ΤΕΧΝΗΤΗ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗ

Ενότητα 12: Συμπερασμός στη λογική πρώτης τάξης

Ρεφανίδης Ιωάννης

Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Συμπερασμός στη λογική πρώτης τάξης

Inference in First-Order Logic

Προτασιακός συμπερασμός και συμπερασμός πρώτης τάξης

Καθολικός προσδιορισμός
(universal instantiation)

- Από την πρόταση:
  - $\forall x$ *Βασιλιάς*(x) $\wedge$ *Άπληστος*(x) $\Rightarrow$ *Κακός*(x)
- μπορούμε να συμπεράνουμε τις προτάσεις:
  - *Βασιλιάς*(*Ιωάννης*) $\wedge$ *Άπληστος*(*Ιωάννης*) $\Rightarrow$ *Κακός*(*Ιωάννης*).
  - *Βασιλιάς*(*Ριχάρδος*) $\wedge$ *Άπληστος*(*Ριχάρδος*) $\Rightarrow$ *Κακός*(*Ριχάρδος*).
  - *Βασιλιάς*(*Πατέρας*(*Ιωάννης*)) $\wedge$ *Άπληστος*(*Πατέρας*(*Ιωάννης*)) $\Rightarrow$ *Κακός*(*Πατέρας*(*Ιωάννης*))
  - κλπ.

- Γενικότερα:

$$\frac{\forall v\, a}{\mathrm{S{\scriptstyle UBST}}(\{v/g\}, a)}$$

  - όπου g οποιοσδήποτε βασικός όρος (χωρίς μεταβλητές)

Υπαρξιακός προσδιορισμός
(existential instantiation)

- Από την πρόταση:
  - $\exists x$ *Στέμμα*(x) $\wedge$ *ΣτοΚεφάλι*(x, *Ιωάννης*)
- μπορούμε να συμπεράνουμε την πρόταση
  - *Στέμμα*(C_1) $\wedge$ *ΣτοΚεφάλι*(C_1, *Ιωάννης*)
  - όπου C_1 ένα καινούργιο σύμβολο αντικειμένου.

- Ο υπαρξιακός προσδιορισμός δεν καλύπτει το ενδεχόμενο περισσοτέρων του ενός αντικειμένων.
  - Συμπερασματικά (όχι λογικά) ισοδύναμος

Αναγωγή στον προτασιακό συμπερασμό

- Εφαρμογή των γνωστών αλγορίθμων προτασιακού συμπερασμού.

- Πρόβλημα:
  – *Το ερώτημα για την κάλυψη στη λογική πρώτης τάξης είναι **ημιαποφασίσιμο** (semidecidable) — δηλαδή, ενώ υπάρχουν αλγόριθμοι που απαντούν θετικά σε κάθε καλυπτόμενη πρόταση, δεν υπάρχει κάποιος αλγόριθμος που να απαντά αρνητικά σε κάθε μη καλυπτόμενη πρόταση*.

Ενοποίηση και ανύψωση

Unification and Lifting

Γενικευμένος Τρόπος του Θέτειν
(generalized modus ponens)

- Εάν Subst(θ, p_i') = Subst(θ, p_i), για όλα τα i , τότε:

$$\frac{p_1', p_2', \ldots, p_n', (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \Rightarrow q)}{\textsc{Subst}(\theta, q)}$$

- Έστω οι προτάσεις:
  - $\forall x$ *Βασιλιάς*(x) $\wedge$ *Άπληστος*(x) $\Rightarrow$ *Κακός*(x) $p_1 \wedge p_2 \Rightarrow q$
  - *Βασιλιάς*(*Ιωάννης*) p_1'
  - $\forall y$ *Άπληστος*(y) p_2'
- Έστω η αντικατάσταση:
  - θ = {*x*/*Ιωάννης*, *y*/*Ιωάννης*}
- Τότε προκύπτει:
  - *Κακός*(*Ιωάννης*) Subst(θ,q)

Ενοποίηση
(unification)

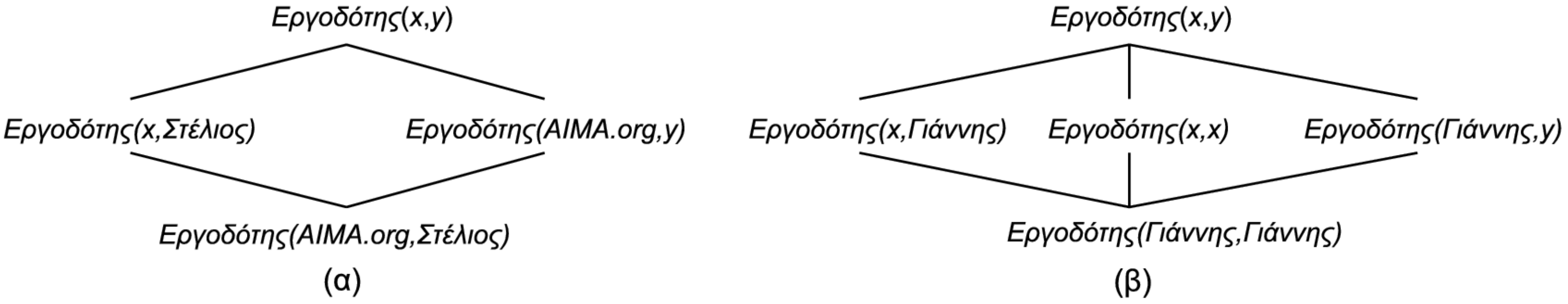
- Unify(p, q) = θ όπου Subst(θ, p) = Subst(θ, q)
  - θ = ενοποιητής (unifier)

- Παραδείγματα:
  - Unify(*Γνωρίζει*(*Γιάννης*, *x*), *Γνωρίζει*(*Γιάννης*, *Μαρία*)) = {*x/Μαρία*}
  - Unify(*Γνωρίζει*(*Γιάννης*, *x*), *Γνωρίζει*(*y*, *Βασίλης*)) = {*x/Βασίλης,y/Γιάννης*}
  - Unify(*Γνωρίζει*(*Γιάννης*, *x*), *Γνωρίζει*(*y*, Μητέρα(*y*))) = {*y/Γιάννης*, *x/Μητέρα*(*Γιάννης*)}
  - Unify(*Γνωρίζει*(*Γιάννης*, *x*), *Γνωρίζει*(*x, Ελισάβετ*)) = *αποτυχία*.

- Πιο γενικός ενοποιητής (most general unifier, MGU)
  - Unify(*Γνωρίζει*(*Γιάννης*, *x*), *Γνωρίζει*(*y*, *z*))
  - θ_1 = {*y/Γιάννης*, *x/z*}
  - θ_2 = {*y/Γιάννης*, *x/Γιάννης*, *z/Γιάννης*}

Αποθήκευση και ανάκτηση

- Ευρετηριασμός κατηγορημάτων
- Συνδυασμοί κατηγορημάτων και ενός ορίσματος
- Συνδυασμοί κατηγορημάτων και πολλών ορισμάτων
- Παράδειγμα: Έστω το κατηγόρημα *Εργοδότης*(*x*,*y*) και οι πιθανές ερωτήσεις σε αυτό.
  - Πλέγμα υπαγωγής (subsumption lattice)



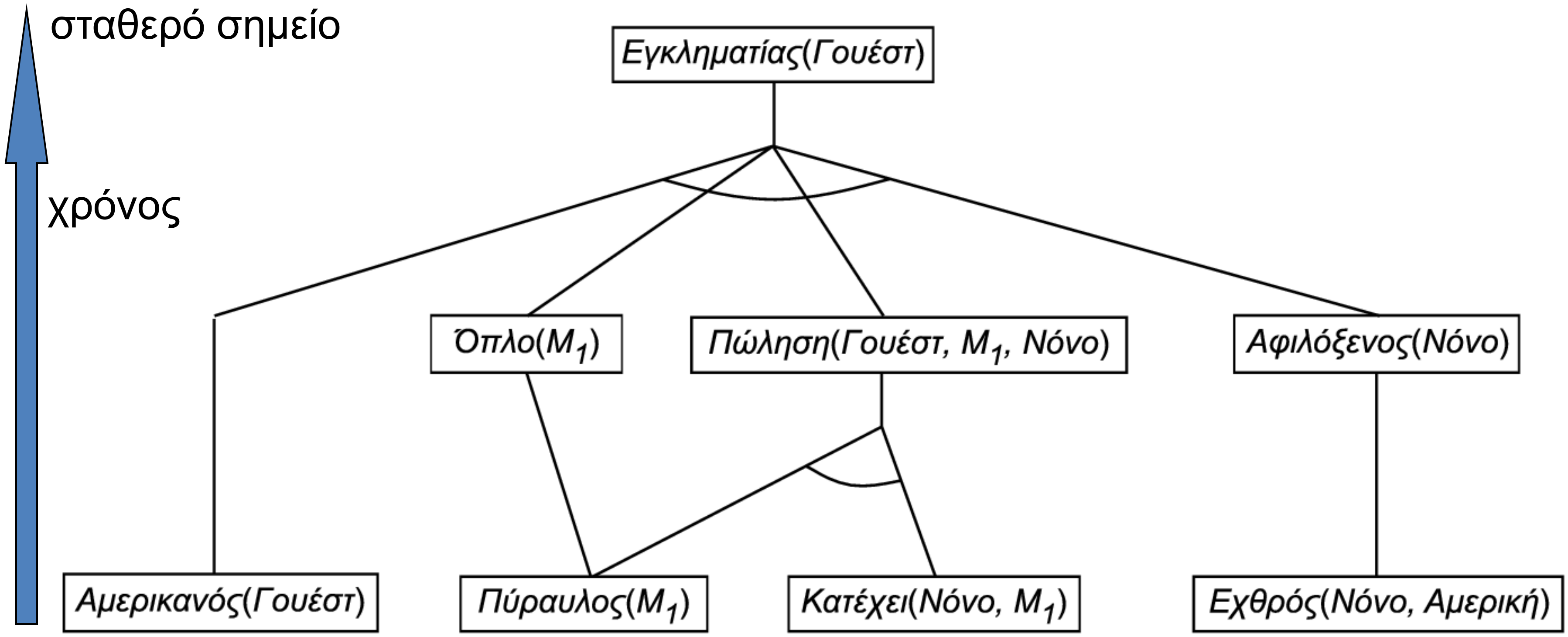
Προς τα εμπρός αλυσίδα εκτέλεσης

Forward chaining

Οριστικές προτάσεις πρώτης τάξης

- Παράδειγμα:
  - Ο νόμος λέει ότι η πώληση όπλων σε αντίπαλα (των Η.Π.Α.) κράτη από Αμερικανούς πολίτες αποτελεί κακούργημα. Η χώρα Νόνο, εχθρός της Αμερικής, διαθέτει μερικούς πυραύλους, και όλοι οι πύραυλοι πουλήθηκαν σε αυτήν από τον Συνταγματάρχη Γουέστ, ο οποίος είναι Αμερικανός.
  - $\textit{Αμερικανός}(x) \land \textit{Όπλο}(y) \land \textit{Πώληση}(x, y, z) \land \textit{Αφιλόξενος}(z) \Rightarrow \textit{Εγκληματίας}(x)$
  - $\textit{Πύραυλος}(M_1)$
  - $\textit{Κατέχει}(\textit{Νόνο}, M_1)$
  - $\textit{Πύραυλος}(x) \land \textit{Κατέχει}(\textit{Νόνο}, x) \Rightarrow \textit{Πώληση}(\textit{Γουέστ}, x, \textit{Νόνο})$
  - $\textit{Πύραυλος}(x) \Rightarrow \textit{Όπλο}(x)$
  - $\textit{Εχθρός}(x, \textit{Αμερική}) \Rightarrow \textit{Αφιλόξενος}(x)$
  - $\textit{Αμερικανός}(\textit{Γουέστ})$
  - $\textit{Εχθρός}(\textit{Νόνο}, \textit{Αμερική})$

Προς τα εμπρός αλυσίδα εκτέλεσης



- Κεντρική ιδέα αλγορίθμου: Σε κάθε επανάληψη ελέγχονται όλοι οι κανόνες.
  - Ημιαποφασίσιμη διαδικασία λόγω συναρτησιακών συμβόλων.

Αποδοτική προς τα εμπρός αλυσίδα εκτέλεσης (1/2)

- Ταίριασμα κανόνων με γνωστά γεγονότα
  - Το πρόβλημα του ταιριάσματος των προϋποθέσεων των κανόνων είναι NP-δύσκολο.
  - Είναι πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών.
  - Διάταξη συζευκτέων, πιο δεσμευμένη μεταβλητή
    - *Πύραυλος*(*x*) $\wedge$ *Κατέχει*(*Νόνο*, *x*) $\Rightarrow$ *Πώληση*(*Γουέστ*, *x*, *Νόνο*)

Αποδοτική προς τα εμπρός αλυσίδα εκτέλεσης (2/2)

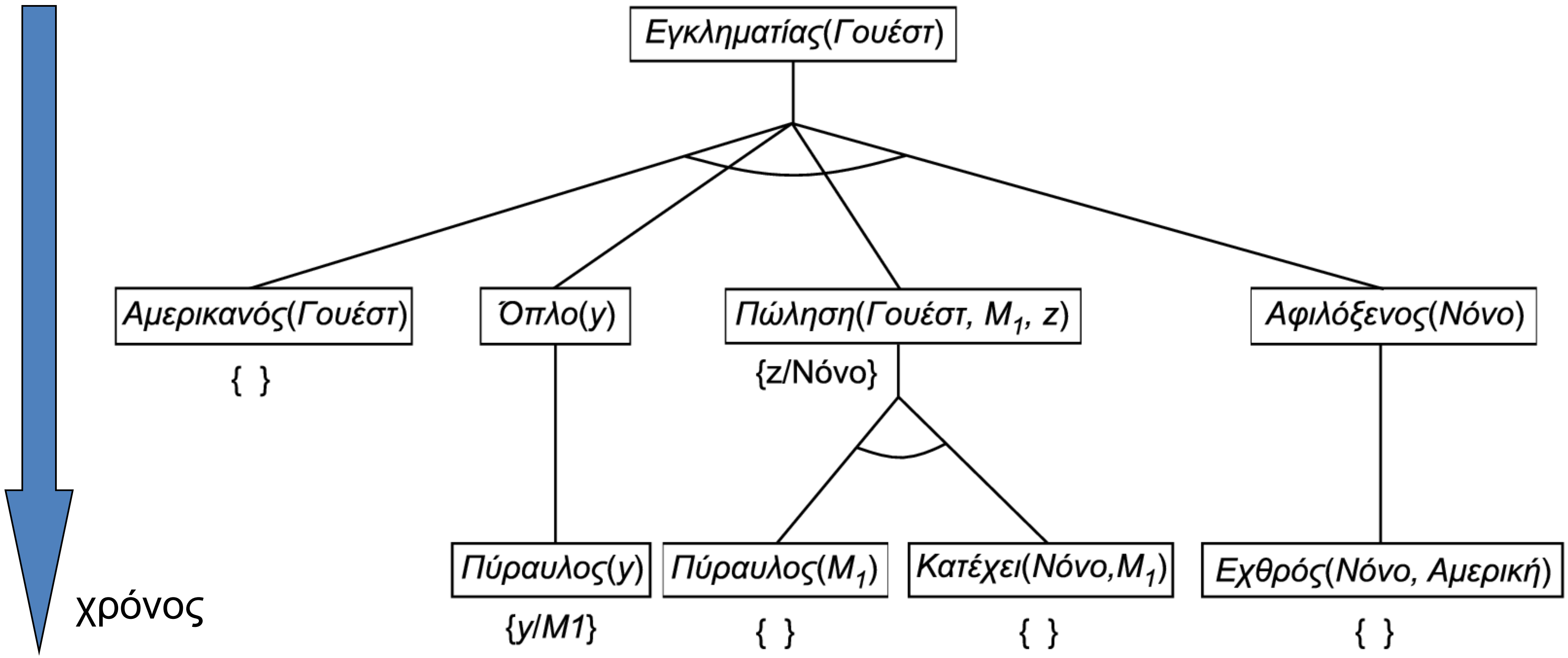
- Αυξητική προς τα εμπρός αλυσίδα εκτέλεσης
  - Σε κάθε επανάληψη δεν ελέγχονται όλοι οι κανόνες, παρά μόνο αυτοί που έχουν μια προϋπόθεση που επιτεύχθηκε στην προηγούμενη επανάληψη.
  - Τα μερικά ταιριάσματα των κανόνων διατηρούνται και ολοκληρώνονται σταδιακά με την άφιξη νέων γεγονότων.
    - Αλγόριθμος rete.

- Άσχετα γεγονότα:
  - Προσπαθούμε να βρούμε ποιοι κανόνες είναι σχετικοί με αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε.

Προς τα πίσω αλυσίδα εκτέλεσης

Backward chaining

Προς τα πίσω αλυσίδα εκτέλεσης



- Αναζήτηση με προτεραιότητα βάθους.
  - Επαναλαμβανόμενες καταστάσεις, μη-πληρότητα

Λογικός προγραμματισμός

- Γλώσσα προγραμματισμού Prolog
  - εγκληματίας(X) :- αμερικάνος(X), όπλο(Y), πώληση(X,Y,Z), αφιλόξενος(Z).
  - append([],Y,Y).
    append([A|X],Y,[A|Z]) :- append(X,Y,Z).
  - ?- append(A,B,[1,2]).
  - A=[] B=[1,2]
    A=[1] B=[2]
    A=[1,2] B=[]
- Λογικός προγραμματισμός με περιορισμούς:
  - τρίγωνο(X,Y,Z) :- X >=0, Y>=0, Z>= 0, X+Y>= Z, Y+Z>= X, X+Z>= Y.
  - ?- τρίγωνο(3,4,Z)
  - 1=<Z=<7

Ανάλυση

Συζευκτική κανονική μορφή (1/2)

- Απλό παράδειγμα:
  - $\forall x$ *Αμερικανός*(x) $\wedge$ *Όπλο*(y) $\wedge$ *Πώληση*(x, y, z) $\wedge$ *Αφιλόξενος*(z) $\Rightarrow$ *Εγκληματίας*(x)
  - $\neg$*Αμερικανός*(x) $\vee$ $\neg$*Όπλο*(y) $\vee$ $\neg$*Πώληση*(x, y, z) $\vee$ $\neg$*Αφιλόξενος*(z) $\vee$ *Εγκληματίας*(x)

- Δυσκολότερα τα πράγματα όταν υπάρχουν υπαρξιακοί ποσοδείκτες:
  - $\forall x$ [$\forall y$ *Ζώο*(y) $\Rightarrow$ *Αγαπά*(x, y)] $\Rightarrow$ [$\exists z$ *Αγαπά*(z, x)]
  - $\forall x$ [$\neg\forall y$ $\neg$*Ζώο*(y) $\vee$ *Αγαπά*(x, y)] $\vee$ [$\exists z$ *Αγαπά*(z, x)]
    - $\neg\forall x\ p \equiv \exists x\ \neg p$
    - $\neg\exists x\ p \equiv \forall x\ \neg p$
  - $\forall x$ [$\exists y$ $\neg$($\neg$*Ζώο*(y) $\vee$ *Αγαπά*(x, y))] $\vee$ [$\exists z$ *Αγαπά*(z, x)].
  - $\forall x$ [$\exists y$ $\neg\neg$*Ζώο*(y) $\wedge$ $\neg$*Αγαπά*(x, y)] $\vee$ [$\exists z$ *Αγαπά*(z, x)].
  - $\forall x$ [$\exists y$ *Ζώο*(y) $\wedge$ $\neg$*Αγαπά*(x, y)] $\vee$ [$\exists z$ *Αγαπά*(z, x)]

Συζευκτική κανονική μορφή (2/2)

- Λανθασμένη αφαίρεση των υπαρξιακών ποσοδεικτών:
  - $\forall x \; [Ζώο(A) \wedge \neg Αγαπά(x, A)] \vee Αγαπά(B, x)$
- Σωστή αφαίρεση των υπαρξιακών ποσοδεικτών:
  - $\forall x \; [Ζώο(F(x)) \wedge \neg Αγαπά(x, F(x))] \vee Αγαπά(G(x), x)$
  - Συναρτήσεις Skolem
- Τελευταία βήματα:
  - $[Ζώο(F(x)) \wedge \neg Αγαπά(x, F(x))] \vee Αγαπά(G(x), x)$
  - $[Ζώο(F(x)) \vee Αγαπά(G(x), x)] \wedge [\neg Αγαπά(x, F(x)) \vee Αγαπά(G(x), x)]$

Ο κανόνας της ανάλυσης

- Εάν Unify(l_i, $\neg m_j$) = θ, τότε:

$$\frac{l_1 \vee \ldots \vee l_k, \qquad m_1 \vee \ldots \vee m_n}{\textsc{Subst}(\theta,\ l_1 \vee \ldots \vee l_{i-1} \vee l_{i+1} \vee \ldots \vee l_k \vee m_1 \vee \ldots \vee m_{j-1} \vee m_{j+1} \vee \ldots \vee m_n)}$$

- Από τις προτάσεις:
  - [*Ζώο*(*F*(*x*)) ∨ *Αγαπά*(*G*(*x*), *x*)]   και   [¬*Αγαπά*(*u*, *v*) ∨ ¬*Σκότωσε*(*u*, *v*)]
- με
  - $\theta = \{u/G(x), v/x\}$
- παίρνουμε:
  - [*Ζώο*(*F*(*x*)) ∨ ¬*Σκότωσε*(*G*(*x*), *x*)]

Παράδειγμα 1 (1/2)

- Ο συνταγματάρχης Γουέστ:
  - $\neg$*Αμερικανός*(*x*) $\vee$ $\neg$*Όπλο*(*y*) $\vee$ $\neg$*Πώληση*(*x*, *y*, *z*) $\vee$ $\neg$*Αφιλόξενος*(*z*) $\vee$ *Εγκληματίας*(*x*).
  - $\neg$*Πύραυλος*(*x*) $\vee$ $\neg$*Κατέχει*(*Νόνο*, *x*) $\vee$ *Πώληση*(*Γουέστ*, *x*, *Νόνο*).
  - $\neg$*Εχθρός*(*x*, *Αμερική*) $\vee$ *Αφιλόξενος*(*x*).
  - $\neg$*Πύραυλος*(*x*) $\vee$ *Όπλο*(*x*).
  - *Κατέχει*(*Νόνο*, *M*1).
  - *Πύραυλος*(*M*1).
  - *Αμερικανός*(*Γουέστ*).
  - *Εχθρός*(*Νόνο*, *Αμερική*)

Παράδειγμα 1 (2/2)

¬ Αμερικανός(x) ∨ ¬ Όπλο(y) ∨ ¬Πώληση(x,y,z) ∨ ¬Αφιλόξενος(z) ∨ **Εγκληματίας(x)** — **¬Εγκληματίας(Γουέστ)**

Αμερικανός(Γουέστ) — **¬Αμερικανός(Γουέστ)** ∨ ¬ Όπλο(y) ∨ ¬Πώληση(Γουέστ ,y,z) ∨ ¬Αφιλόξενος(z)

¬Πύραυλος(x) ∨ **Όπλο(x)** — **¬Όπλο(y)** ∨ ¬Πώληση(Γουέστ,y,z) ∨ ¬Αφιλόξενος(z)

Πύραυλος(M_1) — **¬Πύραυλος(y)** ∨ ¬Πώληση(Γουέστ ,y,z) ∨ ¬Αφιλόξενος(z)

¬Πύραυλος(x) ∨ ¬ Κατέχει(Νόνο,x) ∨ **Πώληση(Γουέστ,x,Νόνο)** — **¬Πώληση(Γουέστ ,M_1,z)** ∨ ¬Αφιλόξενος(z)

Πύραυλος(M_1) — **¬Πύραυλος(M_1)** ∨ ¬Κατέχει(Νόνο,M_1) ∨ ¬Αφιλόξενος(Νόνο)

Κατέχει(Νόνο,M_1) — **¬Κατέχει(Νόνο,M_1)** ∨ ¬Αφιλόξενος(Νόνο)

¬Εχθρός(x,Αμερική) ∨ **Αφιλόξενος(x)** — **¬Αφιλόξενος(Νόνο)**

Εχθρός(Νόνο,Αμερική) — **Εχθρός(Νόνο,Αμερική)**

□

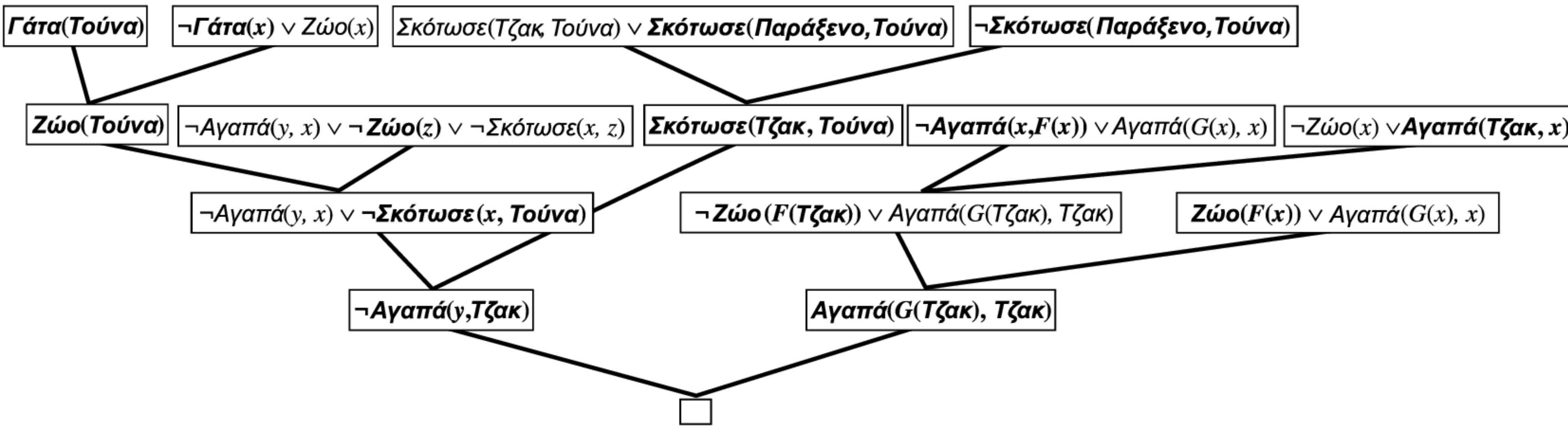
Παράδειγμα 2 (1/3)

- Ένα παράδειγμα με υπαρξιακούς ποσοδείκτες:
  - Όλους όσους αγαπούν όλα τα ζώα τους αγαπά κάποιος.
  - Όποιον σκοτώνει κάποιο ζώο δεν τον αγαπά κανείς.
  - Ο Τζακ αγαπά όλα τα ζώα.
  - Είτε ο Τζακ είτε ένα Παράξενο πρόσωπο σκότωσε τη γάτα, που ονομάζεται Τούνα.
  - Μήπως το Παράξενο πρόσωπο σκότωσε τη γάτα;
- Και οι προτάσεις:
  - Α. $\forall x\ [\forall y\ Ζώο(y) \Rightarrow Αγαπά(x, y)] \Rightarrow [\exists y\ Αγαπά(y, x)]$
  - Β. $\forall x\ [\exists y\ Ζώο(y) \wedge Σκότωσε(x, y)] \Rightarrow [\forall z\ \neg Αγαπά(z, x)]$
  - Γ. $\forall x\ Ζώο(x) \Rightarrow Αγαπά(Τζακ, x)$
  - *Δ.* $Σκότωσε(Τζακ, Τούνα) \vee Σκότωσε(Παράξενο, Τούνα)$
  - *Ε.* $Γάτα(Τούνα)$
  - ΣΤ. $\forall x\ Γάτα(x) \Rightarrow Ζώο(x)$
  - ¬Ζ $\neg Σκότωσε(Παράξενο, Τούνα)$ 🡐 Άρνηση της ερώτησης

Παράδειγμα 2 (2/3)

- Μετατροπή σε CNF:
  - A1. *Ζώο*(*F*(*x*)) $\vee$ *Αγαπά*(G(*x*), *x*)
  - A2. ¬*Αγαπά*(*x, F*(*x*)) $\vee$ *Αγαπά*(G(*x*), *x*)
  - B. ¬*Ζώο*(*x*) $\vee$ ¬*Σκότωσε*(*x*, *y*) $\vee$ ¬*Αγαπά*(*z*, *x*)
  - Γ. ¬*Ζώο*(*x*) $\vee$ *Αγαπά*(*Τζακ*, *x*)
  - Δ. *Σκότωσε*(*Τζακ*, *Τούνα*) $\vee$ *Σκότωσε*(*Παράξενο*, *Τούνα*)
  - Ε. *Γάτα*(*Τούνα*)
  - ΣΤ. ¬*Γάτα*(*x*) $\vee$ *Ζώο*(*x*)
  - ¬Ζ. ¬*Σκότωσε*(*Παράξενο*, *Τούνα*)

Παράδειγμα 2 (3/3)



Χειρισμός ισότητας (1/2)

- Με χρήση αξιωμάτων:
  - $\forall x \;\; x = x$
  - $\forall x, y \;\; x = y \Rightarrow y = x$
  - $\forall x, y, z \;\; x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$
  - $\forall x, y \;\; x = y \Rightarrow (P_1(x) \Leftrightarrow P_1(y))$
  - $\forall x, y \;\; x = y \Rightarrow (P_2(x) \Leftrightarrow P_2(y))$
  - …
  - $\forall w, x, y, z \;\; w = y \wedge x = z \Rightarrow (F_1(w, x) = F_1(y, z))$
  - $\forall w, x, y, z \;\; w = y \wedge x = z \Rightarrow (F_2(w, x) = F_2(y, z))$

Χειρισμός ισότητας (2/2)

- Με πρόσθετους κανόνες συμπερασμού.
  - Εάν Unify(x, z) = θ και $m_n[z]$ είναι ένα λεκτικό που περιέχει το z:
  - Αποδιαμόρφωση

$$\frac{x = y, \qquad m_1 \vee \ldots \vee m_n[z]}{m_1 \vee \ldots \vee m_n\left[\textsc{Subst}(\theta, y)\right]}$$

  - Παραδιαμόρφωση:

$$\frac{l_1 \vee \ldots \vee l_k \vee x = y, \qquad m_1 \vee \ldots \vee m_n\left[z\right]}{\textsc{Subst}\left(\theta,\ l_1 \vee \ldots \vee l_k \vee m_1 \vee \ldots \vee m_n\left[y\right]\right)}$$

- Με έναν εκτεταμένο αλγόριθμο ενοποίησης.

Στρατηγικές ανάλυσης

- Προτίμηση μοναδιαίων προτάσεων
  - Οδηγεί σε συμπερασμούς που παράγουν μικρότερες προτάσεις.
- Σύνολο υποστήριξης
  - Αρχικοποιείται με το αρχικό αρνητικό ερώτημα
- Ανάλυση εισόδου
  - Η μία πρόταση είναι πάντα εκ των αρχικών.
  - Γραμμική ανάλυση: Επιτρέπει επιπλέον συνδυασμούς προτάσεων με προγόνους τους.
- Υπαγωγή
  - Απαλοιφή νέων προτάσεων που είναι εξειδικεύσεις υπαρχουσών.

Αποδείκτες θεωρημάτων

- Εξαγωγή συμπερασμάτων με πλήρη λογική πρώτης τάξης.
  - Ευρετικές μέθοδοι αναζήτησης

- Εφαρμογές:
  - Απόδειξη θεωρημάτων στα μαθηματικά.
  - Επαλήθευση υλικού / λογισμικού.
  - Σύνθεση υλικού / λογισμικού.

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης