ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

Ενότητα 11: Σχεδίαση μηχανισμών

Ρεφανίδης Ιωάννης

Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Mechanism design

Σχεδίαση μηχανισμών

Εισαγωγή

- Η σχεδίαση μηχανισμών αφορά τη δημιουργία παιχνιδιών για να παίξουν κάποιοι παίκτες με τέτοιο τρόπο, ώστε να μεγιστοποιηθεί το όφελος αυτού που σχεδιάζει/διοργανώνει το παιχνίδι.
- Οι παίκτες και οι προτιμήσεις τους είναι δεδομένες.
- Ο σχεδιαστής καθορίζει τις διαθέσιμες ενέργειες στους παίκτες και το αποτέλεσμα τους για κάθε συνδυασμό τους.
  - ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι παίκτες δεν είναι υποχρεωμένοι να παίξουν!
- Στο παιχνίδι οι παίκτες θα επιλέξουν ένα σημείο ισορροπίας.

Παράδειγμα: Το πρόβλημα των κοινών

- Η κυβέρνηση θα μπορούσε να θέσει τους κανόνες χρήσης των κοινών πόρων ως εξής:
  - Εκδοχή 1: Στην αρχή κάθε χρόνου η κυβέρνηση εκχωρεί το αποκλειστικό δικαίωμα χρήσης του πόρου για έναν χρόνο, στον ενδιαφερόμενο που θα κάνει την καλύτερη προσφορά.
  - Εκδοχή 2: Η κυβέρνηση, κατόπιν πλειοδοτικού διαγωνισμού, εκχωρεί το δικαίωμα χρήσης του κοινόχρηστου πόρου για πάντα στον ενδιαφερόμενο που θα πλειοδοτήσει.
    - Ιδιωτικοποίηση
  - Εκδοχή 3: Η κυβέρνηση επιτρέπει σε κάθε ενδιαφερόμενο να χρησιμοποιεί τον πόρο, θέτει όμως ένα τέλος χρήσης ανάλογο με τον βαθμό χρήσης.
- Κάθε μία από τις παραπάνω εκδοχές θα έχει ένα διαφορετικό όφελος για την κυβέρνηση, και άρα πρέπει να βρει αυτή που τη συμφέρει περισσότερο.

Παράδειγμα: Δημοπρασία με έναν παίκτη (1/2)

- Έστω ότι ένας οίκος ενδιαφέρεται να πουλήσει ένα πανάκριβο έργο τέχνης και υπάρχει μόνο ένας που θα μπορούσε να το αγοράσει.
- Το πρόβλημα είναι ότι ο οίκος δεν γνωρίζει πόσα χρήματα θα ήταν διατεθειμένος ο αγοραστής να πληρώσει.
- Έστω ότι υπάρχουν δύο ενδεχόμενα:
  - Ο αγοραστής να είναι φανατικός λάτρης της τέχνης και άρα είναι διατεθειμένος να πληρώσει ένα μεγάλο ποσό.
  - Ο αγοραστής είναι απλός θαυμαστής και άρα είναι διατεθειμένος να πληρώσει ένα σημαντικά μικρότερο ποσό.

Παράδειγμα: Δημοπρασία με έναν παίκτη (2/2)

- Μερικές εκδοχές για το πώς θα μπορούσε να διοργανωθεί η δημοπρασία είναι οι εξής:
  – Εκδοχή 1: Ο οίκος θέτει μια μεγάλη τιμή, που μόνο ένας φανατικός λάτρης θα ήταν διατεθειμένος να τη δεχτεί.
  – Εκδοχή 2: Ο οίκος θέτει μια μικρότερη τιμή, που θα μπορούσε να τη δεχτεί και ένας απλός θαυμαστής.
    - Όχι όμως και ένας κοινός άνθρωπος...
  – Εκδοχή 3: Ο οίκος θέτει δύο τιμές, μια μεγάλη και μια μικρή. Η μεγάλη τιμή εγγυάται ότι ο ενδιαφερόμενος θα πάρει το έργο σίγουρα, ενώ η μικρή επιτρέπει στον οίκο, με κάποια γνωστή πιθανότητα, να αποσύρει το έργο από τη δημοπρασία.

Παράδειγμα: Δημοπρασία με πολλούς παίκτες

- Έστω ότι ο οίκος θέτει το έργο σε ανοικτή δημοπρασία.
- Προφανώς ο οίκος θέλει να πουλήσει το έργο στον ενδιαφερόμενο που είναι διατεθειμένος να δώσει το μεγαλύτερο ποσό και για όλο το ποσό αυτό.
- Από την άλλη όμως, κανείς υποψήφιος αγοραστής δεν θέλει να αποκαλύψει το ποσό που είναι διατεθειμένος να πληρώσει, ελπίζοντας να αγοράσει το έργο σε χαμηλότερη τιμή.
- Μερικές από τις δυνατές εκδοχές είναι οι εξής:
  - Εκδοχή 1: Οι ενδιαφερόμενοι κάνουν τις προσφορές τους και το έργο κατοχυρώνεται σε αυτόν που θα υποβάλλει την μεγαλύτερη προσφορά και για την τιμή αυτή (first-price auction).
  - Εκδοχή 2: Οι ενδιαφερόμενοι κάνουν τις προσφορές τους και το έργο κατοχυρώνεται σε αυτόν που θα κάνει την μεγαλύτερη προσφορά, για την τιμή όμως της αμέσως επόμενης προσφοράς (second-price auction).

Δημοπρασία με ένας αγοραστή

Περιγραφή

- Θα εξετάσουμε αναλυτικά το παράδειγμα της δημοπρασίας με έναν παίκτη, για τον οποίο δεν είναι γνωστή η αξία που δίνει στο έργο.
- Έστω θ η αξία για έναν φανατικό λάτρη και μ η αξία για έναν απλό θαυμαστή.
  - $\theta > \mu > 0$
    - ΠΡΟΣΟΧΗ: Για απλοποίηση εκφράζουμε την ωφέλεια κάθε παίκτη σε χρηματικά ποσά.
- Έστω ρ η πιθανότητα ο αγοραστής να είναι φανατικός λάτρης.

- Θα εξετάσουμε πώς θα έπρεπε ο οίκος να πουλήσει το έργο στον υποψήφιο αγοραστή.

Περίπτωση γνωστού αγοραστή

- Εάν ο οίκος γνώριζε ότι ο αγοραστής είναι φανατικός λάτρης, θα έθετε την τιμή πώλησης σε θ.
- Παρόμοια, εάν ο οίκος γνώριζε ότι ο αγοραστής είναι απλός θαυμαστής, θα έθετε την τιμή πώλησης σε μ.
  - Για να είναι σίγουρος ότι ο αγοραστής θα δεχθεί την προσφορά, κανονικά θα έπρεπε να θέσει την τιμή πώλησης ελαφρώς κάτω από τις τιμές θ και μ.
- Εάν λοιπόν ο οίκος έχει τρόπο να «μαντέψει» τον τύπο του αγοραστή, το αναμενόμενο κέρδος του (πριν μαντέψει...) είναι:
  - $\pi_{max}=\rho\cdot\theta+(1-\rho)\cdot\mu$
- Το παραπάνω αναμενόμενο κέρδος είναι το μέγιστο που μπορεί να πετύχει ο οίκος.

Ερώτηση στον αγοραστή

- Μια «θεωρητική» εκδοχή θα ήταν να ρωτηθεί ο αγοραστής εάν είναι φανατικός λάτρης ή απλός θαυμαστής.
  - Ανάλογα με την απάντησή του η τιμή πώλησης θα τεθεί σε θ ή μ αντίστοιχα.
- Ο αγοραστής γνωρίζοντας αυτή τη συνέπεια δεν έχει κανέναν λόγο να ομολογήσει ότι είναι φανατικός λάτρης (εάν είναι), ώστε σε κάθε περίπτωση να πληρώσει μόνο μ.
  - $μ<π_{max}$

Μία τιμή

- Μια άλλη εκδοχή θα ήταν να τεθεί <u>μία μόνο</u> τιμή.
- Η μόνη «λογική» τιμή που θα μπορούσε να ελκύσει και τους δύο παίκτες είναι η μ.
  - Σε αυτή την περίπτωση, τα έσοδα του οίκου είναι μ, ενώ το κέρδος του αγοραστή είναι θ-μ ή 0, ανάλογα με τον τύπο του.
- Εάν ο οίκος θέσει σταθερή τιμή μεγαλύτερη από μ, τότε αυτή θα πρέπει να είναι θ.
  - Σε αυτή την περίπτωση, μόνο ο φανατικός λάτρης θα αγοράσει το έργο, με αναμενόμενα έσοδα για τον οίκο ρ·θ ($<\pi_{max}$).

Συνδυασμός τιμών (1/2)

- Ο οίκος μπορεί να προτείνει δύο τιμές, μια υψηλή p ($p \leq \theta$) στην οποία η συναλλαγή είναι εξασφαλισμένη, και μια χαμηλή q ($q<p$, $q \leq \mu$), στην οποία η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί η συναλλαγή είναι Q.
- Ένας φανατικός λάτρης θα επιλέξει τη βέβαιη επιλογή, εάν ισχύει:
  - $(\theta-p) \geq Q(\theta-q)$ ή ισοδύναμα:
- Παρόμοια, ένας απλός θαυμαστής θα επέλεγε την αβέβαιη περίπτωση εάν:
  - $Q(\mu-q) \geq \mu-p$ ή ισοδύναμα:
- Τελικά, για να επιλέγει ένας φανατικός λάτρης την βέβαιη περίπτωση και ένας απλός θαυμαστής την αβέβαιη, πρέπει:

$$\theta \geq \frac{p-Qq}{1-Q} \qquad \mu \leq \frac{p-Qq}{1-Q} \qquad \theta \geq \frac{p-Qq}{1-Q} \geq \mu$$

Συνδυασμός τιμών (2/2)

- Η τελευταία ανισότητα ονομάζεται *περιορισμός συμβατότητας κινήτρων* (incentive-compatibility constraint).
  - Κάθε παίκτης επιλέγει την επιλογή που «σχεδιάστηκε» για αυτόν.
- Φυσικά πρέπει να ισχύουν και οι ανισότητες:
  - $\theta \geq p$, $\mu \geq q$
  - Οι παραπάνω ανισότητες ονομάζονται περιορισμοί ατομικής ορθολογικότητας (individual-rationality constraint).
- Εάν ισχύουν όλοι οι παραπάνω περιορισμοί, τότε τα αναμενόμενα έσοδα του οίκου είναι:
  - $E\pi = \rho \cdot p + (1-\rho) \cdot Q \cdot q$
- Το πρόβλημα σχεδίασης μηχανισμού αναδιατυπώνεται πλέον ως εξής:
  - Βρείτε τα p, q και Q τα οποία πληρούν τους παραπάνω περιορισμούς και μεγιστοποιούν τα αναμενόμενα έσοδα του οίκου.

Ανάλυση (1/3)

- Από τον περιορισμό $\theta \geq \frac{p - Qq}{1 - Q}$ και μετά από λίγες πράξεις προκύπτει ότι θ>p.
  - Πράγματι:

$$\theta \geq \frac{p - Qq}{1 - Q} \Rightarrow \theta - \theta \cdot Q \geq p - Q \cdot q$$

  - οπότε με δεδομένο ότι θ>q, άρα –θQ<-qQ προκύπτει ότι θ>p.
- Άρα ο περιορισμός αυτός αρκεί για να ικανοποιήσουμε και τον περιορισμό της ατομικής ορθολογικότητας για την περίπτωση του φανατικού λάτρη.
- Με δεδομένο ότι όσο αυξάνει το p αυξάνει και η ποσότητα $\frac{p - Qq}{1 - Q}$ μπορούμε να αυξήσουμε το p έως ότου συμβεί:

$$\theta = \frac{p - Qq}{1 - Q}$$

- Έτσι μεγιστοποιούμε τα κέρδη, χωρίς να διακινδυνεύουμε να αποσυρθεί ο φανατικός λάτρης της τέχνης!

Ανάλυση (2/3)

- Από την άλλη, είναι εύκολο να δούμε ότι η χαμηλή τιμή q μπορεί να αυξηθεί μέχρι την τιμή μ, χωρίς να παραβιάζει κανέναν περιορισμό.
  - Πράγματι, αν μ=q τότε ο περιορισμός

$$\frac{p-Qq}{1-Q} \geq \mu$$

    εκφυλίζεται στον p>μ που προφανώς ισχύει.

- Τέλος από τις σχέσεις q=μ και $\theta = \dfrac{p-Qq}{1-Q}$ προκύπτει:

$$p = Q\mu + (1-Q)\theta$$

Ανάλυση (3/3)

- Αντικαθιστώντας στην σχέση που μας δίνει το αναμενόμενο κέρδος του οίκου:
  - $E\pi = \rho \cdot p + (1-\rho) \cdot Q \cdot q$
- βρίσκουμε:
  - $E\pi = Q\mu + (1-Q)\rho\theta$
- Στην παραπάνω σχέση η μόνη παράμετρος είναι η Q, ενώ όλοι οι περιορισμοί ικανοποιούνται.
- Η παραπάνω σχέση είναι γραμμική, άρα δεν έχει ακρότατο!
- Ωστόσο, με δεδομένο ότι $0 \leq Q \leq 1$, μπορούμε να βρούμε ακρότατα για Q=0 και για Q=1 :
  - Εάν $\mu < \rho\theta$, τότε το μέγιστο είναι για Q=0. Σε αυτή την περίπτωση ουσιαστικά ο οίκος αρνείται να πουλήσει στον απλό θαυμαστή (και άρα $p=\theta$).
  - Εάν $\mu > \rho\theta$, τότε το μέγιστο είναι για Q=1. Σε αυτή την περίπτωση ο οίκος πουλά και στους δύο, στην τιμή $p=q=\mu$.

Συμπεράσματα

- Είδαμε τελικά ότι τα κέρδη του οίκου μεγιστοποιούνται όταν δεν υπάρχει αβεβαιότητα (Q=0 ή Q=1).
- Άρα ο μηχανισμός που σχεδιάσαμε αποδείχθηκε ισοδύναμος ενός μηχανισμού με σταθερή τιμή, είτε θ ή μ, ανάλογα με τη σχέση των ποσοτήτων μ και ρθ.

- Ο μηχανισμός συνδυασμού δύο τιμών, εφόσον αυτές πληρούν τους δύο περιορισμούς, έχει και μια ακόμη ιδιότητα:
  - Οι παίκτες δεν έχουν πλέον λόγο να κρύβουν τον τύπο τους.
  - Μπορούν να τον ανακοινώσουν στον οίκο και βάσει του τύπου τους να επιλέξουν μια από τις δύο επιλογές.
- Ένας τέτοιες μηχανισμός, που έχει ξεχωριστές επιλογές ειδικά σχεδιασμένες για διαφορετικούς τύπους παικτών, ονομάζεται μηχανισμός άμεσης αποκάλυψης.
  - direct revelation mechanism

Revelation principle

Αρχή της αποκάλυψης

Παιχνίδια ενός παίκτη (1/3)

- Έστω ότι έχουμε έναν μόνο παίκτη με δύο τύπους, θ και μ.
  - Έστω ρ η πιθανότητα να είναι τύπου θ.
- Ένας μηχανισμός είναι ένα σύνολο κανόνων (το παιχνίδι) που καθορίζει ποιες ενέργειες μπορεί να εκτελέσει ο παίκτης.
- Αυτό το οποίο είναι δεδομένο εξαρχής είναι η συνάρτηση απολαβής του παίκτη, η οποία καθορίζει το όφελός του ανάλογα με τον τύπο του και τη στρατηγική που επιλέγει.
  - Για παράδειγμα, με π(s,θ) συμβολίζουμε το όφελος του παίκτη εάν ο τύπος του είναι θ και επιλέξει τη στρατηγική s.
- Έστω ότι για ένα συγκεκριμένο μηχανισμό υπάρχουν μια στρατηγική s_θ για τον τύπο θ του παίκτη και μια στρατηγική s_μ για τον τύπο μ του παίκτη, έτσι ώστε:
  - $\pi(s_\theta,\theta) \geq \pi(s,\theta)$ για κάθε s
  - $\pi(s_\mu,\mu) \geq \pi(s,\mu)$ για κάθε s
- Το σύνολο στρατηγικών s_θ, s_μ ονομάζεται *συμβατό με τα κίνητρα* (incentive compatible).

Παιχνίδια ενός παίκτη (2/3)

- Με άλλα λόγια, οι στρατηγικές s_θ και s_μ είναι κυρίαρχες για τους αντίστοιχους τύπους παίκτη.
- Επειδή ωστόσο κανείς παίκτης δεν μπορεί να εξαναγκαστεί να παίξει ένα παιχνίδι, για τις στρατηγικές αυτές θα πρέπει επίσης να ισχύει:
  - $\pi(s_\theta,\theta) \geq \pi_0$
  - $\pi(s_\mu,\mu) \geq \pi_0$
    όπου π_0 το όφελος από το να μην συμμετάσχει καθόλου ο παίκτης στο παιχνίδι.
- Οι τελευταίες ανισότητες ονομάζονται *περιορισμοί ατομικής ορθολογικότητας* (individual-rationality constraints).
- Ο σχεδιαστής μηχανισμών λοιπόν πρέπει να βρει έναν μηχανισμό που να διαθέτει συμβατό με τα κίνητρα σύνολο στρατηγικών και να πληρεί τους περιορισμούς ατομικής ορθολογικότητας, τέτοιο ώστε να μεγιστοποιείται το αναμενόμενο όφελος του σχεδιαστή.

Παιχνίδια ενός παίκτη (3/3)

- Στη σχεδίαση μηχανισμών για παιχνίδια ενός παίκτη αποδεικνύεται το εξής:
  - Για οποιοδήποτε μηχανισμό και μια ανάθεση στρατηγικών για τους διάφορους τύπους του παίκτη η οποία είναι συμβατή με τα κίνητρα και ατομικά ορθολογική, μπορεί να κατασκευαστεί ένας μηχανισμός που βασίζεται απλά στην αποκάλυψη εκ μέρους του παίκτη του τύπου του και ο οποίος παράγει την ίδια ακριβώς αντιστοίχηση όταν οι παίκτες λένε την αλήθεια.
    Έτσι ο σχεδιαστής μηχανισμών μπορεί να ασχοληθεί μόνο με μηχανισμούς άμεσης αποκάλυψης.
- Η παραπάνω αρχή ονομάζεται *αρχή της αποκάλυψης* για παιχνίδια ενός παίκτη (revelation principle I).

Παιχνίδια με πολλούς παίκτες (1/2)

- Έστω ότι έχουμε δύο παίκτες, κάθε ένας από τους οποίους μπορεί να είναι τύπου θ ή τύπου μ.
  - Έστω ρ η πιθανότητα για κάθε παίκτη να είναι τύπου θ.
- Έστω ένα σύνολο στρατηγικών ($s_{1\theta}$,$s_{1\mu}$,$s_{2\theta}$,$s_{2\mu}$) το οποίο αποτελεί σημείο ισορροπίας Bayes-Nash, δηλαδή:
  - Η στρατηγική $s_{1\theta}$ μεγιστοποιεί το αναμενόμενο όφελος του παίκτη 1 τύπου θ, εάν ο αντίπαλος επιλέγει, ανάλογα με τον τύπο του, $s_{2\theta}$ και $s_{2\mu}$ αντίστοιχα.
  - Παρόμοια ισχύουν για τις $s_{1\mu}$, $s_{2\theta}$ και $s_{2\mu}$.
- Έστω λοιπόν ο παρακάτω μηχανισμός άμεσης αποκάλυψης:
  - Κάθε παίκτης φανερώνει τον τύπο του (πριν μάθει τον τύπο του αντιπάλου) και το παιχνίδι οδηγείται στην αντίστοιχη ισορροπία.
  - Είναι φανερό ότι στον παραπάνω μηχανισμό άμεσης αποκάλυψης, κανείς παίκτης δεν έχει λόγο να πει ψέματα!

Παιχνίδια με πολλούς παίκτες (2/2)

- Ισχύει λοιπόν το εξής:
  - Για οποιοδήποτε μηχανισμό και για οποιοδήποτε σημείο ισορροπίας Bayes-Nash αυτού του μηχανισμού, μπορεί να κατασκευαστεί ένας μηχανισμός άμεσης αποκάλυψης ο οποίος παράγει την βέλτιστη αντιστοίχηση ενεργειών για τους παίκτες όταν αυτοί λένε την αλήθεια. Έτσι ο σχεδιαστής μηχανισμών μπορεί να ασχοληθεί μόνο με μηχανισμούς άμεσης αποκάλυψης.
- Η παραπάνω αρχή ονομάζεται *αρχή της αποκάλυψης* για παιχνίδια πολλών παικτών (revelation principle II).

Παράδειγμα: Πώληση μεταβλητής ποσότητας (1/8)

- Έστω ότι μια εταιρεία μπορεί να πουλά μεταβλητές ποσότητες ενός προϊόντος σε υποψήφιους αγοραστές.
    - Για παράδειγμα, δημοπρασίες ομολόγων
- Έστω ότι υπάρχουν δύο τύποι αγοραστών, Α και Β.
    - Μια ποσότητα Q έχει αξία για τον τύπο Α ίση με $2 \cdot (10 \cdot Q - Q^2)$.
    - Η ίδια ποσότητα έχει αξία για τον τύπο Β ίση με $(10 \cdot Q - Q^2)$.
- Το κόστος παραγωγής ανά μονάδα για την εταιρεία είναι 2.
- Έστω ρ η πιθανότητα ένας αγοραστής να είναι τύπου Α.
    - Άρα η πιθανότητα να είναι τύπου Β είναι 1-ρ.

- Η εταιρεία πρέπει να βρει ποια ποσότητα θα πουλήσει σε κάθε αγοραστή και σε ποια τιμή.

Παράδειγμα: Πώληση μεταβλητής ποσότητας (2/8)

- Έστω ότι η εταιρεία γνωρίζει τον τύπο του αγοραστή.
- Εάν αυτός είναι A, τότε η εταιρεία θα πουλήσει το προϊόν στην μέγιστη δυνατή τιμή, η οποία είναι $2\cdot(10\cdot Q-Q^2)$
- Το κέρδος της εταιρείας σε αυτή την περίπτωση είναι:
  – $2\cdot(10\cdot Q-Q^2)-2Q$
- Το κέρδος μεγιστοποιείται για Q=4.5. Για την ποσότητα αυτή η τιμή πώλησης (για το σύνολο της ποσότητας) είναι $P_A=49.5$ και το κέρδος 40.5.

- Εκτελώντας παρόμοιους υπολογισμούς για την περίπτωση ενός γνωστού παίκτη τύπου B βρίσκουμε ότι:
  – Η εταιρεία θα πουλήσει ποσότητα q=4 στην τιμή $P_B=24$ με κέρδος για την εταιρεία 16.

Παράδειγμα: Πώληση μεταβλητής ποσότητας (3/8)

- Η εταιρεία θα μπορούσε να αντιμετωπίσει όλους τους αγοραστές σαν να ήταν τύπου Β, θέτοντας Q=q=4 και $P=P_B=24$.
  – Το κέρδος της εταιρείας ανά αγοραστή θα είναι 16.
- Μια άλλη επιλογή είναι η εταιρεία να αγνοήσει τους αγοραστές τύπου Β και να θεωρήσει ότι όλοι οι αγοραστές είναι τύπου Α, θέτοντας ως μόνη επιλογή την Q=4.5 και $P=P_A=49.5$.
  – Το αναμενόμενο κέρδος της εταιρείας σε αυτή την περίπτωση είναι ρ·40.5.

- Θα προσπαθήσουμε να βρούμε μια ενδιάμεση κατάσταση, όπου η εταιρεία να πουλά και στους δύο τύπους αγοραστών.

Παράδειγμα: Πώληση μεταβλητής ποσότητας (4/8)

- Με βάση την αρχή της αποκάλυψης, γνωρίζουμε ότι μπορούμε να αναζητήσουμε μόνο μηχανισμούς άμεσης αποκάλυψης όπου:
  - Ο παίκτης θα δηλώνει τον τύπο του.
  - Εάν ο τύπος του είναι Α, θα παίρνει ποσότητα Q στην τιμή M.
  - Εάν ο τύπος του είναι Β, θα παίρνει ποσότητα q στην τιμή m.
  - Προφανώς $Q>q$ και $M>m$.

- Οι περιορισμοί συμβατότητας κινήτρων μας λένε ότι:
  - $2\cdot(10\cdot Q-Q^2)-M\geq 2\cdot(10\cdot q-q^2)-m$
  - $(10\cdot q-q^2)-m\geq(10\cdot Q-Q^2)-M$
- Οι περιορισμοί ατομικής ορθολογικότητας μας λένε ότι:
  - $2\cdot(10\cdot Q-Q^2)-M\geq 0$
  - $(10\cdot q-q^2)-m\geq 0$

Παράδειγμα: Πώληση μεταβλητής ποσότητας (5/8)

- Το αναμενόμενο κέρδος της εταιρείας είναι:
  - $\rho\cdot(M-2\cdot Q)+(1-\rho)\cdot(m-2\cdot q)$

- Από τους δύο περιορισμούς ατομικής ορθολογικότητας:
  - $2\cdot(10\cdot Q-Q^2)-M\geq 0$
  - $(10\cdot q-q^2)-m\geq 0$
- τουλάχιστον σε έναν πρέπει να ισχύει η ισότητα.
- Πράγματι, αν και για τους δύο ισχύει το >0, τότε μπορούμε να αυξήσουμε λίγο το m και λίγο το M, προσέχοντας να μην παραβιάσουμε τους περιορισμούς συμβατότητας κινήτρων, αυξάνοντας έτσι τα αναμενόμενα κέρδη της εταιρείας.
- Με δεδομένο ότι:
  - $2\cdot(10\cdot Q-Q^2)-M \geq 2\cdot(10\cdot q-q^2)-m \geq (10\cdot q-q^2)-m$
- είναι φανερό ότι τελικά πρέπει να ισχύει:
  - $\mathbf{(10\cdot q-q^2)-m=0}$

Παράδειγμα: Πώληση μεταβλητής ποσότητας (6/8)

- Επίσης, μπορούμε να δούμε ότι ο πρώτος περιορισμός συμβατότητας κινήτρων:
  - $2\cdot(10\cdot Q-Q^2)-M\geq 2\cdot(10\cdot q-q^2)-m$
- πρέπει να ισχύει με ισότητα.
- Αν δεν ισχύει η ισότητα, τότε η εταιρεία μπορεί να αυξήσει το M, αυξάνοντας τα κέρδη της, χωρίς να κινδυνεύει να αλλάξει ο παίκτης τύπου A την επιλογή του. Άρα:
  - $\mathbf{2\cdot(10\cdot Q-Q^2)-M=2\cdot(10\cdot q-q^2)-m}$

- Αντικαθιστώντας, βάσει των δύο εξισώσεων που βρήκαμε, τα M και m στο αναμενόμενο κέρδος της εταιρείας, αυτό γίνεται:
  - $\rho\cdot(18\cdot Q-2\cdot Q^2)+(1-2\cdot\rho)\cdot(10\cdot q-q^2)-(1-\rho)\cdot 2\cdot q$

Παράδειγμα: Πώληση μεταβλητής ποσότητας (7/8)

- Από τη μορφή που έχει η σχέση για το αναμενόμενο κέρδος, παρατηρούμε ότι αυτό μπορεί να μεγιστοποιηθεί ξεχωριστά για Q και ξεχωριστά για q.
- Βρίσκουμε λοιπόν ότι αυτό μεγιστοποιείται για:
  - $Q=4.5$
  - $q=(4-9\rho)/(1-2\rho)$
  - Προφανώς, επειδή πρέπει να ισχύει $q \geq 0$, για τιμές του $\rho>4/9$ θεωρούμε ότι $q=0$.

Παράδειγμα: Πώληση μεταβλητής ποσότητας (8/8)

- Από τις εξισώσεις που βρήκαμε νωρίτερα προκύπτουν και οι τιμές πώλησης του προϊόντος. Ειδικότερα:
- Για ρ<=4/9, η εταιρεία πουλά και στους δύο τύπους πελάτη.
  – Στους πελάτες τύπου Β πουλά ποσότητα q=(4-9ρ)/(1-2ρ) στην τιμή $m=10q-q^2$ (ακριβώς όσο είναι η αξία αυτής ποσότητας για τους πελάτες τύπου Β)
  – Στους πελάτες τύπου Α πουλά ποσότητα Q=4.5 σε τιμή όμως μικρότερη από την αξία αυτής της ποσότητας για τους πελάτες τύπου Α.
- Για ρ>4/9 η εταιρεία πουλά μόνο στους πελάτες τύπου Α ποσότητα Q=4.5. Μάλιστα σε αυτή την περίπτωση η τιμή πώλησης είναι ίση με την αξία της ποσότητας για τους πελάτες τύπου Α.

Παρατηρήσεις

- Τα αποτελέσματα είναι λογικά. Πράγματι:
  - Όταν υπάρχει η επιλογή Β, ο πελάτης τύπου Α δεν έχει λόγο να πληρώσει για ποσότητα Q τη μέγιστη τιμή, μιας και σε αυτή την περίπτωση το αναμενόμενο όφελός του είναι μηδέν, ενώ αν επιλέξει την μικρότερη ποσότητα με το μικρότερο όμως κόστος θα έχει κάποιο αναμενόμενο θετικό όφελος.
  - Όταν δεν υπάρχει η επιλογή Β, ο πελάτης Α το μόνο που μπορεί να κάνει είναι να αγοράσει στη μέγιστη για αυτόν τιμή.
  - Γενικά, όσο μικρότερη είναι η ποσότητα q, τόσο η τιμή για τον Α πλησιάζει στη μέγιστη για αυτόν.
- Πραγματικό παράδειγμα: Οι τιμές των επιχειρήσεων σε κανονική περίοδο και σε περίοδο εκπτώσεων. Ένας παίκτης τύπου Β πρέπει να περιμένει μέχρι τις εκπτώσεις, με κίνδυνο μάλιστα να μην βρει το προϊόν που θέλει.

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ