Υπολογιστικά & Διακριτά Μαθηματικά

Ενότητα 4: Διατάξεις – Μεταθέσεις – Συνδυασμοί

Στεφανίδης Γεώργιος
Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Μεταθέσεις

- Για $m = n$ έχουμε το πλήθος των μεταθέσεων ενός n-συνόλου

$$\boldsymbol{P(n) := n^{\underline{n}} = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = \prod_{i=1}^{n} i = n!}$$

- Αν η διατεταγμένη m-άδα έχει συνιστώσες στοιχεία του A όχι κατ' ανάγκη διαφορετικά μεταξύ τους, τότε λέγεται ***διάταξη με επανάληψη*** m στοιχείων του A ή ***m-μετάθεση με επανάληψη*** του A ή ένα ***m*-δείγμα** του A, και πρόκειται για μια συνάρτηση του συνόλου $\{1, 2, \ldots, m\}$ στο A.
- Το πλήθος των m-μεταθέσεων με επανάληψη ενός n-συνόλου, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου, είναι

$$P^R(n, m) = n^m$$

  αφού για την επιλογή κάθε συνιστώσας της m-άδας υπάρχουν n δυνατότητες (όσα τα στοιχεία A).
- **Παράδειγμα**: Το πλήθος των δυαδικών συμβολοσειρών μήκους n που σχηματίζονται, είναι $P^R(2, n) = 2^n$, διότι πρόκειται για διατεταγμένες n-άδες από στοιχεία του συνόλου $A = \{0, 1\}$.

➢ [$\{0, 1\}^n := \{0, 1\}\times\{0, 1\} \times \ldots \times \{0, 1\}$ (n παράγοντες) και $\#\{0, 1\}^n = (\#\{0, 1\})^n = 2^n$]

Μεταθέσεις: Άσκηση

- **Άσκηση**. Βρείτε το πλήθος των υποσυνόλων ενός συνόλου *A* που έχει *n* στοιχεία.
- ***Λύση***

- Αν θεωρήσουμε ένα υποσύνολο του *A* με Α = $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, κάθε στοιχείο του *A* μπορεί να είναι στοιχείο του υποσυνόλου (1) ή να μην είναι (0).
- Έτσι έχουμε μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των υποσυνόλων του *A* και των δυαδικών συμβολοσειρών μήκους *n*, οπότε το πρόβλημα είναι να βρούμε πόσες δυαδικές συμβολοσειρές (πεπερασμένες ακολουθίες), μήκους n, σχηματίζονται.
- Από το προηγούμενο Παράδειγμα το πλήθος αυτό είναι 2^n.

Άσκηση

- Σε ένα υπολογιστικό σύστημα ένας έγκυρος κωδικός χρήστη (password) είναι μια ακολουθία αποτελούμενη από 6 έως και 8 σύμβολα. Το πρώτο σύμβολο πρέπει να είναι ένα γράμμα του Αγγλικού αλφάβητου (πεζό ή κεφαλαίο) και τα υπόλοιπα σύμβολα πρέπει να είναι γράμματα (του Αγγλικού αλφάβητου) ή δεκαδικά ψηφία. Πόσοι κωδικοί χρήστη σχηματίζονται;

- Λύση

- Έστω

$P = \{a, b, \ldots, z, A, B, \ldots, Z\}$ το σύνολο των συμβόλων για τη πρώτη θέση

$S = \{a, b, \ldots, z, A, B, \ldots, Z, 0, 1, \ldots, 9\}$ το σύνολο των συμβόλων για τις υπόλοιπες θέσεις

- Το σύνολο όλων των έγκυρων κωδικών χρήστη θα είναι

$$(P \times S^5) \cup (P \times S^6) \cup (P \times S^7)$$

- Το πλήθος των έγκυρων κωδικών χρήστη θα είναι ο πληθικός αριθμός αυτού του συνόλου. Επομένως,
- $|(P \times S^5) \cup (P \times S^6) \cup (P \times S^7)| =$

$= |P \times S^5| + |P \times S^6| + |P \times S^7|$ (κανόνας αθροίσματος)

$= |P| \cdot |S^5| + |P| \cdot |S^6| + |P| \cdot |S^7|$ (κανόνας γινομένου)

$= |P|(|S^5| + |S^6| + |S^7|)$

$= 52(62^5 + 62^6 + 62^7)$

$\approx 1.8 \cdot 10^{14}$ έγκυροι κωδικοί χρήστη.

Βασική αρχή[1]

1. **Αν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $f : A \to B$ μεταξύ των συνόλων A και B, τότε**

$$|A| = |B|.$$

2. **Έστω μη αρνητικός ακέραιος m. Αν $f : A \to B$ είναι μια συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε $y \in B$ υπάρχουν ακριβώς m στοιχεία $x \in A$ με $f(x) = y$, τότε**

$$|A| = m \cdot |B|$$

- ***Άσκηση*** Τέσσερα άτομα με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν σε τέσσερα καθίσματα αν,

a) τα καθίσματα είναι σε ευθεία διάταξη;

b) Τα καθίσματα είναι σε κυκλική διάταξη;

➢ Έχουμε

- αν τα καθίσματα είναι σε ευθεία διάταξη, μια τοποθέτηση είναι της μορφής,

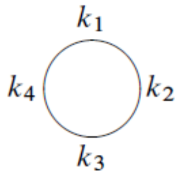
$$k_1\, k_2\, k_3\, k_4$$

- και το πλήθος των περιπτώσεων είναι το πλήθος των μεταθέσεων των 4 ατόμων, δηλαδή 4!.

b) αν τα καθίσματα είναι σε κυκλική διάταξη, μια τοποθέτηση είναι όπως αυτή του

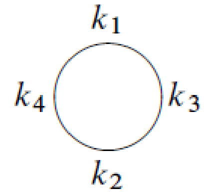
Βασική αρχή[2]

σχήματος,



- Μια τέτοια περίπτωση αντιστοιχεί στις περιπτώσεις ευθείας διάταξης:

$$\begin{matrix}(k_2,k_4,k_1,k_3)\\(k_4,k_1,k_3,k_2)\\(k_1,k_3,k_2,k_4)\\(k_3,k_2,k_4,k_1)\end{matrix} \longrightarrow$$



- που σημαίνει ότι σε κάθε κυκλική διάταξη αντιστοιχούν 4 διαφορετικές περιπτώσεις σε ευθεία διάταξη.

➢ Άρα το πλήθος των τρόπων που μπορούν να καθίσουν τα 4 άτομα σε κύκλο είναι,

$$\frac{4!}{4} = \frac{3!4}{4} = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

❖ ***<u>Παρατήρηση</u>***

Γενικεύοντας το παραπάνω παράδειγμα, μπορούμε να πούμε ότι,

- το πλήθος των **κυκλικών μεταθέσεων** (**κυκλικές διατάξεις** των n στοιχείων ανά n) χωρίς επανάληψη, είναι $(n\text{-}1)!$ αφού σε κάθε κυκλική μετάθεση αντιστοιχούν n μεταθέσεις που το πλήθος τους είναι,

$$P(n) = n! \Rightarrow \frac{n!}{n} = \frac{(n-1)!\,n}{n} = (n-1)!$$

Συνδυασμοί

- **Ορισμός**. Κάθε υποσύνολο με m στοιχεία (m-υποσύνολο) ενός n-συνόλου *A* λέγεται ***συνδυασμός*** m στοιχείων του *A* ή m-*συνδυασμός* του *A ή συνδυασμός των* n *ανά* m. Πρόκειται στην ουσία για τους δυνατούς τρόπους επιλογής m στοιχείων από n χωρίς επανάθεση (ή επανάληψη).

- Το πλήθος τους αποδεικνύεται ότι είναι

$$C(n,m)=\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

- Αποδεικνύεται εύκολα ότι

$$P(n,m)=\binom{n}{m}m!$$

Συνδυασμοί- Παράδειγμα

- **Παράδειγμα**: Στο επίπεδο έχουμε δέκα σημεία που ανά τρία δεν είναι συνευθειακά.

  α) Πόσες ευθείες ορίζονται από τα σημεία αυτά;

  β) Πόσα τρίγωνα ορίζονται από τα σημεία αυτά;

- Έχουμε:

  α) Κάθε 2-άδα σημείων ορίζει μια ευθεία. Επειδή είναι απλές 2-άδες (όχι διατεταγμένες) το πλήθος τους είναι,

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{8!9\cdot 10}{2\cdot 8!} = 9\cdot 5 = 45$$

  β) Κάθε 3-άδα (απλή) ορίζει ένα τρίγωνο. Το πλήθος των 3-άδων είναι,

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{7!8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 7!} = 4\cdot 3\cdot 10 = 120$$

Άσκηση[1]

- **Άσκηση.** Σε μια ευθεία ($ε_1$) έχουμε τα σημεία A_1, A_2, …, A_n και στην ευθεία ($ε_2$)//($ε_1$) τα σημεία B_1, B_2, …, B_m. Πόσα τρίγωνα σχηματίζονται με αυτά τα σημεία;

❑ **Λύση**

- Έστω S το σύνολο των τριγώνων που σχηματίζονται. Είναι

$$S = S_1 \cup S_2$$

Άσκηση[2]

όπου

- S_1 το σύνολο των τριγώνων που σχηματίζονται με δύο κορυφές από την (ε_1) και μία κορυφή από την (ε_2), και
- S_2 το σύνολο των τριγώνων που σχηματίζονται με μία κορυφή από την (ε_1) και δύο κορυφές από την (ε_2).
- Άρα,

$$|S| = |S_1| + |S_2| = \binom{n}{2}\binom{m}{1} + \binom{n}{1}\binom{m}{2}$$

$$= \frac{n!}{2!(n-2)!}m + n\frac{m!}{2!(m-2)!}$$

$$= \frac{(n-1)n}{2}m + n\frac{(m-1)m}{2}$$

$$= \frac{nm}{2}(n+m-2)$$

Παράδειγμα [1]

- **Παράδειγμα**: Θεωρούμε τον κώδικα

```
(1) for i = 1 to n-1
(2)   for j = i+1 to n
(3)     if (A[i] > A[j])
(4)      εναλλαγή των A[i] και A[j]
```

- Πόσες φορές γίνεται η σύγκριση `A[i]>A[j]` στη γραμμή (3);

➢ Θεωρούμε το σύνολο των συγκρίσεων:

✓ Όταν i = 1, το j παίρνει τις τιμές 2 έως *n*

✓ Όταν i = 2, το j παίρνει τις 3 έως *n*,

✓ …

Παράδειγμα [2]

- ✓ Γενικά, σε κάθε ζεύγος (i, j) με $i < j$ αντιστοιχεί μία και μόνο μία σύγκριση.
- Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση f από το σύνολο των διατεταγμένων 2-άδων (i, j) με $i < j$ (*γνησίως αύξουσες 2-άδες*) στο σύνολο των 2-συνόλων $\{i, j\}$.
- Επειδή δύο διαφορετικές 2-άδες δεν μπορεί να είναι το ίδιο σύνολο σε δύο διαφορετικές διατάξεις, αυτές πρέπει να αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικά 2-σύνολα.
- ➢ Άρα η f είναι «1-1».
- Επειδή κάθε 2-σύνολο ακεραίων μπορεί να καταγραφεί με αύξουσα διάταξη τους θα είναι η εικόνα μιας 2-άδας (γνησίως αύξουσας) μέσω της f.
- ➢ Άρα η f είναι «επί».

Παράδειγμα [3]

- Έτσι, έχουμε μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των διατεταγμένων 2-άδων που είναι γνησίως αύξουσες και του συνόλου των 2-συνόλων.
- Άρα, το πλήθος των συγκρίσεων είναι το ίδιο με το πλήθος των 2-υποσυνόλων του n-συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$, δηλ. με το πλήθος των n ανά 2 συνδυασμών

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{(n-2)!(n-1)n}{2(n-2)!} = \frac{(n-1)n}{2}$$

Ορισμός [1]

- **Ορισμός**. Κάθε συλλογή με *m* στοιχεία, όχι απαραίτητα διαφορετικά μεταξύ τους, από ένα *n*-σύνολο *A* λέγεται **συνδυασμός *m* στοιχείων από *n* στοιχεία με επανάληψη ή *m*-επιλογή** του *A*, και αποδεικνύεται ότι το πλήθος τους είναι,

$$\binom{m+n-1}{m} \quad \textbf{(πλήθος συνδυασμών με επανάληψη)}$$

Ορισμός [2]

- **Παράδειγμα**: Πόσες τριάδες (i, j, k) με $1 \le i \le j \le k \le n$ σχηματίζονται;

➢ Υπάρχουν τόσες τέτοιες τριάδες όσοι είναι οι συνδυασμοί με επανάληψη τριών ακεραίων από τους ακεραίους 1 έως *n*, αφού τα στοιχεία κάθε τέτοιας 3-επιλογής μπορούν να γραφούν κατ' αύξουσα σειρά με έναν μόνο τρόπο.

➢ Άρα το πλήθος των τριάδων είναι

$$\binom{3+n-1}{3} = \binom{n+2}{3} = \frac{(n+2)!}{3!(n+2-3)!}$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)!}{2\cdot 3(n-1)!} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Παράδειγμα [4]

- **Παράδειγμα**: Πόσες φορές θα επαναληφθεί ο εσωτερικός βρόχος όταν εκτελεστεί το παρακάτω τμήμα κώδικα;

for $k := 1$ **to** n
    for $j := 1$ **to** k
        for $i := 1$ **to** j
            [*εντολές στο σώμα του εσωτερικού βρόχου, καμία από τις οποίες δεν περιέχει παρακλάδια που οδηγούν εκτός βρόχου*]

Παράδειγμα [5]

- Σχηματίζουμε τον πίνακα

k	1	2		→	3					→	⋯	n						→
j	1	1	2	→	1	2	→	3		→	⋯	1	2	→	⋯	n		→
i	1	1	1	2	1	1	2	1	2	3	⋯	1	1	2	⋯	1	⋯	n

- Παρατηρούμε ότι, υπάρχει μία επανάληψη του εσωτερικού βρόχου για κάθε στήλη του πίνακα και υπάρχει μία στήλη του πίνακα για κάθε (i, j, k) με $1 \leq i \leq j \leq k \leq n$. Αλλά στο προηγούμενο Παράδειγμα είδαμε ότι το πλήθος τέτοιων τριάδων είναι

$$\binom{3+n-1}{3} = \cdots = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Διώνυμο του Newton

- Για τους πραγματικούς (ή μιγαδικούς) αριθμούς *a* και *b*, και για κάθε φυσικό αριθμό *n*, είναι

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^{n-m} b^m$$

- Το διωνυμικό ανάπτυγμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να πάρουμε διάφορα αποτελέσματα.
- Παραδείγματος χάριν, αντικαθιστώντας στον τύπο του, *a* = *b* = 1, παίρνουμε την ταυτότητα

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} = 2^n$$

- κι αν αντικαταστήσουμε, *a* = 1 και *b* = – 1, παίρνουμε την ταυτότητα

$$\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} = 0$$

Άσκηση [3]

✓ **Βρείτε τον πληθικό αριθμό του δυναμοσυνόλου $\wp$(*A*) ενός συνόλου *A* με πληθικό αριθμό *n*.**

Λύση

Είναι,

- $\binom{n}{0}$ = πλήθος υποσυνόλων του *A* με 0 στοιχεία,
- $\binom{n}{1}$ = πλήθος υποσυνόλων του *A* με 1 στοιχείο
- $\binom{n}{2}$ = πλήθος υποσυνόλων του *A* με 2 στοιχεία
- …
- $\binom{n}{n}$ = πλήθος υποσυνόλων του *A* με *n* στοιχεία

➢ Επομένως, πλήθος υποσυνόλων του Α = $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n} = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}$ $=2^n$

Οι διωνυμικοί συντελεστές

- **Οι αριθμοί** $\binom{n}{m}$

λέγονται διωνυμικοί συντελεστές και έχουν πολλές ενδιαφέρουσες και χρήσιμες ιδιότητες μερικές από τις οποίες είναι οι εξής:

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$$

$$\binom{n}{m} = \frac{n}{m} \cdot \binom{n-1}{m-1}$$

$$\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k}$$

$$\binom{n+k}{m} = \sum_{i=0}^{m} \binom{n}{i} \binom{k}{m-i}$$

οι οποίες αποδεικνύονται εύκολα χρησιμοποιώντας τον τύπο του $\binom{n}{m}$ **.**

Πρόβλημα

- Θέλουμε να βρούμε πόσες δυαδικές συμβολοσειρές ***δεν*** έχουν δύο διαδοχικά 0.

➢ Έστω $a(n) := a_n$ το ζητούμενο πλήθος (με $n > 2$). Τότε θα είναι

- $a_1 = 2 \quad (0,\ 1)$
- $a_2 = 3 \quad (01,\ 10,\ 11)$

➢ $$a_n = \left(\underbrace{\ldots}_{n-1} 0\right) + \left(\underbrace{\ldots}_{n-1} 1\right) = \left(\underbrace{\ldots}_{n-2} 10\right) + \left(\underbrace{\ldots}_{n-1} 1\right) = a_{n-2} + a_{n-1}, \quad n \geq 3$$

➢ a_n = ? (= αναλυτική έκφραση ή τύπος για το $a(n)$)

➢ Αναδρομικές σχέσεις (ακολουθίες) [στο επόμενο μάθημα]

Τέλος Ενότητας

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης