Υπολογιστικά & Διακριτά Μαθηματικά

Ενότητα 3: Σύνολα – Συνδυαστική

Στεφανίδης Γεώργιος
Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Πρόβλημα απαρίθμησης [1]

- Θεωρούμε το τμήμα κώδικα

```
(1) for i = 1 to n-1
(2)   for j = i+1 to n
(3)     if (A[i] > A[j])
(4)       εναλλαγή των A[i] και A[j]
```

- Πόσες φορές γίνεται η σύγκριση `A[i]>A[j]` στη γραμμή (3);
- Οι γραμμές (2)-(4) εκτελούνται $n-1$ φορές, μία φορά για κάθε i μεταξύ των 1 και $n-1$.
  - την 1η φορά, $n-1$ συγκρίσεις
  - την 2η φορά, $n-2$ συγκρίσεις
  - την i η φορά $n-i$ συγκρίσεις
  - την $(n-1)$η φορά 1 σύγκριση
- Άρα, συνολικά γίνονται

$$(n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = (n-1)n/2.$$

- Τι κάναμε;

Πρόβλημα απαρίθμησης [2]

- Δείξαμε πώς να **διαμερίσουμε** ένα μεγάλο **σύνολο** συγκρίσεων στην **ένωση** μικρότερων ξένων (ανά δύο) συνόλων.
- Στη συνέχεια βρήκαμε το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας μια γενική αρχή:

❑ (**Κανόνας του αθροίσματος**) Ο πληθικός αριθμός της ένωσης μιας οικογένειας ξένων πεπερασμένων συνόλων είναι το άθροισμα των πληθικών αριθμών των συνόλων.

- **Σύνολα**
- Μια οποιαδήποτε συλλογή αντικειμένων θα λέγεται ότι είναι ένα σύνολο και τα αντικείμενα θα λέγονται στοιχεία του συνόλου. (Οι λέξεις σύνολο και στοιχείο είναι οι θεμελιακοί όροι (δεν ορίζονται) της Θεωρίας Συνόλων, όπως είναι και οι λέξεις πρόταση, αληθής και ψευδής της Λογικής.)

Πρόβλημα απαρίθμησης [3]

- Τυπικά γράφουμε

$$A = \{x : P(x)\}$$

για το σύνολο των αντικειμένων x για τα οποία καθίσταται αληθής πρόταση το κατηγόρημα $P(x)$.

- Για παράδειγμα,

$$A = \{x : x \text{ είναι μη αρνητικός ακέραιος και } x \leq 5\}$$

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

είναι δυο ισοδύναμοι τρόποι να δοθεί το σύνολο με στοιχεία τους αριθμούς 0, 1, 2, 3, 4 και 5.

Δυναμοσύνολο [1]

- **Ορισμός**. Αν A είναι ένα σύνολο, το δυναμοσύνολο $\wp$(A) του A, είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A.
- Για παράδειγμα, αν A = {α, β} τότε, $\wp$(A) = {$\emptyset$, {α}, {β}, {α, β}}.

✓ ***Άσκηση***. Για κάθε ακέραιο $n \geq 0$, αν ένα σύνολο A έχει n στοιχεία τότε βρείτε πόσα στοιχεία έχει το $\wp$(A).

➢ **Λύση**

- Για $n = 0$: $A = \emptyset$, οπότε $\#\wp(A) = 1 = 2^0$
- Για n = 1: $A = \{a_1\}$, τότε $\wp(A) = \{\emptyset, A\}$ και $\#\wp(A) = 2 = 2^1$
- Για n = 2: $A = \{a_1, a_2\}$, τότε $\wp(A) = \{\emptyset, A, \{a_1\}, \{a_2\}\}$ και $\#\wp(A) = 4 = 2^2$

Δυναμοσύνολο [2]

- Ισχυριζόμαστε ότι ισχύει η πρόταση $P(n)$: ‘‘**Ένα σύνολο με *n* στοιχεία έχει 2^n υποσύνολα’’.**
- *Απόδειξη* (με επαγωγή στο n):
- 1. *Βασικό βήμα*. Η πρόταση $P(0)$ είναι αληθής γιατί ένα σύνολο με 0 στοιχεία, το $\emptyset$, έχει ακριβώς $2^0 = 1$ υποσύνολα.
- 2. *Επαγωγικό βήμα*. Έστω $P(n)$ αληθής, δηλ. έστω ότι κάθε σύνολο με n στοιχεία έχει 2^n υποσύνολα. Πρέπει να δείξουμε την $P(n+1)$, δηλ. πρέπει να δείξουμε ότι κάθε σύνολο με $n + 1$ στοιχεία έχει 2^{n+1} υποσύνολα.

Δυναμοσύνολο [3]

- Έστω ότι A είναι ένα σύνολο με $n + 1$ στοιχεία και έστω α ένα στοιχείο του. Θέλουμε να μετρήσουμε τα υποσύνολα του A. Ας τα μοιράσουμε σε δύο κλάσεις: αυτά που περιέχουν το α και εκείνα που δεν το περιέχουν. Τα μετράμε χωριστά.
- Πρώτα, τα υποσύνολα που δεν περιέχουν το α. Αν διαγράψουμε το α από το A θα προκύψει ένα σύνολο A_1 με n στοιχεία οπότε σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση θα έχει 2^n υποσύνολα.
- Στη συνέχεια, τα υποσύνολα που περιέχουν το α.

Δυναμοσύνολο [4]

- Κάθε τέτοιο υποσύνολο αποτελείται από το α και από ένα υποσύνολο του A_1. Αντίστροφα, αν θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του A_1, μπορούμε να προσθέσουμε το α σ' αυτό για να πάρουμε ένα υποσύνολο του A που περιέχει το α.
- Έτσι ο αριθμός των υποσυνόλων του A που περιέχουν το α είναι ο ίδιος με τον αριθμό των υποσυνόλων του A_1 που όπως ξέρουμε είναι 2^n (υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των υποσυνόλων του A που περιέχουν το α και εκείνων που δεν το περιέχουν).
- Επομένως ο συνολικός αριθμός των υποσυνόλων του A είναι

$$2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Ορισμός: Ξένα Σύνολα[1]

- **Ορισμός**: Τα σύνολα A και B λέγονται ξένα, αν και μόνον αν δεν έχουν κοινά στοιχεία.
- Η **ένωση** των συνόλων A και B, συμβολικά $A \cup B$, είναι το σύνολο όλων των στοιχείων που είναι στοιχεία του A ή του B. Δηλαδή,

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ή } x \in B\} = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

- Η **τομή** των A και B, συμβολικά $A \cap B$, είναι το σύνολο όλων των στοιχείων του U που είναι στοιχεία του A και του B. Δηλαδή,

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ και } x \in B\} = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

❖ A και B είναι ξένα $\Leftrightarrow$ $A \cap B = \varnothing$.

Ορισμός: Ξένα Σύνολα[2]

- Ας υποθέσουμε τώρα, ότι σε κάθε στοιχείο i ενός συνόλου I αντιστοιχεί ένα σύνολο A_i. Τότε λέμε ότι έχουμε μια συλλογή ή οικογένεια συνόλων με δείκτες από το σύνολο I και γράφουμε $(A_i)_{i \in I}$. Μπορούμε να γενικεύσουμε τις πράξεις της ένωσης και της τομής δύο συνόλων, για οικογένειες συνόλων. Έτσι, η ένωση των συνόλων μιας οικογένειας $(A_i)_{i \in I}$ είναι το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν σ' ένα τουλάχιστον από τα σύνολα A_i

➢ $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i$, για κάποιο $i \in I\}$

- Ανάλογα, η τομή των συνόλων μιας οικογένειας $(A_i)_{i \in I}$ είναι το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν ταυτόχρονα σ' όλα τα σύνολα A_i

➢ $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i$, για κάθε $i \in I\}$

Ορισμός: Διαμέριση [1]

- **Ορισμός**: Ονομάζουμε **διαμέριση** (ή **διαμελισμό**) ενός συνόλου A στα μη κενά υποσύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_m$ την οικογένεια $(A_i)_{i\in I}$ με $I = \{1, 2, \ldots, m\}$, αυτών των συνόλων, **αν και μόνον αν**

$$i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing,$$

$$\text{και } \bigcup_{i\in I} A_i = A$$

- Π.χ. αν $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, η συλλογή των συνόλων A_1, A_2, A_3, A_4 και A_5, με

$$A_1 = \{1, 2\}, A_2 = \{3, 4\}, A_3 = \{5, 6\}, A_4 = \{7\}, A_5 = \{8, 9, 10\}$$

είναι μια διαμέρισή του.

Ορισμός: Διαμέριση [2]

- Τα σύνολα *A* και *B* λέμε ότι έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, αν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των *A* και *B*.
- Επίσης, το σύνολο *A* λέμε ότι είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, αν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του *A* και του υποσυνόλου

$$E_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

  του $\mathbb{N}$. Σ' αυτή την περίπτωση το *n* θα δηλώνει το πλήθος των στοιχείων του *A*, και λέγεται **πληθικός αριθμός ή πληθάριθμος** του συνόλου *A*, συμβολικά $|A|$ ή $\#A$.
  - Έτσι έχουμε τον ακόλουθο κανόνα, γνωστό ως *κανόνα της αμφιμονοσήμαντης αντιστοιχίας*:

❑ Αν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $f : A \to B$ μεταξύ των συνόλων *A* και *B*, τότε $|A| = |B|$.

Κανόνας του Αθροίσματος

- Αν τα σύνολα A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι ανά δύο ξένα, τότε

$$\forall i, j, 1 \leq i < j \leq n : A_i \cap A_j = \varnothing \quad \Rightarrow \quad \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

- Αν η διαδικασία απαρίθμησης χωρίζεται σε n επιμέρους περιπτώσεις, οι οποίες είναι μεταξύ τους *ασυμβίβαστες* (δηλαδή είναι τέτοιες, ώστε αν κάποιο από τα στοιχεία του πεπερασμένου συνόλου του οποίου ζητούμε τον πληθικό αριθμό συμπεριλαμβάνεται σε κάποια από τις περιπτώσεις αυτές, να μη συμπεριλαμβάνεται σε οποιαδήποτε άλλη), τότε το αποτέλεσμα της απαρίθμησης είναι ίσο με το άθροισμα των επιμέρους απαριθμήσεων, δηλαδή

$$N = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$$

όπου k_i είναι το πλήθος των στοιχείων που συμπεριλαμβάνονται στην i περίπτωση ($i = 1, 2, \ldots, n$).

- Στις εφαρμογές ο κανόνας αυτός εμφανίζεται και με την εξής μορφή: ταξινομούμε τα στοιχεία του συνόλου A, του οποίου ζητούμε τον πληθικό αριθμό, σύμφωνα με τις ιδιότητες E_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), οι οποίες είναι αποκλειστικές μεταξύ τους και θέτουμε $A_i = \{x \in A$: το x έχει την ιδιότητα $E_i\}$.

Πρόβλημα απαρίθμησης [1]

- Απαριθμήσαμε το πλήθος των συγκρίσεων στο τμήμα κώδικα

```
(1) for i = 1 to n-1
(2)   for j = i+1 to n
(3)     if (A[i] > A[j])
(4)       εναλλαγή των A[i]  και  A[j]
```

παρατηρώντας ότι υπάρχουν $\boldsymbol{n-t}$ συγκρίσεις όταν $\boldsymbol{i=t}$. Το άθροισμα ως προς $\boldsymbol{t}$ μας δίνει συνολικά $(n-1)+(n-2)+\ldots+1=(n-1)n/2$ συγκρίσεις

- Σε συμβολισμό συνόλων, έστω S_t το σύνολο των συγκρίσεων $A[i]>A[j]$ που γίνονται όταν $i=t$. Τότε τα σύνολα S_t είναι ξένα ανά δύο με $|S_t|=\boldsymbol{n-t}$ και από τον κανόνα του αθροίσματος το σύνολο

$$\boldsymbol{S=\bigcup_{i=1}^{n-1} S_i}$$

- έχει πληθικό αριθμό

$$\boldsymbol{|S|=\sum_{i=1}^{n-1}|S_i|=\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)=\sum_{k=1}^{n-1}k=(n-1)n/2}$$

- Μέσω της αφαίρεσης καταλήξαμε στο αποτέλεσμα…

Πρόβλημα απαρίθμησης [2]

- Θεωρούμε το τμήμα κώδικα

```
(1) for i = 1 to r
(2)   for j = 1 to m
(3)     S = 0
(4)     for k = 1 to n
(5)       S = S + A[i,k] * B[k,j]
(6)     C[i,j] = S
```

- Πόσοι πολλαπλασιασμοί (συναρτήσει των *r*, *m* και *n*) γίνονται συνολικά σε όλες τις επαναλήψεις της γραμμής (5);

```
(1) for i = 1 to r
(2)   for j = 1 to m
(3)     S = 0
(4)     for k = 1 to n
(5)       S = S + A[i,k] * B[k,j]
(6)     C[i,j] = S
```

- Ο εσωτερικός βρόχος (γραμμές 4 και 5) κάνει ***n*** επαναλήψεις, οπότε εκτελούνται ***n*** πολλαπλασιασμοί, ανεξάρτητα από τις τιμές των μεταβλητών ***i*** και ***j***.

Πρόβλημα απαρίθμησης [3]

```
(1) for i = 1 to r
(2)   for j = 1 to m
(3)     S = 0
(4)     for k = 1 to n
(5)       S = S + A[i,k] * B[k,j]
(6)     C[i,j] = S
```

- Οι γραμμές 2-5 επαναλαμβάνουν τον εσωτερικό βρόχο $\boldsymbol{m}$ φορές, ανεξάρτητα από την τιμή του $\boldsymbol{i}$.
- Επομένως αυτό το τμήμα του προγράμματος κάνει *n* πολλαπλασιασμούς $\boldsymbol{m}$ φορές $\Rightarrow$ $\boldsymbol{nm}$ πολλαπλασιασμούς.

Πρόβλημα απαρίθμησης [4]

- ❖ Γιατί πολλαπλασιάζουμε εδώ;
- Αφαιρετικά σκεπτόμενοι: Ο αλγόριθμος εκτελεί ένα σύνολο πολλαπλασιασμών. Για ένα συγκεκριμένο i διαμερίζουμε το σύνολο των πολ/σιασμών που εκτελούνται στις γραμμές 2-5 σε:
- ➢ σύνολο S_1 των πολλαπλασιασμών που εκτελούνται όταν $j = 1$,
- ➢ σύνολο S_2 των πολλαπλασιασμών που εκτελούνται όταν $j = 2$,
- ➢ …
- ➢ σύνολο S_t των πολλαπλασιασμών που εκτελούνται όταν $j = t$,
- ➢ …
- ➢ Κάθε S_j αποτελείται από τους πολλαπλασιασμούς του εσωτερικού βρόχου για συγκεκριμένο j και το κάθε S_j περιέχει n πολλαπλασιασμούς.

Πρόβλημα απαρίθμησης [5]

- T_i : το σύνολο των πολλαπλασιασμών που εκτελούνται για δεδομένο i.

$$T_i = \bigcup_{j=1}^{m} S_j$$

- Από τον κανόνα του αθροίσματος,

$$|T_i| = |\bigcup_{j=1}^{m} S_j| = \sum_{j=1}^{m} |S_j| = \sum_{j=1}^{m} n = mn$$

- Άρα, πολλαπλασιάσαμε επειδή ο πολλαπλασιασμός είναι επαναλαμβανόμενη πρόσθεση. Αυτό μας οδηγεί στον ακόλουθο κανόνα

Πρόβλημα απαρίθμησης [6]

- **Κανόνας του Γινομένου**: Ο πληθικός αριθμός της ένωσης $\boldsymbol{m}$ ξένων συνόλων, με πληθικό αριθμό $\boldsymbol{n}$ το καθένα, είναι $\boldsymbol{mn}$.

- Στο πρόβλημά μας τώρα:
- Οι γραμμές 2-5 εκτελούνται μία φορά για κάθε i από το 1 έως το $r.$
- Το i είναι διαφορετικό κάθε φορά, έτσι το σύνολο των πολ/σιασμών σε μια εκτέλεση είναι ξένο με το σύνολο σε μια άλλη.
- Άρα, το σύνολο ***όλων*** των πολλαπλασιασμών είναι η ένωση r ξένων συνόλων T_i που περιλαμβάνουν mn πολλαπλασιασμούς το καθένα.
- Από τον κανόνα του γινομένου, το σύνολο όλων των πολλαπλασιασμών έχει πληθικό αριθμό rmn.
- Άρα το πλήθος των πολλαπλασιασμών που κάνει το πρόγραμμα είναι rmn.

Καρτεσιανό Γινόμενο

- Το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών λέγεται ***Καρτεσιανό γινόμενο***, συμβολικά $A \times B$.
- Δηλαδή

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ και } b \in B\}$$

- Ορίζουμε την ισότητα στο σύνολο αυτό:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ και } b = d$$

- **Παράδειγμα**: Έστω $A = \{x, y\}$ και $B = \{1, 2, 3\}$. Είναι
  - $A \times B = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}$
  - $B \times A = \{(1, x), (2, x), (3, x), (1, y), (2, y), (3, y)\}$
  - $B \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$
- Τα Καρτεσιανά γινόμενα του Παραδείγματος υποδηλώνουν ότι για πεπερασμένα σύνολα A και B, αν $|A| = m$ και $|B| = n$, τότε $|A \times B| = mn$.
- Ο ορισμός του Καρτεσιανού γινομένου γενικεύεται και για περισσότερα από δύο σύνολα:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i, i = 1,2, \ldots, n\}$$

όπου, για την ισότητα των διατεταγμένων n-άδων έχουμε

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \Leftrightarrow a_i = b_i, i = 1,2, \ldots, n$$

Ο Κανόνας του Γινομένου [1]

- **Κανόνας του Γινομένου**: Ο πληθικός αριθμός του καρτεσιανού γινομένου $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ των πεπερασμένων συνόλων $A_1, A_2, \ldots ,$ A_n, ισούται με το γινόμενο των πληθικών αριθμών των συνόλων αυτών, δηλαδή

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n| = \prod_{i=1}^{n} | A_i |$$

- Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ αποτελείται από $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$ διατεταγμένες n-άδες, όπου k_i = πληθικός αριθμός του συνόλου A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Για να σχηματίσουμε τώρα μια τέτοια n-άδα πρέπει να επιλέξουμε μία προς μία τις συνιστώσες της και για την επιλογή της j-συνιστώσας υπάρχουν k_j δυνατότητες, γιατί τόσα είναι τα στοιχεία του συνόλου A_j.

Ο Κανόνας του Γινομένου [2]

- Δηλαδή,
- ➢ αν είναι $k_1, k_2, \ldots, k_n$ οι δυνατότητες για την επιλογή της 1ης, 2ης, …, *n*ης συνιστώσας, αντίστοιχα, μιας διατεταγμένης n-άδας, τότε το πλήθος των διατεταγμένων n-άδων που σχηματίζονται, είναι $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$.
- Ο παραπάνω κανόνας διατυπώνεται και ως εξής:
- ➢ αν τα συμβάντα $e_1, e_2, \ldots, e_n$ μπορούν να πραγματοποιηθούν, το καθένα μόνο του, κατά $k_1, k_2, \ldots, k_n$ τρόπους αντίστοιχα, τότε για να πραγματοποιηθούν όλα μαζί, υπάρχουν $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$ διαφορετικοί τρόποι, ή
- ➢ αν μια διαδικασία μπορεί να αναλυθεί σε n φάσεις ή στάδια που διεκπεραιώνονται ή ολοκληρώνονται με $k_1, k_2, \ldots, k_n$ τρόπους αντίστοιχα, τότε η διαδικασία αυτή μπορεί να ολοκληρωθεί με $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$ τρόπους.

Ο Κανόνας του Γινομένου [3]

- **Παράδειγμα**: Πόσους τετραψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5;

➢ Οι αριθμοί θα είναι της μορφής *axyw*

(δηλαδή διατεταγμένες τετράδες) όπου

για τη θέση *a* (1η συνιστώσα) έχουμε 5 δυνατότητες (όχι το 0)

ενώ για τις θέσεις *x*, *y*, *w* (2η, 3η, 4η συνιστώσα) έχουμε 6 δυνατότητες για κάθε μία, αντίστοιχα.

Άρα οι δυνατοί τρόποι είναι, $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 5 \cdot 6^3 = 1080$.

Ο Κανόνας του Γινομένου [4]

- Σε ένα πεπερασμένο σύνολο *A* με *n* στοιχεία (*n*-σύνολο), κάθε διατεταγμένη *m*-άδα ($m \leq n$) της οποίας οι συνιστώσες είναι διαφορετικά ανά δύο στοιχεία του *A*, λέγεται ***διάταξη*** *m* στοιχείων του *A* ή ***m-μετάθεση*** του *A*.
- Με άλλα λόγια, μια *m*-μετάθεση του *A* είναι μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των συνόλων {1, 2, 3,…, *m*} και *A*.
- Ειδικά αν *m* = *n*, η διάταξη λέγεται ***μετάθεση*** του *A* και είναι στην ουσία μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των συνόλων {1, 2, 3,…, *n*} και *A*.
- Το πλήθος των *m*-μεταθέσεων ενός *n*-συνόλου, συμβολικά *P*(*n, m*), σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου, είναι

$$P(n,m) := n^{\underline{m}} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \prod_{i=0}^{m-1}(n-i)$$

Τέλος Ενότητας