1]

- Σε περίπτωση τώρα που δεν είναι εύκολο να «δούμε» τον γενικό τύπο ύστερα από επανάληψη ορισμένων από τους πρώτους όρους, υπάρχουν διάφορες άλλες τεχνικές που μπορούμε να εφαρμόσουμε.

❑ **Γραμμική αναδρομική ομογενής σχέση με σταθερούς συντελεστές βαθμού *k*** δηλαδή μια σχέση της μορφής

$$a_n = c_1 a_{n\text{-}1} + c_2 a_{n\text{-}2} + \dots + c_k a_{n\text{-}k}$$

- Κωδικοποιώντας τη διαδικασία επίλυσης έχουμε:

➢ 1^0. Όλα τα a_i στο πρώτο μέλος, οτιδήποτε άλλο στο 2^0. Αν μη ομογενής, STOP.

$$a_n - c_1 a_{n\text{-}1} - c_2 a_{n\text{-}2} - \dots - c_k a_{n\text{-}k} = 0 \qquad (1)$$

➢ 2^0. Υπέθεσε μια λύση της μορφής

$$a_n = b^n$$

➢ 3^0. Αντικατέστησε την παραπάνω λύση στην εξίσωση (4) και απλοποίησε:

$$b^n - c_1 b^{n-1} - c_2 b^{n-2} - \dots - c_k b^{n-k} = 0 \Rightarrow b^{n-k}[b^k - c_1 b^{k-1} - \dots - c_k] = 0 \Rightarrow$$

$$b^k - c_1 b^{k-1} - \dots - c_k = 0 \qquad (\chi)$$

(*χαρακτηριστική εξίσωση*)

➢ 4^0. Βρες τις *k* ρίζες της (χ): $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$

Γραμμική ομογενής αναδρομική σχέση [2]

- 5^0. Αν οι ρίζες είναι διαφορετικές ανά δύο, τότε η γενική λύση είναι της μορφής

$$a_n = A_1\rho_1{}^n + A_2\rho_2{}^n + \ldots + A_k\rho_k{}^n$$

- 6^0. Οι συντελεστές A_i, $i = 0, 2, \ldots, k$-1 βρίσκονται επιβάλλοντας τις αρχικές συνθήκες και λύνοντας το σύστημα

$$\begin{cases} a_0 & = & A_1\rho_1^0 & + & A_2\rho_2^0 & +\cdots+ & A_k\rho_k^0 \\ a_1 & = & A_1\rho_1^1 & + & A_2\rho_2^1 & +\cdots+ & A_k\rho_k^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k-1} & = & A_1\rho_1^{k-1} & + & A_2\rho_2^{k-1} & +\cdots+ & A_k\rho_k^{k-1} \end{cases}$$

- 7^0. Αν μια ρίζα ρ_m, $1 \leq m \leq k$, έχει πολλαπλότητα $p > 1$, τότε σ' αυτή αντιστοιχεί ένα τμήμα της γενικής λύσης, της μορφής.

$$a_n^{(m)} = A_1\rho_m^n + A_2 n\rho_m^n + \cdots + A_p n^{p-1}\rho_m^n$$

Γραμμική ομογενής αναδρομική σχέση [3]

- **Παράδειγμα 1:**

$$a_n = 3a_{n-2}\,,\ \ a_0 = a_1 = 1.$$

- Η δοσμένη αναδρομική σχέση γράφεται

$$a_n - 3a_{n-2} = 0$$

- Υποθέτοντας λύση της μορφής $a_n = b^n$ αν την αντικαταστήσουμε στην εξίσωση προκύπτει η χαρακτηριστική εξίσωση,

$$b^n - 3b^{n-2} = 0$$

$$\Rightarrow\ b^{n-2}(b^2 - 3) = 0\ \Rightarrow\ b^2 - 3 = 0$$

- με ρίζες $\rho_1 = 3^{1/2}$, $\rho_2 = -\,3^{1/2}$.
- Επομένως η γενική λύση θα είναι της μορφής

$$a_n = A_1(3^{1/2})^n + A_2(-3^{1/2})^n.$$

- Από τις αρχικές συνθήκες, $a_0 = a_1 = 1$, προκύπτει το σύστημα

$$A_1 + A_2 = 1 \qquad\qquad A_1 3^{1/2} - A_2 3^{1/2} = 1$$

από το οποίο βρίσκουμε

$$A_1 = (3 + 3^{1/2})/6 \qquad\qquad A_2 = (3 - 3^{1/2})/6$$

- Τελικά,

$$a_n = \frac{3+\sqrt{3}}{6}\sqrt{3}^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}\left(-\sqrt{3}\right)^n = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{6} + (-1)^n\,\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)\sqrt{3}^n$$

Παράδειγμα [1]

- **Παράδειγμα 2:**

Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = 6a_{n-1} – 9a_{n-2}$, $a_0 = a_1 = 1$.

Εύκολα βρίσκουμε ότι η αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$b^2 – 6b + 9 = 0$$

με μια διπλή ρίζα $\rho_1 = 3$.

Επομένως η γενική λύση της δοσμένης αναδρομικής σχέσης θα είναι της μορφής

$$a_n = A_1 \cdot 3^n + A_2 n \cdot 3^n.$$

Αντικαθιστώντας στις αρχικές συνθήκες, βρίσκουμε

$$1 = A_1$$

$$1 = A_1 \cdot 3 + A_2 \cdot 3$$

οπότε

$$A_1 = 1 \text{ και } A_2 = – 2/3.$$

Γραμμική μη ομογενής αναδρομική σχέση [1]

- Εκτός από τις ομογενείς αναδρομικές σχέσεις μπορούμε να αντιμετωπίσουμε στη γενική τους περίπτωση και τις **γραμμικές μη ομογενείς αναδρομικές σχέσεις βαθμού *k***, δηλαδή σχέσεις της μορφής,

$$a_n = c_1 a_{n\text{-}1} + c_2 a_{n\text{-}2} + \ldots + c_k a_{n\text{-}k} + f(n)$$

με αντίστοιχη ομογενή

$$a_n = c_1 a_{n\text{-}1} + c_2 a_{n\text{-}2} + \ldots + c_k a_{n\text{-}k}$$

- Η αντιμετώπιση της γενικής περίπτωσης βασίζεται στα παρακάτω θεωρήματα:
- **Θεώρημα 1**

Αν $\{a_n^{\mathrm{P}}\}$ είναι μια μερική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης και $\{a_n^{\mathrm{H}}\}$ η λύση (γενική) της αντίστοιχης ομογενούς αναδρομικής σχέσης, τότε κάθε λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι της μορφής

$$\{a_n^{\mathrm{P}} + a_n^{\mathrm{H}}\}$$

Γραμμική μη ομογενής αναδρομική σχέση [2]

- **Θεώρημα 2**
- Έστω μια γραμμική μη ομογενής αναδρομική σχέση με σταθερούς συντελεστές και με μη γραμμικό τμήμα $f(n)$ της μορφής

$$f(n) = (b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \dots + b_1 n + b_0) s^n$$

- Αν s δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της αντίστοιχης ομογενούς αναδρομικής εξίσωσης, τότε υπάρχει μια μερική λύση της μορφής

$$(c_t n^t + c_{t-1} n^{t-1} + \dots + c_1 n + c_0) s^n$$

- Αν s είναι μια ρίζα πολλαπλότητας m, τότε μια μερική λύση είναι της μορφής

$$n^m (c_t n^t + c_{t-1} n^{t-1} + \dots + c_1 n + c_0) s^n.$$

Παράδειγμα [2]

- Θεωρούμε την ακολουθία $$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_n = 4\alpha_{n-1} + 3^n, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

➢ ομογενής: $a_n - 4a_{n-1} = 0$

➢ χ. ε : $b - 4 = 0 \Rightarrow$ ρ = 4, απλή ρίζα

➢ γενική λύση ομογενούς: $a_n^{\mathrm{H}} = c_1 \cdot 4^n$

➢ για μια μερική λύση της μη ομογενούς: επειδή $f(n) = 3^n \Rightarrow a_n^{\mathrm{P}} = c_0 \cdot 3^n$
και αντικαθιστώντας στη μη ομογενή εξίσωση

$$\Rightarrow c_0 \cdot 3^n = 4c_0 3^{n-1} + 3^n \Rightarrow 3c_0 = 4c_0 + 3 \Rightarrow c_0 = -3,$$

➢ άρα μερική λύση είναι:

$$a_n^{\mathrm{P}} = -3 \cdot 3^n = -3^{n+1}$$

- η γενική λύση είναι

$$a_n = c_1 4^n - 3^{n+1}$$

- αρχική συνθήκη $\Rightarrow 1 = c_1 \cdot 4 - 3^2 \Rightarrow 4c_1 = 10 \Rightarrow c_1 = 5/2$.
- Άρα τελικά

$$a_n = \frac{5}{2} 4^n - 3^{n+1}$$

Άσκηση [1]

- Αν για τον $m \times m$ πίνακα A ισχύει ότι

$$A(A - 6I_m) = -9I_m$$

να βρεθεί ο A^n, $n \in \mathbb{N}$ ως γραμμικός συνδυασμός των πινάκων A και I_m.

- **Λύση**

Επειδή

$$A(A - 6I_m) = -9I_m \Rightarrow A^2 = 6A - 9I_m$$

αναζητούμε τον A^n να είναι της μορφής

$$A^n = a_n A + b_n I_m,\ a_n, b_n \in \mathbb{R} \text{ με } a_1 = 1,\ a_2 = 6 \text{ και } b_1 = 0,\ b_2 = -9.$$

οπότε θα είναι και

$$A^{n+1} = a_{n+1} A + b_{n+1} I_m.$$

Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$A^{n+1} = A^n A = (a_n A + b_n I_m)A$$
$$= a_n A^2 + b_n A = a_n(6A - 9I_m) + b_n A$$

ή

$$A^{n+1} = (6a_n + b_n)A - 9a_n I_m.$$

Άσκηση [2]

Συνεπώς θα πρέπει $\begin{cases} a_{n+1} = 6a_n + b_n \\ b_{n+1} = -9a_n \end{cases} \Rightarrow a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1}.$

Προέκυψε έτσι μια γραμμική ομογενής αναδρομική σχέση με σταθερούς συντελεστές για την οποία έχουμε, κατά τα γνωστά πλέον,

- ✓ χαρακτηριστική εξίσωση: $x^2 - 6x + 9 = 0$
- ✓ ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης: $\rho_1 = \rho_2 = 3$
- ➢ γενική μορφή της (a_n): $a_n = c_1 3^n + c_2 n 3^n$.

Για τον υπολογισμό των c_1, c_2 προκύπτει,

$$\begin{cases} a_1 = 3c_1 + 3c_2 \\ a_2 = 9c_1 + 18c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 3c_1 + 3c_2 \\ 6 = 9c_1 + 18c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

οπότε καταλήγουμε ότι

$$a_n = n3^n,\ b_n = -9a_{n-1} = -3(n-1)3^{n-1}$$

και τελικά,

$$A^n = n3^n A - 3(n-1)3^{n-1} I_m,\ n \in \mathbb{N}.$$

Υπολογισμός αθροισμάτων

- *Ορισμός* Δοθέντων των αριθμών $a_1, a_2, \ldots, a_n$, το άθροισμα των a_i από το $i = 1$ μέχρι το n, συμβολικά $\sum_{i=1}^{n} a_i$
- ορίζεται ως εξής: $$\sum_{i=1}^{1} a_1 = a_1 \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i \right) + a_n, \ \text{αν } n > 1$$
- Γενικότερα τώρα, δοθείσης της ακολουθίας (a_n) μπορούμε να αθροίσουμε τους όρους ενός υποσυνόλου των όρων της ακολουθίας χρησιμοποιώντας το σύμβολο αθροίσματος
  - $a_{g(m)} + a_{g(m+1)} + \ldots + a_{g(n)} =$
    - (αν $n = 0$ η τιμή του αθροίσματος είναι εξ ορισμού 0)
- ή πιο γενικά $\sum_{j \in S} a_j$
- για όλα τα μέλη j ενός συνόλου S.
- Αν έχουμε άθροισμα απείρου πλήθους όρων $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ αυτό γράφεται $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$
- και σημαίνει $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} a_j$

Παραδείγματα – Ιδιότητες

- $t^0 + t^1 + t^2 + \ldots + t^n = \sum_{j=0}^{n} t^j$
- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$
- $a_{2m} + a_{2(m+1)} + \ldots + a_{2n} = \sum_{i=m}^{n} a_{2i}$
- Αν S ={2, 5, 7, 10}, τότε $\sum_{j \in S} a_j = a_2 + a_5 + a_7 + a_{10}$

➢ *Ιδιότητα γραμμικότητας:* $\sum_{k \in S} (ca_k + b_k) = c \sum_{k \in S} a_k + \sum_{k \in S} b_k$

- με ειδικές περιπτώσεις

➢

$$\sum_{k \in S} (a_k + b_k) = \sum_{k \in S} a_k + \sum_{k \in S} b_k \qquad \sum_{k \in S} ca_k = c \sum_{k \in S} a_k$$

➢

❖ *Αλλαγή μεταβλητής:* $\sum_{k \in S} a_k = \sum_{p(k) \in S} a_{p(k)}$

➢ όπου $p(k)$ είναι μια μετάθεση του συνόλου των ακεραίων.

Ειδική περίπτωση $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{j=m}^{n+m} a_{j-m} = \sum_{k=m}^{n+m} a_{k-m}$

Γνωστά Αθροίσματα

- $\sum_{k=j}^{n} 1 = n - j + 1$
- *Αριθμητική Πρόοδος:*
- $\begin{cases} a_0 = a, & a \in \mathbb{R} \\ a_{n+1} = a_n + b, & b \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \quad a_n = a + nb$ και $\sum_{k=0}^{n} (a + kb) = (a + \frac{1}{2} bn)(n+1)$

➢ $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

➢ $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

➢ $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

- *Γεωμετρική Πρόοδος:* $\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = r a_n \end{cases} \Rightarrow a_n = ar^n$ και $\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{a\left(r^{n+1} - 1\right)}{r - 1}, r \neq 1$
- Έτσι, $\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}, r \neq 1$

Μέθοδος υπολογισμού

- Στηρίζεται στην παρατήρηση,

$$\sum_{k=m}^{n}\left(a_{k+1}-a_k\right)=a_{n+1}-a_m$$

- αφού,

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n}\left(a_{k+1}-a_k\right)=\ & a_{m+1}-a_m+\\ & a_{m+2}-a_{m+1}+\\ & a_{m+3}-a_{m+2}+\\ & \quad\vdots\\ & a_{n+1}-a_n \quad =a_{n+1}-a_m\end{aligned}$$

- Έτσι,

➢ $$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k-a_{k-1}\right)=a_n-a_0$$

➢ $$\sum_{k=0}^{n}\left(a_k-a_{k+1}\right)=a_0-a_n$$

- *Άσκηση:* $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=?$

Τέλος Ενότητας

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης