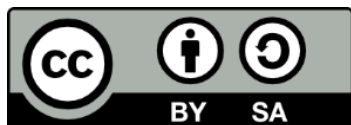


ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

Ενότητα 12: Δημοπρασίες ανερχόμενων και κατερχόμενων προσφορών

Ρεφανίδης Ιωάννης

Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



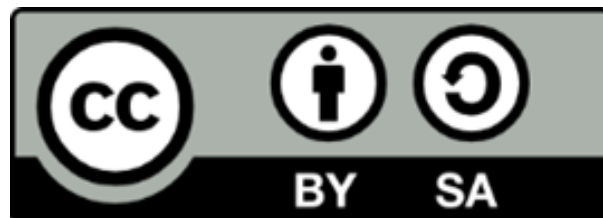
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Auctions

Δημοπρασίες

Γενικά (1/2)

- Υπάρχουν δημοπρασίες για σχεδόν κάθε είδος αγαθού που μπορεί να πουληθεί.
 - Έργα τέχνης (Sotheby's, Christie's)
 - Δημοπρασίες κατασχεμένων αυτοκινήτων, σπιτιών κ.λ.π.
 - Δημοπρασίες για δημόσια έργα
 - Δημοπρασίες για εισιτήρια σε αγώνες, παραστάσεις, αεροπορικά εισιτήρια κλπ
 - Δημοπρασίες ομολόγων
- Μια τυπική δημοπρασία χαρακτηρίζεται από έναν πωλητή και πολλούς υποψήφιους αγοραστής.
 - Ο πωλητής δεν γνωρίζει πόσα είναι διατεθειμένος να πληρώσει κάθε αγοραστής.

Γενικά (2/2)

- Ο πωλητής μπορεί να πουλά μόνο μια μονάδα (π.χ. έναν πίνακα ζωγραφικής) ή πολλές μονάδες, όπως π.χ. ένα σύνολο αεροπορικών εισιτηρίων ή τα δωμάτια ενός ξενοδοχείου.
 - Υπάρχουν περιπτώσεις δημοπρασιών όπου ο πωλητής πουλά πολλά διαφορετικά είδη.
 - Η κατάσταση περιπλέκεται περισσότερο εάν οι παίκτες μπορούν να ζητήσουν συνδυασμούς των προϊόντων.
 - Η κατάσταση περιπλέκεται ακόμη περισσότερο εάν οι δημοπρασίες έχουν διαφορετικό χρονικό ορίζοντα λήξης.
- Υπάρχουν πολλά είδη δημοπρασιών: Τις περισσότερες φορές αυτός που προσφέρει το μεγαλύτερο ποσό κερδίζει τη δημοπρασία.
- Οι διάφορες δημοπρασίες διαφέρουν κυρίως σε δύο πράγματα:
 - Πώς καθορίζεται η καλύτερη προσφορά.
 - Πόσο πρέπει να πληρώσει αυτός που κερδίζει την δημοπρασία.

Δημοπρασίες ανερχόμενων προσφορών

- Η πιο κοινή δημοπρασία είναι η δημοπρασία ανερχόμενων προσφορών (ascending-bid auction).
- Αυτή ξεκινά από μια χαμηλή τιμή και κάθε παίκτης μπορεί να αυξήσει την τιμή.
 - Συνήθως υπάρχει ελάχιστο/συγκεκριμένο ποσό/ποσοστό αύξησης.
- Η δημοπρασία τερματίζει όταν δεν υπάρχει κανείς παίκτης διατεθειμένος να αυξήσει την τιμή.
- Ο παίκτης που έκανε την τελευταία αύξηση κερδίζει την δημοπρασία και πληρώνει το τελικό ποσό.
 - Sotheby's, δημοπρασίες ακινήτων, Travel.com κλπ
- Οι δημοπρασίες αυτές λέγονται και *Αγγλικές δημοπρασίες* (English auctions).

Δημοπρασίες κατερχόμενων προσφορών

- Στις δημοπρασίες αυτές ξεκινάμε από μια πολύ υψηλή τιμή και προοδευτικά αυτή ελαττώνεται από τον διοργανωτή της δημοπρασίας.
- Ο πρώτος παίκτης που θα δεχθεί μια τιμή κερδίζει τη δημοπρασία στην τιμή αυτή.
- Η δημοπρασία αυτή ονομάζεται *Ολλανδική δημοπρασία* (Dutch auction).
 - Ο μηχανισμός αυτός χρησιμοποιείται στη μεγαλύτερη παγκοσμίως αγορά χονδρικής πώλησης λουλουδιών στο Άμστερνταμ.

Δημοπρασίες σφραγισμένων προσφορών

- Στις δημοπρασίες σφραγισμένων προσφορών (sealed auctions) οι συμμετέχοντες αποστέλλουν έναν φάκελο με την προσφορά τους στον διοργανωτή.
- Ο παίκτης με τη μεγαλύτερη προσφορά κερδίζει την δημοπρασία.
- Υπάρχουν δύο παραλλαγές αυτών των δημοπρασιών:
 - Στις δημοπρασίες πρώτης τιμής (first-price auction) ο παίκτης που κέρδισε πληρώνει το ποσό της δικής του προσφοράς.
 - Στις δημοπρασίες δεύτερης τιμής (second-price auction) ο παίκτης που κέρδισε τη δημοπρασία αλλά πληρώνει το ποσό της δεύτερης μεγαλύτερης προσφοράς.
- Υπάρχει μεγάλη ομοιότητα μεταξύ της δημοπρασίας ανερχόμενης τιμής και της δημοπρασίας σφραγισμένων προσφορών δεύτερης τιμής.
- Παρόμοια μεταξύ της δημοπρασίας κατερχόμενης τιμής και της δημοπρασίας σφραγισμένων προσφορών πρώτης τιμής.

Παραδοχές

- Στα επόμενα θα θεωρήσουμε την εξής απλή κατάσταση δημοπρασίας:
 - Υπάρχει μία μονάδα ενός προϊόντος για πώληση.
 - Υπάρχουν δύο υποψήφιοι αγοραστές, οι A και B.
 - Κάθε ένας έχει δύο δυνατούς διαφορετικούς τύπους, τον **τύπο 1** και τον **τύπο 2**, με ίση πιθανότητα εμφάνισης ($p=1/2$).
 - Το ανώτερο ποσό που είναι διατεθειμένος να δώσει ένας αγοραστής τύπου 1 είναι θ ενώ για έναν αγοραστή τύπου 2 είναι μ , όπου $\theta > \mu$.
 - Εάν το προϊόν πουληθεί στην τιμή p , το όφελος κάθε τύπου παίκτη θα είναι $\theta - p$ και $\mu - p$ αντίστοιχα.
 - Ο πωλητής ενδιαφέρεται να μεγιστοποιήσει τα κέρδη του.

Δημοπρασία δεύτερης τιμής (1/2)

- Το βασικό χαρακτηριστικό της δημοπρασίας δεύτερης τιμής είναι ότι έχει κυρίαρχη στρατηγική:
 - Κάθε παίκτης προσφέρει το μέγιστο που είναι διατεθειμένος να πληρώσει.
 - Κανείς παίκτης δεν έχει λόγο να προσφέρει είτε λίγο λιγότερα, είτε λίγο περισσότερα.
 - Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι γενικό, δεν εξαρτάται από το πλήθος των παικτών, από τους δυνατούς τύπους κάθε παίκτη ούτε από τις πιθανότητες εμφάνισής τους.

Δημοπρασία δεύτερης τιμής (2/2)

- Θα εξετάσουμε την πιθανότητα ένας παίκτης να κερδίσει τη δημοπρασία και το αναμενόμενο ποσό που θα πληρώσει.
- Έστω ένας παίκτης τύπου 1. Αυτός κερδίζει τη δημοπρασία σίγουρα αν ο δεύτερος παίκτης είναι τύπου 2, και με πιθανότητα 50% εάν ο δεύτερος παίκτης είναι και αυτός τύπου 1.
- Άρα ένας παίκτης τύπου 1 κερδίζει τη δημοπρασία με πιθανότητα:
 - $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0.75$
- Το αναμενόμενο ποσό που θα πληρώσει είναι:
 - $\frac{1}{2} \cdot \mu + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \theta = \frac{1}{2}(\mu + \theta/2)$
- Το αναμενόμενο κέρδος είναι:
 - $0.75 \cdot \theta - \frac{1}{2}(\mu + \theta/2) = (\theta - \mu)/2$
- Παρόμοια, για έναν παίκτη τύπου 2 βρίσκουμε ότι το αναμενόμενο ποσό που θα πληρώσει είναι $\mu/4$ και το αναμενόμενο κέρδος του είναι 0.

Δημοπρασία πρώτης τιμής (1/10)

- Στις δημοπρασίες αυτές δεν υπάρχει κυρίαρχη στρατηγική.
 - Η καλύτερη απάντηση ενός παίκτη εξαρτάται πάντα από την επιλογή του αντιπάλου.
- Άρα πρέπει να βρούμε σημεία ισορροπίας Bayes-Nash.
- Μιας και πρόκειται για συμμετρικό παιχνίδι, θα ψάξουμε μόνο για συμμετρικά σημεία ισορροπίας.
- Έστω p μια στρατηγική για έναν παίκτη τύπου 1 και q μια στρατηγική για παίκτη τύπου 2.
- Θα ψάξουμε λοιπόν για ισορροπίες της μορφής (p,q,p,q) , όπου:
 - p είναι η καλύτερη απάντηση του παίκτη A τύπου 1, εάν οι δύο τύποι του παίκτη B επιλέξουν αντίστοιχα (p,q) .
 - Παρόμοια για τις άλλες τρεις στρατηγικές του παραπάνω συνδυασμού στρατηγικών.

Δημοπρασία πρώτης τιμής (2/10)

- Είναι φανερό ότι σε μια ισορροπία (p, q, p, q) πρέπει να ισχύει $q = \mu$ για τους παίκτες τύπου 2.
 - Εάν ένας παίκτης τύπου 2 προσφέρει τιμή $q < \mu$, θα βγει χαμένος εφόσον ο αντίπαλος προσφέρει τιμή q' τέτοια ώστε $q < q' < \mu$.
- Άρα η ισορροπία θα πρέπει να είναι της μορφής (p, μ, p, μ) .
- Από την άλλη πλευρά, μπορούμε εύκολα να δούμε για τους παίκτες τύπου 1 ότι πρέπει να ισχύει $p < \theta$.
 - Αν ένας παίκτης τύπου 1 προσφέρει $p = \theta$, το καθαρό όφελός του είναι 0. Αντίθετα αν προσφέρει κάτι λιγότερο από θ , κάθε φορά που ο αντίπαλος είναι τύπου 2, ο παίκτης τύπου 1 θα έχει κάποιο θετικό όφελος.

Δημοπρασία πρώτης τιμής (3/10)

- Προχωρώντας το συλλογισμό μπορούμε να βρούμε ότι ένας παίκτης τύπου 1 πρέπει να επιλέξει μια μικτή στρατηγική, και μάλιστα συνεχούς μορφής (κατανομή πιθανότητας για όλες τις τιμές του p εντός κάποιου διαστήματος).
 - Αν ένας παίκτης, π.χ. ο A, επιλέξει συγκεκριμένη τιμή για το p , π.χ. $p_A=p$, τότε ο παίκτης B θα επιλέξει $p_B=p+1$, κερδίζοντας περισσότερα.
 - Τότε όμως ο παίκτης A έχει καλύτερη στρατηγική $p_A'=p+2$, κοκ.

Δημοπρασία πρώτης τιμής (4/10)

- Έστω ότι η κοινή για τους παίκτες στρατηγική p είναι η εξής:
 - Κάθε παίκτης τύπου 1 επιλέγει μια προσφορά b από ένα διάστημα $[b_1, b_2]$.
 - Συμβολίζουμε με $P(\text{bid} \leq b)$ τη σωρευτική πιθανότητα η προσφορά ενός παίκτη να βρίσκεται στο διάστημα $[b_1, b]$
 - Σε τέτοιες κατανομές πιθανότητας, η πιθανότητα η προσφορά να πάρει μια συγκεκριμένη τιμή, $P(\text{bid} = b)$, με δεδομένο ότι το σύνολο των τιμών είναι άπειρο, είναι πάντα 0.
- Το διάστημα $[b_1, b_2]$ και τη συνάρτηση $P(\text{bid} \leq b)$ απομένει να τα προσδιορίσουμε.

Δημοπρασία πρώτης τιμής (5/10)

- Μπορούμε εύκολα να βρούμε ότι το αριστερό άκρο του διαστήματος είναι $b_1 = \mu$.
 - Πράγματι, όταν ένας παίκτης τύπου 1 επιλέξει $b = b_1$, είναι σίγουρο ότι η μόνη περίπτωση να κερδίσει τη δημοπρασία είναι όταν ο αντίπαλός είναι τύπου 2 (μιας και η πιθανότητα ο αντίπαλος να είναι τύπου 1 και να επιλέξει και αυτός $b = b_1$ είναι μηδέν).
- Μάλιστα, για να μην μοιραστεί τα κέρδη, σε αυτή την περίπτωση το b μπορεί να θεωρηθεί οριακά λίγο πάνω από το μ , έτσι ώστε ένας παίκτης τύπου 1 που επιλέγει $b = b_1$ να κερδίζει πάντα έναν αντίπαλο παίκτη τύπου 2.
- Τα αναμενόμενα κέρδη του παίκτη τύπου 1 στην περίπτωση $b = b_1 = \mu$ είναι λοιπόν:

$$\pi(b = \mu, \text{τύπος} = 1) = \frac{1}{2}(\theta - \mu)$$

Δημοπρασία πρώτης τιμής (6/10)

- Γνωρίζουμε όμως ότι για να επιλέξει ένας παίκτης τύπου 1 μικτή στρατηγική, θα πρέπει το αναμενόμενο κέρδος του να είναι το ίδιο για οποιαδήποτε καθαρή στρατηγική και αν επέλεγε.
- Έστω λοιπόν ότι ο παίκτης A τύπου 1 επιλέγει καθαρή στρατηγική $b \in [b_1, b_2]$.
 - Ο παίκτης B επιλέγει τη μικτή στρατηγική που περιγράψαμε για τον τύπο 1 και $q = \mu$ για τον τύπο 2.
- Ο A κερδίζει τη δημοπρασία όταν:
 - ο B είναι τύπου 2, με πιθανότητα $\frac{1}{2}$.
 - ο B είναι τύπου 1 και η προσφορά που επέλεξε είναι $b_B < b$.
 - Η πιθανότητα να συμβεί αυτό είναι $\frac{1}{2} \cdot P(b_B \leq b)$
- Άρα το αναμενόμενο όφελος του A σε αυτή την περίπτωση είναι:

$$\pi(b, \text{τύπος} = 1) = \frac{1}{2}(\theta - b) + \frac{1}{2}P(\text{bid} \leq b)(\theta - b)$$

Δημοπρασία πρώτης τιμής (7/10)

- Θα πρέπει λοιπόν να ισχύει:

$$\frac{1}{2}(\theta - b) + \frac{1}{2}P(\text{bid} \leq b)(\theta - b) = \frac{1}{2}(\theta - \mu)$$

- Λύνοντας την τελευταία σχέση ως προς $P(\text{bid} \leq b)$ βρίσκουμε:

$$P(\text{bid} \leq b) = \frac{b - \mu}{\theta - b}$$

- Η μέγιστη τιμή του b , δηλαδή η τιμή b_2 , θα είναι αυτή για την οποία ισχύει $P(\text{bid} \leq b_2) = 1$. Λύνοντας ως προς b_2 βρίσκουμε:

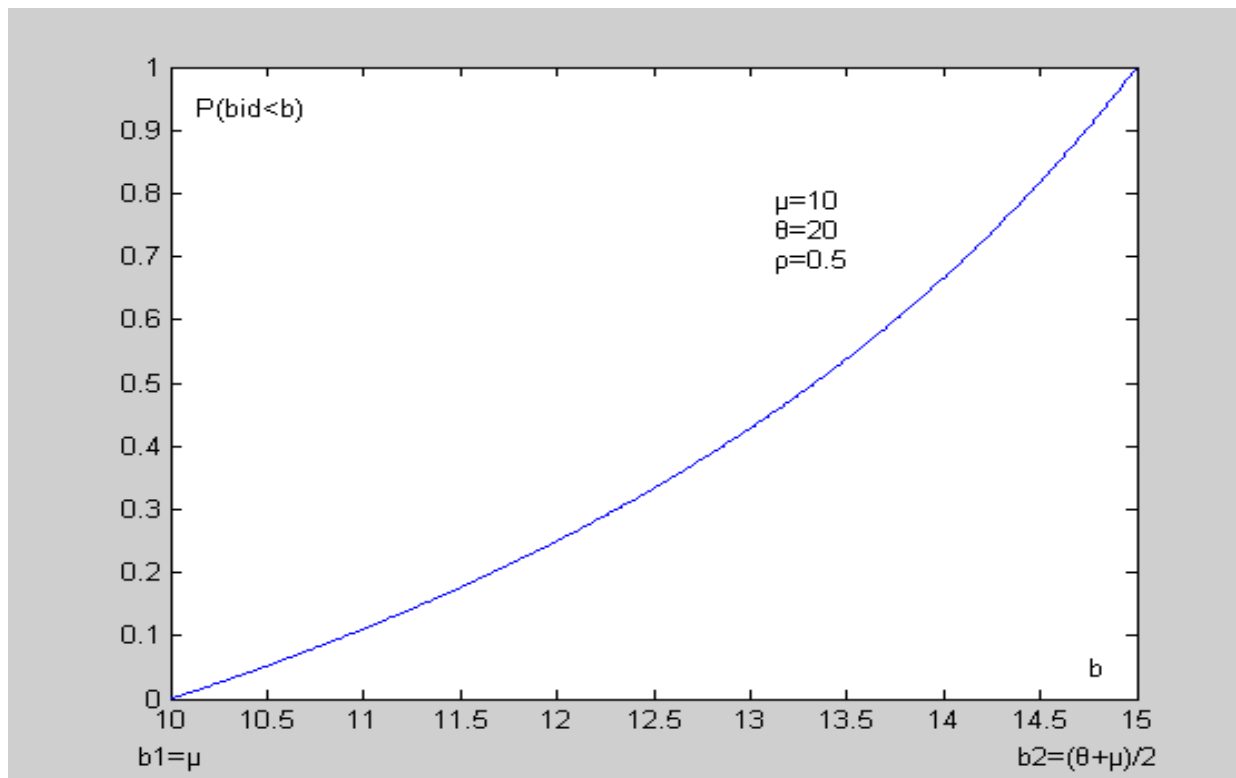
$$b_2 = \frac{\theta + \mu}{2}$$

Δημοπρασία πρώτης τιμής (8/10)

- Το συμπέρασμα στο οποίο καταλήξαμε είναι το εξής:
 - Σε δημοπρασία πρώτης τιμής με ισοπίθανους παίκτες, υπάρχει σημείο ισορροπίας Bayes-Nash, όπου ο παίκτης τύπου 2 επιλέγει καθαρή στρατηγική ίση με μ , ενώ ο παίκτης τύπου 1 επιλέγει συνεχή μικτή στρατηγική στο διάστημα μεταξύ μ και $(\theta+\mu)/2$ με σωρευτική πιθανότητα $P(\text{bid}<b)=(b-\mu)/(\theta-b)$.
- Το παραπάνω σημείο ισορροπίας Bayes-Nash είναι και το μοναδικό.
- Στις δύο επόμενες διαφάνειες φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $P(\text{bid}<b)$ και $p(\text{bid}=b)$ για τυπικές τιμές $\mu=10$ και $\theta=20$.

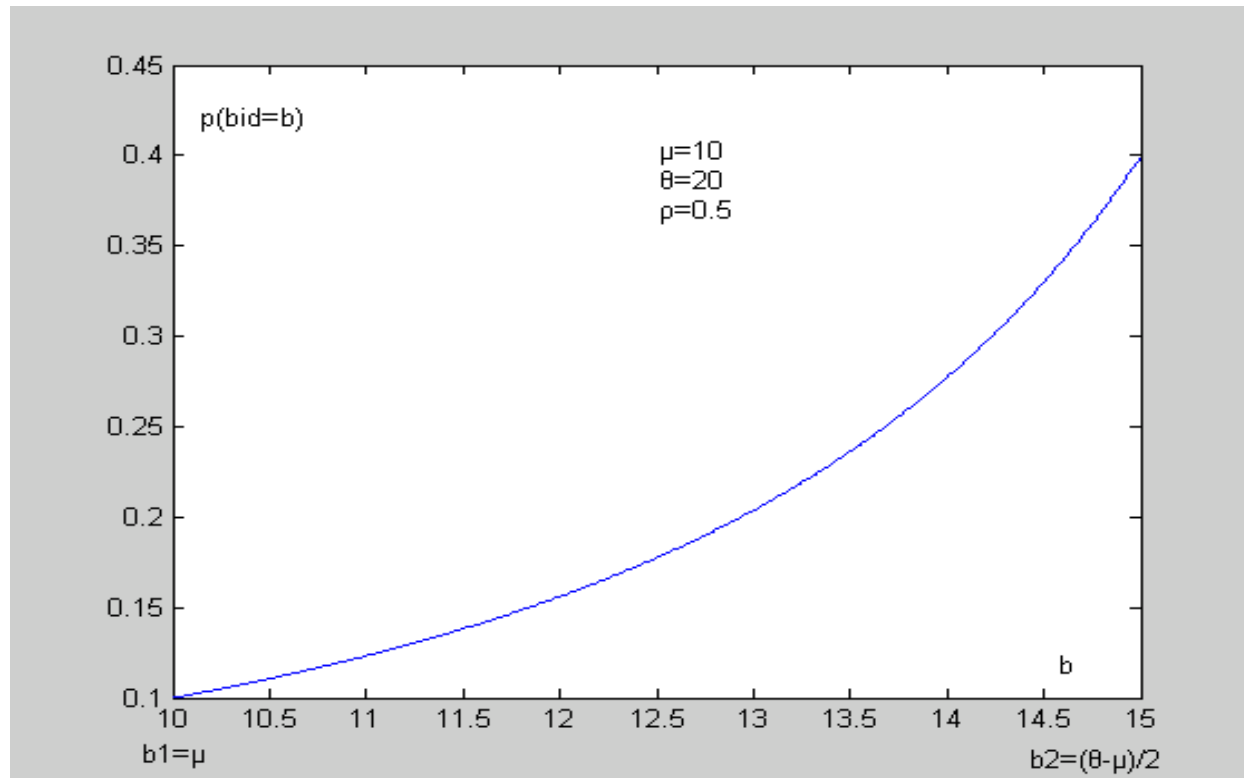
Δημοπρασία πρώτης τιμής (9/10)

- Σωρευτική πιθανότητα η προσφορά να είναι μικρότερη από μια τιμή b .



Δημοπρασία πρώτης τιμής (10/10)

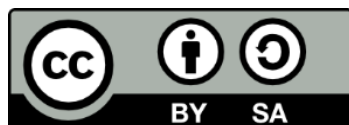
- Κατανομή πιθανότητας $p(\text{bid}=b)$.



Παρατηρήσεις

- Παρατηρούμε ότι το αναμενόμενο όφελος για τους δύο τύπους παικτών:
 - Για τον παίκτη τύπου 1 είναι $(\theta-\mu)/2$
 - Για τον παίκτη τύπου 2 είναι 0.
- είναι το ίδιο και για τις δύο δημοπρασίες (πρώτης και δεύτερης τιμής).
- Το ίδιο συμβαίνει και με τις πιθανότητες νίκης.
- Άρα και τα αναμενόμενα έσοδα του διοργανωτή της δημοπρασίας είναι τα ίδια και στους δύο τύπους δημοπρασίας.
- Για το λόγο αυτό, οι δημοπρασίες πρώτης και δεύτερης τιμής χαρακτηρίζονται ως ισοδύναμες ως προς τα έσοδα (revenue equivalent).

Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ