ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

Ενότητα 10: Παιχνίδια με ελλιπή πληροφόρηση

Ρεφανίδης Ιωάννης
Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Games with
Incomplete Information

Παιχνίδια με ελλιπή πληροφόρηση

Γενικά

- Ως παιχνίδια με ελλιπή πληροφόρηση ορίζονται αυτά στα οποία δεν είναι γνωστές σε όλους τους παίκτες όλες οι παράμετροι του παιχνιδιού, όπως:
  - Ποιοι/πόσοι είναι οι άλλοι παίκτες
  - Ποιες είναι οι διαθέσιμες στρατηγικές στους άλλους παίκτες.
  - Ποιες είναι οι αποδόσεις των διάφορων στρατηγικών για τους άλλους παίκτες.
  - κλπ

Παράδειγμα: Διαπραγμάτευση Ι (1/2)

- Έστω δύο μέρη, Α και Β, τα οποία βρίσκονται σε μια κατάσταση αντιπαράθεσης.
  - Δύο χώρες, εργοδότης και εργαζόμενοι, δύο οδηγοί στο δρόμο, δύο συνάδελφοι κλπ
- Κάθε παίκτης μπορεί να επιλέξει είτε μια σκληρή (Σ), είτε μια μετριοπαθή (Μ) αντιμετώπιση.
- Ο παίκτης Α είναι ιδιαίτερα άκαμπτος.
- Έστω ότι υπάρχει αβεβαιότητα για το χαρακτήρα του παίκτη Β, εάν δηλαδή είναι άκαμπτος ή ήπιος.
- Έχουμε δύο πίνακες παιχνιδιού, έναν για κάθε τύπο του Β:

B A	Σ	Μ
Σ	**1,1**	3,0
Μ	0,3	2,2

Άκαμπτος Β

B A	Σ	Μ
Σ	1,0	**3,1**
Μ	0,2	2,3

Ήπιος Β

Παράδειγμα: Διαπραγμάτευση Ι (2/2)

- Στο παράδειγμα αυτό τα πράγματα είναι απλά:
  - Ο παίκτης Α έχει κυρίαρχη στρατηγική την Σ, ανεξάρτητα από την στάση του παίκτη Β.
  - Ο παίκτης Β έχει κυρίαρχη στρατηγική την Σ στον πρώτο πίνακα και την Μ στο δεύτερο.
- Οι παραπάνω στρατηγικές μπορούν να επιλεγούν από τους παίκτες <u>με βεβαιότητα</u> και αποτελούν τη λύση του προβλήματος.

B A	Σ	Μ
Σ	**1,1**	3,0
Μ	0,3	2,2

Άκαμπτος Β

B A	Σ	Μ
Σ	1,0	**3,1**
Μ	0,2	2,3

Ήπιος Β

Παράδειγμα: Διαπραγμάτευση ΙΙ (1/3)

- Μια παραλλαγή του προηγούμενου παραδείγματος είναι όταν το ένα μέρος θα ήθελε να προσαρμόσει τη συμπεριφορά του βάσει της συμπεριφοράς του άλλου μέρους.
- Για παράδειγμα, έστω σε μια διαπραγμάτευση εργοδότη/εργαζομένων (A/B αντίστοιχα στους παρακάτω πίνακες), ο εργοδότης θα ήθελε να επιβραβεύσει μια ήπια στάση των εργαζομένων δίνοντας τους μια μεγαλύτερη αύξηση, όχι όμως μια άκαμπτη στάση.

B A	Σ	Μ
Σ	**1,1**	3,0
Μ	0,3	2,2

Άκαμπτος Β

B A	Σ	Μ
Σ	0,0	2,1
Μ	1,2	**3,3**

Ήπιος Β

Παράδειγμα: Διαπραγμάτευση ΙΙ (2/3)

- Στο παράδειγμα αυτό οι κυρίαρχες στρατηγικές για τον παίκτη Β είναι οι ίδιες, Σ για την πρώτη περίπτωση και Μ για την δεύτερη.
- Ο παίκτης Α πλέον έχει και αυτός διαφορετικές κυρίαρχες στρατηγικές, Σ για την πρώτη περίπτωση και Μ για τη δεύτερη.
- Το πρόβλημα για τον Α είναι ότι δεν γνωρίζει εξαρχής σε ποια από τις δύο περιπτώσεις βρισκόμαστε!

B A	Σ	Μ
Σ	**1,1**	3,0
Μ	0,3	2,2

Άκαμπτος Β

B A	Σ	Μ
Σ	0,0	2,1
Μ	1,2	**3,3**

Ήπιος Β

Παράδειγμα: Διαπραγμάτευση ΙΙ (3/3)

- Έστω ότι ο Α θεωρεί πως κατά 90% ο Β θα είναι άκαμπτος και κατά 10% θα είναι ήπιος.
- Εάν επιλέξει Σ, το αναμενόμενο όφελός του είναι:
  - $0.9 \cdot 1 + 0.1 \cdot 2 = 1.1$
- Εάν επιλέξει Μ, το αναμενόμενο όφελός του είναι:
  - $0.9 \cdot 0 + 0.1 \cdot 3 = 0.3$
- Άρα τον συμφέρει να επιλέξει Σ.
  - Στο συγκεκριμένο παράδειγμα βρίσκουμε εύκολα ότι αν ο Β είναι άκαμπτος με πιθανότητα μεγαλύτερη από 50%, ο Α επιλέγει Σ.

B / A	Σ	Μ
Σ	**1,1**	3,0
Μ	0,3	2,2

Άκαμπτος Β

B / A	Σ	Μ
Σ	0,0	2,1
Μ	1,2	**3,3**

Ήπιος Β

Παράδειγμα: Μάχη των φύλων (1/2)

- Έστω το γνωστό παιχνίδι της μάχης των φύλων, όπου ο άντρας και η γυναίκα πρέπει να αποφασίσουν αν θα πάνε στην Όπερα ή στο Γήπεδο.
- Ο άντρας προτιμά να πάει μαζί με τη γυναίκα του.
- Έστω ότι δεν είναι γνωστό στον άντρα εάν η γυναίκα του προτιμά να πάει μαζί με τον άντρα της κάπου ή χώρια.

Γ Α	Γήπεδο	Όπερα
Γήπεδο	**3,1**	0,0
Όπερα	0,0	**1,3**

Γυναίκα προτιμά μαζί

Γ Α	Γήπεδο	Όπερα
Γήπεδο	3,0	0,3
Όπερα	0,1	1,0

Γυναίκα προτιμά χώρια

Παράδειγμα: Μάχη των φύλων (2/2)

- Ο πληροφορημένος παίκτης (η γυναίκα) δεν έχει κάποια κυρίαρχη στρατηγική σε καμία από τις δύο περιπτώσεις.
  - Άρα, μολονότι γνωρίζει ποιος είναι ο σωστός πίνακας παιχνιδιού, δεν της είναι ξεκάθαρο τι να επιλέξει.
- Τα πράγματα είναι ακόμη χειρότερα για τον άνδρα, ο οποίος, εκτός από το ότι δεν έχει καμία κυρίαρχη στρατηγική σε κανένα παιχνίδι, δεν γνωρίζει καν ποιος είναι ο σωστός πίνακας παιχνιδιού!
- Θα αναλύσουμε το παιχνίδι στις επόμενες διαφάνειες.

Γ Α	Γήπεδο	Όπερα
Γήπεδο	**3,1**	0,0
Όπερα	0,0	**1,3**

Γυναίκα προτιμά μαζί

Γ Α	Γήπεδο	Όπερα
Γήπεδο	3,0	0,3
Όπερα	0,1	1,0

Γυναίκα προτιμά χώρια

Παρατήρηση

- Στα παραδείγματα που προηγήθηκαν θεωρήσαμε αβεβαιότητα για τον ένα από τους δύο παίκτες.
- Στην πραγματικότητα μπορεί να υπάρχει αβεβαιότητα και για τους δύο.
- Σε αυτή την περίπτωση μπορεί να έχουμε τόσους πίνακες παιχνιδιού, όσοι είναι οι δυνατοί συνδυασμοί ενδεχόμενων καταστάσεων των δύο παικτών.

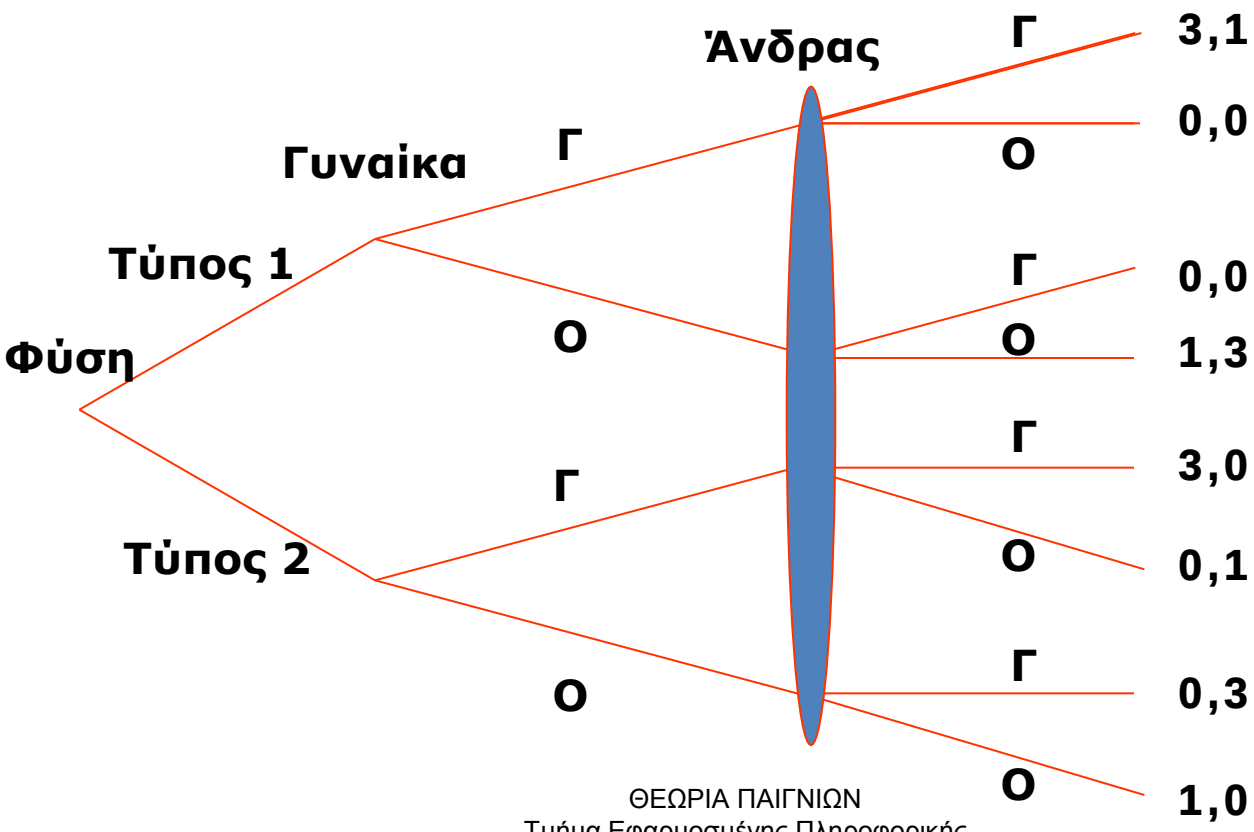
- ΠΡΟΣΟΧΗ: Θεωρούμε ότι το πλήθος των δυνατών διαφορετικών καταστάσεων κάθε παίκτη είναι πεπερασμένο.

Ισορροπία Bayes-Nash (1/4)

- Για το παιχνίδι της μάχης των φύλων με ελλιπή πληροφόρηση κάνουμε τις εξής παραδοχές:
  - Η γυναίκα γνωρίζει ποιος είναι ο σωστός πίνακας του παιχνιδιού.
  - Ο άνδρας δεν γνωρίζει τον τύπο της γυναίκας του, ωστόσο γνωρίζει την πιθανότητα ρ ο πίνακας του παιχνιδιού να είναι ο πρώτος (η γυναίκα του τον αγαπά).
    - Άρα η πιθανότητα ο σωστός πίνακας του παιχνιδιού να είναι ο δεύτερος είναι 1-ρ.
  - Και η γυναίκα γνωρίζει την τιμή του ρ.

Ισορροπία Bayes-Nash (2/4)

- Μετατρέπουμε το παιχνίδι σε εκτατική μορφή, θεωρώντας ότι ένας τρίτος παίκτης, η φύση, επιλέγει στην αρχή τον τύπο της γυναίκας.



ΠΡΟΣΟΧΗ: Τα πρώτα νούμερα αντιστοιχούν στον άνδρα

Ισορροπία Bayes-Nash (3/4)

- Στο συγκεκριμένο παιχνίδι ο άνδρας έχει έναν κόμβο απόφασης, άρα πρέπει να λάβει μία απόφαση:
  - Οι καθαρές στρατηγικές του άνδρα είναι οι Γ και Ο.
  - Μια μικτή στρατηγική του άνδρα μπορεί να παρασταθεί με την πιθανότητα λ να επιλέξει Γ (άρα η πιθανότητα να επιλέξει Ο είναι 1-λ).
- Η γυναίκα έχει δύο κόμβους απόφασης, άρα έχει να λάβει δύο αποφάσεις:
  - Οι καθαρές στρατηγικές της γυναίκας είναι οι (Γ,Γ), (Γ,Ο), (Ο,Γ) και (Ο,Ο).
  - Μια μικτή στρατηγική για τη γυναίκα αποτελείται από ένα ζεύγος πιθανοτήτων (μ_1, μ_2), όπου μ_i είναι η πιθανότητα η γυναίκα να επιλέξει Γ όταν ο τύπος της είναι i, i=1,2.
    - Οι καθαρές στρατηγικές της γυναίκας αντιστοιχούν στις μικτές στρατηγικές (1,1), (1,0), (0,1) και (0,0).

Ισορροπία Bayes-Nash (4/4)

- Μια ισορροπία Bayes-Nash για το συγκεκριμένο παιχνίδι είναι ένας συνδυασμός πιθανοτήτων (λ, μ_1, μ_2), τέτοιος ώστε κάθε παίκτης (και κάθε τύπος παίκτη) επιλέγει την καλύτερη απάντηση στην επιλογή του άλλου παίκτη:
  - Η πιθανότητα μ_1 μεγιστοποιεί το αναμενόμενο όφελος της γυναίκας τύπου 1, όταν ο άνδρας επιλέγει Γ με πιθανότητα λ.
  - Η πιθανότητα μ_2 μεγιστοποιεί το αναμενόμενο όφελος της γυναίκας τύπου 2, όταν ο άνδρας επιλέγει Γ με πιθανότητα λ.
  - Η πιθανότητα λ μεγιστοποιεί το αναμενόμενο όφελος του άνδρα, ο οποίος πιστεύει ότι η γυναίκα είναι τύπου 1 με πιθανότητα ρ και επιλέγει Γ με πιθανότητα μ_1, ενώ είναι τύπου 2 με πιθανότητα $1-\rho$ και επιλέγει Γ με πιθανότητα μ_2.

- Στις επόμενες διαφάνειες θα βρούμε κάποια σημεία ισορροπίας Bayes-Nash με καθαρές και με μικτές στρατηγικές.

Ισορροπίες καθαρών στρατηγικών (1/3)

- Έστω ότι ο άνδρας αποφασίζει Γ (δηλαδή λ=1).
- Η καλύτερη απάντηση της γυναίκας τύπου 1 είναι επίσης Γ (μ_1=1) και της γυναίκας τύπου 2 είναι Ο (μ_2=0).
- Θα ελέγξουμε πότε η επιλογή Γ του άνδρα είναι η καλύτερη απάντηση στις επιλογές (Γ,Ο) ή ισοδύναμα (1,0), της γυναίκας.
- Επιλέγοντας Γ ο άνδρας έχει αναμενόμενο όφελος:
  - $3\cdot\rho+0\cdot(1-\rho)=3\rho$
- Αν επέλεγε Ο, θα είχε αναμενόμενο όφελος:
  - $0\cdot\rho+1\cdot(1-\rho)=1-\rho$

Γ Α	Γήπεδο	Όπερα
Γήπεδο	**3,1**	0,0
Όπερα	0,0	**1,3**

Γυναίκα προτιμά μαζί

Γ Α	Γήπεδο	Όπερα
Γήπεδο	3,0	0,3
Όπερα	0,1	1,0

Γυναίκα προτιμά χώρια

Ισορροπίες καθαρών στρατηγικών (2/3)

- Η επιλογή Γ για τον άνδρα είναι λοιπόν καλύτερη απάντηση στην επιλογή (Γ,Ο) της γυναίκας, όταν $3 \cdot \rho \geq 1-\rho$ ή ισοδύναμα $\rho \geq 0.25$.
- Άρα, για $\rho \geq 0.25$, ο συνδυασμός (Γ,(Γ,Ο)), ή με πιθανότητες ($\lambda=1$, $\mu_1=1$, $\mu_2=0$) είναι σημείο ισορροπίας κατά Bayes-Nash, με καθαρές στρατηγικές.
- Παρόμοια μπορούμε να βρούμε ότι για $\rho \geq 0.75$ υπάρχει το σημείο ισορροπίας (Ο, (Ο,Γ)) ή ($\lambda=0$, $\mu_1=0$, $\mu_2=1$).
- Δεν υπάρχει κανένα άλλο σημείο ισορροπίας με καθαρές στρατηγικές!

Γ Α	Γήπεδο	Όπερα
Γήπεδο	**3,1**	0,0
Όπερα	0,0	**1,3**

Γυναίκα προτιμά μαζί

Γ Α	Γήπεδο	Όπερα
Γήπεδο	3,0	0,3
Όπερα	0,1	1,0

Γυναίκα προτιμά χώρια

Ισορροπίες καθαρών στρατηγικών (3/3)

- Συνοψίζοντας:
  - Για ρ>0.75 υπάρχουν δύο σημεία ισορροπίας με καθαρές στρατηγικές, τα (Γ, (Γ,Ο)) και (Ο, (Ο,Γ)).
  - Για 0.25<ρ<0.75 υπάρχει μόνο ένα σημείο ισορροπίας με καθαρές στρατηγικές, το (Γ, (Γ,Ο)).
  - Για ρ<0.25 δεν υπάρχει κανένα σημείο ισορροπίας με καθαρές στρατηγικές.

Ισορροπίες μικτών στρατηγικών (1/7)

- Είναι προφανές ότι υπάρχουν και ισορροπίες μικτών στρατηγικών, ακόμη και για ρ<0.25.
- Για παράδειγμα, έστω **ρ=0**. Τότε είναι σίγουρο ότι η γυναίκα είναι τύπου 2, οπότε ισχύει μόνο ο δεύτερος πίνακας του παιχνιδιού.

Γ Α	Γήπεδο	Όπερα
Γήπεδο	3,0	0,3
Όπερα	0,1	1,0

Γυναίκα προτιμά χώρια

- Το παιχνίδι τώρα μοιάζει με το «μονά-ζυγά», το οποίο έχει ισορροπία Nash με μικτές στρατηγικές.
- Πράγματι, για λ=0.25 και μ_2=0.25, οι δύο παίκτες είναι αδιάφοροι για την επιλογή του αντιπάλου.

Ισορροπίες μικτών στρατηγικών (2/7)

- Έστω ότι ρ>0.
- Ας υποθέσουμε ότι ο άνδρας επιλέγει Γ με πιθανότητα λ.
  - Εάν η γυναίκα τύπου 1 επιλέξει Γ, τότε το αναμενόμενο όφελός της είναι:
    - $\lambda \cdot 1+(1-\lambda)\cdot 0=\lambda$
  - Εάν η γυναίκα τύπου 1 επιλέξει Ο, το αναμενόμενο όφελός της είναι:
    - $\lambda \cdot 0+(1-\lambda)\cdot 3=(1-\lambda)\cdot 3$
  - Προφανώς η γυναίκα θα επιλέξει αυτό που τη συμφέρει περισσότερο, εκτός εάν $\lambda=3\cdot(1-\lambda)$ ή $\lambda=0.75$, οπότε μπορεί να επιλέξει οποιαδήποτε μικτή στρατηγική.

Γ Α	Γήπεδο	Όπερα
Γήπεδο	**3,1**	0,0
Όπερα	0,0	**1,3**

Γυναίκα προτιμά μαζί

Γ Α	Γήπεδο	Όπερα
Γήπεδο	3,0	0,3
Όπερα	0,1	1,0

Γυναίκα προτιμά χώρια

Ισορροπίες μικτών στρατηγικών (3/7)

- Παρόμοια:
  - Εάν η γυναίκα τύπου 2 επιλέξει Γ, τότε το αναμενόμενο όφελός της είναι:
    - $\lambda \cdot 0+(1-\lambda) \cdot 1=1-\lambda$
  - Εάν η γυναίκα τύπου 2 επιλέξει Ο, το αναμενόμενο όφελός της είναι:
    - $\lambda \cdot 3+(1-\lambda) \cdot 0=3\lambda$
  - Προφανώς η γυναίκα θα επιλέξει αυτό που τη συμφέρει περισσότερο, εκτός εάν $1-\lambda=3\lambda$ ή $\lambda=0.25$, οπότε μπορεί να επιλέξει οποιαδήποτε μικτή στρατηγική.

Γ Α	Γήπεδο	Όπερα
Γήπεδο	**3,1**	0,0
Όπερα	0,0	**1,3**

Γυναίκα προτιμά μαζί

Γ Α	Γήπεδο	Όπερα
Γήπεδο	3,0	0,3
Όπερα	0,1	1,0

Γυναίκα προτιμά χώρια

Ισορροπίες μικτών στρατηγικών (4/7)

- Ας δούμε τώρα το πρόβλημα από την πλευρά του άνδρα.
- Έστω ότι η γυναίκα επιλέγει τη μικτή στρατηγική (μ_1,μ_2).
  - Εάν ο άνδρας επιλέξει Γ, το αναμενόμενο όφελός του είναι:
    - $\rho\cdot\mu_1\cdot 3+(1-\rho)\cdot\mu_2\cdot 3$
  - Εάν ο άνδρας επιλέξει Ο, το αναμενόμενο όφελός του είναι:
    - $\rho\cdot(1-\mu_1)\cdot 1+(1-\rho)\cdot(1-\mu_2)\cdot 1$
  - Ο άνδρας θα επιλέξει Γ ή Ο, ανάλογα με το ποια από τις παραπάνω δύο εκφράσεις δίνει μεγαλύτερο όφελος.
  - Στην ειδική περίπτωση που οι δύο παρακάνω εκφράσεις είναι ίσες, ο άνδρας μπορεί να επιλέξει μικτές στρατηγικές.

Γ Α	Γήπεδο	Όπερα
Γήπεδο	**3,1**	0,0
Όπερα	0,0	**1,3**

Γυναίκα προτιμά μαζί

Γ Α	Γήπεδο	Όπερα
Γήπεδο	3,0	0,3
Όπερα	0,1	1,0

Γυναίκα προτιμά χώρια

Ισορροπίες μικτών στρατηγικών (5/7)

- Ας προσπαθήσουμε να βρούμε μια μικτή ισορροπία:
  - Έστω ότι ο άνδρας επιλέγει $\lambda=0.75$.
  - Τότε η γυναίκα τύπου 1 μπορεί να επιλέξει οποιαδήποτε μικτή στρατηγική, δηλαδή οποιοδήποτε μ_1.
  - Ωστόσο η γυναίκα τύπου 2 θα επιλέξει υποχρεωτικά Ο ($\mu_2=0$).
  - Ο άντρας μπορεί να επιλέξει μικτή στρατηγική μόνο όταν:
    - $\rho\cdot\mu_1\cdot 3+(1-\rho)\cdot\mu_2\cdot 3=\rho\cdot(1-\mu_1)\cdot 1+(1-\rho)\cdot(1-\mu_2)\cdot 1$
  - ή ισοδύναμα (αφού $\mu_2=0$)
    - $\mu_1=1/(4\rho)$ για $\boldsymbol{\rho\geq 0.25}$
- Για παράδειγμα, για $\rho=0.5$ έχουμε την μικτή ισορροπία:
  - ($\lambda=0.75$, $\mu_1=0.5$, $\mu_2=0$)

Ισορροπίες μικτών στρατηγικών (6/7)

- Παρόμοια:
  - Έστω ότι ο άνδρας επιλέγει $\lambda=0.25$.
  - Τότε η γυναίκα τύπου 1 θα επιλέξει υποχρεωτικά Ο, δηλαδή $\mu_1=0$.
  - Από την άλλη, η γυναίκα τύπου 2 μπορεί να επιλέξει οποιαδήποτε στρατηγική.
  - Ο άντρας μπορεί να επιλέξει μικτή στρατηγική μόνο όταν:
    - $\rho\cdot\mu_1\cdot 3+(1-\rho)\cdot\mu_2\cdot 3=\rho\cdot(1-\mu_1)\cdot 1+(1-\rho)\cdot(1-\mu_2)\cdot 1$
  - ή ισοδύναμα (αφού $\mu_1=0$)
    - $\mu_2=1/(4-4\rho)$ για $\boldsymbol{\rho\leq 0.75}$
- Για παράδειγμα, για $\rho=0.2$ έχουμε την μικτή ισορροπία:
  - $(\lambda=0.25, \mu_1=0, \mu_2=0.3125)$

Ισορροπίες μικτών στρατηγικών (7/7)

- Τα αποτελέσματα που βρήκαμε δεν είναι γενικά, αλλά αφορούν μόνο το συγκεκριμένο παράδειγμα.
- Η γενικότερη προσέγγιση που ακολουθήθηκε μπορεί ωστόσο να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε ανάλογο παράδειγμα.

- Συμπερασματικά:
  - Οι πληροφορημένοι παίκτες (η γυναίκα στο συγκεκριμένο παράδειγμα) επιλέγουν τη στρατηγική τους όπως στα παιχνίδια πλήρους πληροφόρησης.
    - Πρέπει να επιλέξουν μια στρατηγική για κάθε τύπο παιχνιδιού.
  - Οι μη πληροφορημένοι παίκτες ουσιαστικά καλούνται να αντιμετωπίσουν μικτές στρατηγικές, όπου οι πιθανότητες καθορίζονται από τη συχνότητα εμφάνισης των διαφόρων τύπων παίκτη.

Παράδειγμα: Μάχη των φύλων ΙΙ (1/4)

- Στο παράδειγμα που είδαμε είχαμε ελλιπή πληροφόρηση μόνο όσον αφορά τον τύπο της γυναίκας.
- Θα δείξουμε πώς η προσέγγιση γενικεύεται όταν υπάρχει ελλιπή πληροφόρηση και για τον τύπο του άνδρα.
- Έστω ότι υπάρχουν δύο τύποι άνδρα:
  - ο αισιόδοξος (τύπος 1), που θεωρεί ότι η πιθανότητα η γυναίκα να επιθυμεί κοινή έξοδο είναι ρ_1.
  - ο απαισιόδοξος (τύπος 2), που θεωρεί ότι η πιθανότητα η γυναίκα να επιθυμεί κοινή έξοδο είναι ρ_2, όπου $0<\rho_2<\rho_1<1$.
    - <u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>: Οι δύο διαφορετικοί τύποι άνδρα δεν έχουν να κάνουν με τη συνάρτηση οφέλους (όπως συμβαίνει με τη γυναίκα).
- Τέλος η γυναίκα γνωρίζει ότι η πιθανότητα ο άντρας της να είναι αισιόδοξος είναι q.
  - Και ο άντρας γνωρίζει αυτή τη γνώση της γυναίκας.

Παράδειγμα: Μάχη των φύλων ΙΙ (2/4)

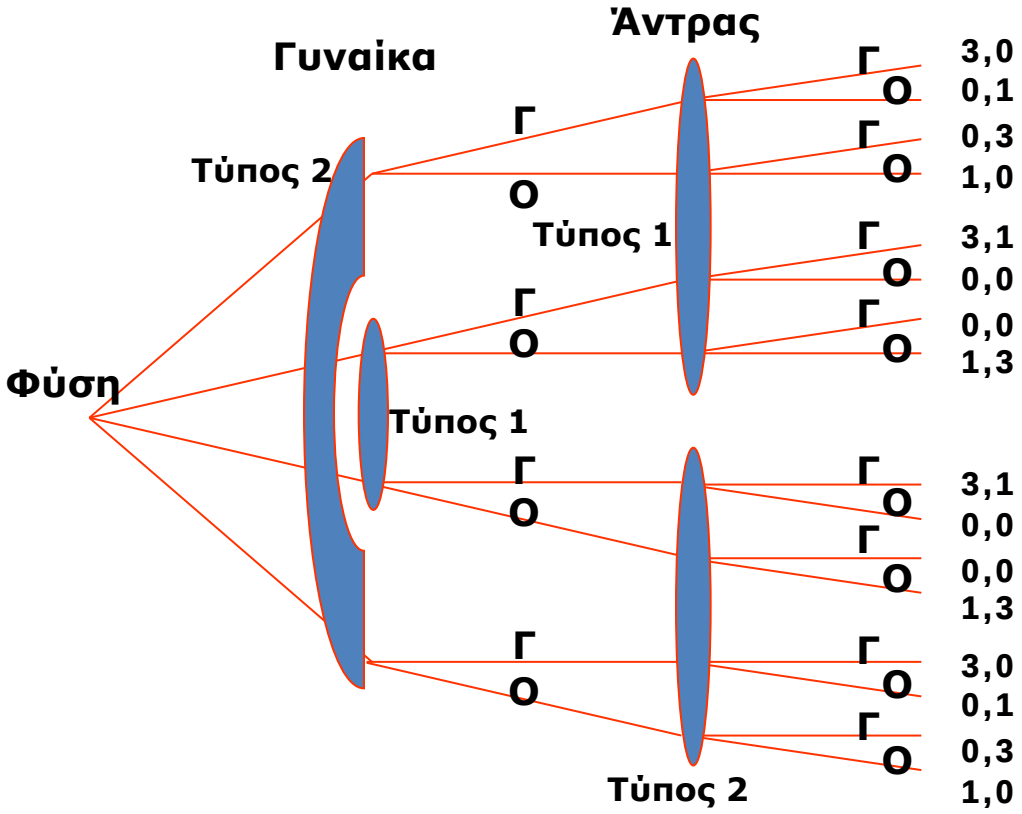
- Μια στρατηγική της γυναίκας αποτελείται, όπως και πριν, από δύο επιλογές, για τους δύο τύπους της γυναίκας.
  - Οι καθαρές στρατηγικές της γυναίκας είναι οι (Γ,Γ), (Γ,Ο), (Ο,Γ) και (Ο,Ο).
  - Οι μικτές στρατηγικές της γυναίκας είναι όλα τα ζεύγη (μ_1,μ_2), όπου μ_i η πιθανότητα με την οποία η γυναίκα τύπου i επιλέγει Γ.
- Τώρα όμως και μια στρατηγική του άντρα αποτελείται από δύο μέρη, ένα για κάθε τύπο του άντρα.
  - Οι καθαρές στρατηγικές του άντρα είναι οι (Γ,Γ), (Γ,Ο), (Ο,Γ) και (Ο,Ο).
  - Οι μικτές στρατηγικές του άντρα είναι όλα τα ζεύγη (λ_1,λ_2), όπου λ_i η πιθανότητα με την οποία ο άντρας τύπου i επιλέγει Γ.

Παράδειγμα: Μάχη των φύλων ΙΙ (3/4)

- Μια ισορροπίας Bayes-Nash είναι μια τετράδα:
  - $((\lambda_1,\lambda_2), (\mu_1,\mu_2))$
- τέτοια ώστε κάθε τύπος παίκτη να έχει επιλέξει μια βέλτιστη αναμενόμενη απάντηση στις επιλογές όλων των διαφόρων τύπων του αντιπάλου.
- Για παράδειγμα:
  - η πιθανότητα μ_1 μεγιστοποιεί το αναμενόμενο όφελος της γυναίκας τύπου 1, όταν ο άνδρας τύπου j επιλέγει Γ με πιθανότητα λ_j και η πιθανότητα ο άνδρας να είναι τύπου 1 είναι q.
  - η πιθανότητα λ_1 μεγιστοποιεί το αναμενόμενο όφελος του άνδρα τύπου 1, όταν η γυναίκα τύπου i επιλέγει Γ με πιθανότητα μ_i και η πιθανότητα η γυναίκα να είναι τύπου 1 είναι ρ_1.

Παράδειγμα: Μάχη των φύλων ΙΙ (4/4)

- Παρακάτω φαίνεται η εκτατική μορφή του παιχνιδιού, με πρώτο παίκτη τη φύση να αποφασίζει για τους τύπους των δύο παικτών.



ΠΡΟΣΟΧΗ:
Τα πρώτα νούμερα αντιστοιχούν στον άνδρα

Γενίκευση (1/2)

- Το γενικότερο πλαίσιο που πρότεινε ο Harsanyi (1967, 1968) για τη μελέτη των παιχνιδιών ελλιπούς πληροφόρησης έχει ως εξής:
  - Έστω ότι έχουμε δύο παίκτες.
  - Έστω ότι υπάρχουν M διαφορετικοί τύποι για τον παίκτη 1, οι ψ_1, ψ_2, ... , ψ_M.
  - Έστω ότι υπάρχουν L διαφορετικοί τύποι για τον παίκτη 2, οι θ_1, θ_2, ..., θ_L.
  - Θεωρούμε ότι στην αρχή κανένας παίκτης δεν γνωρίζει τους τύπους των παικτών (ούτε του εαυτού του δηλαδή).
  - Στην αρχή του παιχνιδιού η «φύση» αποφασίζει για τον τύπο κάθε παίκτη, έστω (ψ_j, θ_i). Κάθε παίκτης μαθαίνει το δικό του τύπο, όχι όμως του αντιπάλου.

Γενίκευση (2/2)

- Ο παίκτης 1, αφού «πληροφορηθεί» τον τύπο του ψ_j, επιλέγει μια στρατηγική που μεγιστοποιεί το αναμενόμενο όφελός του, βάσει της εκτίμησής του για τις πιθανότητες εμφάνισης των διαφόρων τύπων του παίκτη 2.
- Παρόμοια, ο παίκτης 2, αφού «πληροφορηθεί» τον τύπο του θ_i, επιλέγει μια στρατηγική που μεγιστοποιεί το αναμενόμενο όφελός του, βάσει της εκτίμησής του για τις πιθανότητες εμφάνισης των διαφόρων τύπων του παίκτη 1.
  - ΠΡΟΣΟΧΗ: Διαφορετικοί τύποι του ίδιου παίκτη μπορεί να έχουν διαφορετικές εκτιμήσεις για τη συχνότητα εμφάνισης των διαφόρων τύπων του άλλου παίκτη, όπως είδαμε στη μάχη των φύλων ΙΙ. Ωστόσο, όλες οι εκτιμήσεις είναι γνωστές και στους δύο παίκτες!
- Εάν μπορέσουμε να βρούμε ένα σύνολο στρατηγικών, μία για κάθε τύπο παίκτη, που να είναι καλύτερες απαντήσεις στις επιλογές των αντιπάλων, τότε έχουμε βρει ένα σημείο ισορροπίας Bayes-Nash

Εξαρτημένες πιθανότητες (1/2)

- Προσοχή χρειάζεται όταν οι διάφορες κατανομές πιθανοτήτων είναι εξαρτημένες μεταξύ τους.
- Για παράδειγμα, στη μάχη των δύο φύλων II, η πιθανότητα εμφάνισης του ενός τύπου συζύγου εξαρτάται από τον τύπο του άλλου συζύγου.
  - Για παράδειγμα, η πιθανότητα εμφάνισης μιας γυναίκας που επιθυμεί κοινή έξοδο εξαρτάται από τον τύπο του άντρα (αισιόδοξος ή απαισιόδοξος).
  - Με δεδομένο όμως ότι οι δύο παίκτες έχουν κοινή γνώση για τις πιθανότητες, η ανεξάρτητη πιθανότητα εμφάνισης ενός αισιόδοξου άντρα, q, τροποποιείται όταν γνωρίζουμε τι τύπος γυναίκας εμφανίστηκε.

Εξαρτημένες πιθανότητες (2/2)

- Οι εκ των προτέρων <u>ανεξάρτητες</u> πιθανότητες εμφάνισης των διαφόρων συνδυασμών τύπων παικτών είναι οι παρακάτω:

Γυναίκα Άνδρας	θ_1 Μαζί	θ_2 Χώρια
ψ_1, αισιόδοξος	$q \cdot \rho_1$	$q \cdot (1-\rho_1)$
ψ_2, απαισιόδοξος	$(1-q) \cdot \rho_2$	$(1-q) \cdot (1-\rho_2)$

- Μια γυναίκα τύπου 1 λοιπόν (θ_1) θεωρεί ότι η <u>εξαρτημένη</u> πιθανότητα ο άντρας της να είναι αισιόδοξος είναι:

$$\frac{q \cdot \rho_1}{q \cdot \rho_1 + (1-q) \cdot \rho_2}$$

- Παρόμοια, ένας αισιόδοξος άντρας θεωρεί ότι η πιθανότητα η γυναίκα του να επιθυμεί κοινή έξοδο είναι:

$$\frac{q \cdot \rho_1}{q \cdot \rho_1 + q \cdot (1-\rho_1)} = \rho_1$$

Ισορροπίες καθαρών στρατηγικών (1/6)

- Θα ελέγξουμε τώρα αν και πότε το σημείο ((Γ,Ο),(Γ,Ο)), ή με πιθανότητες το σημείο (λ_1=1, λ_2=0, μ_1=1, μ_2=0), αποτελεί σημείο ισορροπίας Bayes-Nash.
- Εάν ο άνδρας τύπου 1 (αισιόδοξος) επιλέξει Γ, το αναμενόμενο όφελός του είναι:
  - $\rho_1 \cdot 3+(1-\rho_1)\cdot 0=3\cdot\rho_1$
- Εάν ο άνδρας τύπου 1 επιλέξει Ο, το αναμενόμενο όφελός του είναι:
  - $\rho_1 \cdot 0+(1-\rho_1)\cdot 1=1-\rho_1$
- Ο άντρας τύπου 1 επιλέγει λοιπόν Γ ως καλύτερη απάντηση στις επιλογές (Γ,Ο) της γυναίκας, όταν $3\rho_1 \geq 1-\rho_1$ ή $\boldsymbol{\rho_1 \geq 0.25}$.

Γ Α	Γήπεδο	Όπερα
Γήπεδο	**3,1**	0,0
Όπερα	0,0	**1,3**

Γυναίκα προτιμά μαζί

Γ Α	Γήπεδο	Όπερα
Γήπεδο	3,0	0,3
Όπερα	0,1	1,0

Γυναίκα προτιμά χώρια

Ισορροπίες καθαρών στρατηγικών (2/6)

- Εάν ο άνδρας τύπου 2 (απαισιόδοξος) επιλέξει Γ, το αναμενόμενο όφελός του είναι:
  - $\rho_2 \cdot 3 + (1-\rho_2) \cdot 0 = 3 \cdot \rho_2$
- Εάν ο άνδρας τύπου 2 επιλέξει Ο, το αναμενόμενο όφελός του είναι:
  - $\rho_2 \cdot 0 + (1-\rho_2) \cdot 1 = 1-\rho_2$
- Ο άντρας τύπου 2 επιλέγει λοιπόν Ο ως καλύτερη απάντηση στις επιλογές (Γ,Ο) της γυναίκας, όταν $3\rho_2 \leq 1-\rho_2$ ή $\boldsymbol{\rho_2 \leq 0.25}$.

Γ Α	Γήπεδο	Όπερα
Γήπεδο	**3,1**	0,0
Όπερα	0,0	**1,3**

Γυναίκα προτιμά μαζί

Γ Α	Γήπεδο	Όπερα
Γήπεδο	3,0	0,3
Όπερα	0,1	1,0

Γυναίκα προτιμά χώρια

Ισορροπίες καθαρών στρατηγικών (3/6)

- Για τη γυναίκα τύπου 1, οι πιθανότητες να έχει έναν αισιόδοξο και έναν απαισιόδοξο άντρα αντίστοιχα είναι:

$$q_{11} = \frac{q \cdot \rho_1}{q \cdot \rho_1 + (1-q) \cdot \rho_2} \qquad q_{21} = \frac{(1-q) \cdot \rho_2}{q \cdot \rho_1 + (1-q) \cdot \rho_2}$$

- Για τη γυναίκα τύπου 2, οι πιθανότητες να έχει έναν αισιόδοξο και έναν απαισιόδοξο άντρα αντίστοιχα είναι:

$$q_{12} = \frac{q \cdot (1-\rho_1)}{q \cdot (1-\rho_1) + (1-q) \cdot (1-\rho_2)} \qquad q_{22} = \frac{(1-q) \cdot (1-\rho_2)}{(1-q) \cdot \rho_1 + (1-q) \cdot (1-\rho_2)}$$

Ισορροπίες καθαρών στρατηγικών (4/6)

- Εάν η γυναίκα τύπου 1 επιλέξει Γ, το αναμενόμενο όφελός της είναι:
  - $q_{11}\cdot 1+q_{21}\cdot 0=q_{11}$
- Εάν η γυναίκα τύπου 1 επιλέξει Ο, το αναμενόμενο όφελός της είναι:
  - $q_{11}\cdot 0+q_{21}\cdot 3=3\cdot q_{21}$
- Η γυναίκα τύπου 1 επιλέγει λοιπόν Γ ως καλύτερη απάντηση στις επιλογές (Γ,Ο) του άνδρα, όταν $q_{11}\geq 3\cdot q_{21}$ ή τελικά **$q\cdot \rho_1\geq 3\cdot \rho_2(1-q)$**.

Γ Α	Γήπεδο	Όπερα
Γήπεδο	**3,1**	0,0
Όπερα	0,0	**1,3**

Γυναίκα προτιμά μαζί

Γ Α	Γήπεδο	Όπερα
Γήπεδο	3,0	0,3
Όπερα	0,1	1,0

Γυναίκα προτιμά χώρια

Ισορροπίες καθαρών στρατηγικών (5/6)

- Τέλος εάν η γυναίκα τύπου 2 επιλέξει Γ, το αναμενόμενο όφελός της είναι:
  - $q_{12}\cdot 0+q_{22}\cdot 1=q_{22}$
- Εάν η γυναίκα τύπου 2 επιλέξει Ο, το αναμενόμενο όφελός της είναι:
  - $q_{12}\cdot 3+q_{22}\cdot 0=3\cdot q_{12}$
- Η γυναίκα τύπου 2 επιλέγει λοιπόν Ο ως καλύτερη απάντηση στις επιλογές (Γ,Ο) του άνδρα, όταν $q_{22}\leq 3\cdot q_{12}$ ή τελικά $\mathbf{3\cdot q\cdot(1-\rho_1)>=(1-q)\cdot(1-\rho_2)}$.

Γ Α	Γήπεδο	Όπερα
Γήπεδο	**3,1**	0,0
Όπερα	0,0	**1,3**

Γυναίκα προτιμά μαζί

Γ Α	Γήπεδο	Όπερα
Γήπεδο	3,0	0,3
Όπερα	0,1	1,0

Γυναίκα προτιμά χώρια

Ισορροπίες καθαρών στρατηγικών (6/6)

- Βρήκαμε τελικά ότι για να είναι σημείο ισορροπίας Bayes-Nash το (Γ,Ο,Γ,Ο) πρέπει να ισχύουν οι ανισότητες:
  - $\boldsymbol{\rho_1 \geq 0.25}$
  - $\boldsymbol{\rho_2 \leq 0.25}$
  - $\boldsymbol{q \cdot \rho_1 \geq 3 \cdot \rho_2 (1-q)}$
  - $\boldsymbol{3 \cdot q \cdot (1-\rho_1) >= (1-q) \cdot (1-\rho_2)}$
- Για παράδειγμα, για $\rho_1=0.8$, $\rho_2=0.2$, οι δύο τελευταίες ανισότητες γίνονται:
  - $q \geq 0.43$
  - $q \geq 0.58$
- Άρα, για $\rho_1=0.8$, $\rho_2=0.2$ και $q=0.7$ το σημείο (Γ,Ο,Γ,Ο) είναι σημείο ισορροπίας Bayes-Nash.
  - Για να βρούμε το σύνολο των τιμών (q,ρ_1,ρ_2) για τις οποίες το παραπάνω σημείο είναι σημείο ισορροπίας, θα έπρεπε να κάνουμε ένα διάγραμμα στο χώρο.

Κυριαρχία στρατηγικών (1/5)

- Στα παιχνίδια πλήρους πληροφόρησης είδαμε την έννοια της κυριαρχίας στρατηγικών. Ειδικότερα:
  - Εάν υπάρχει κυρίαρχη στρατηγική, ένας παίκτης παίζει πάντα αυτή.
  - Εάν υπάρχουν κυριαρχούμενες στρατηγικές, αυτές δεν επιλέγονται πότε από τους παίκτες.
- Η έννοια της κυριαρχίας ορίζεται και για τα παιχνίδια ελλιπούς πληροφόρησης.
- Σε παιχνίδι με δύο παίκτες, μια στρατηγική s_1 κυριαρχεί έναντι μιας στρατηγικής s_2 ενός παίκτη, εάν για κάθε συνδυασμό στρατηγικών όλων των τύπων του αντιπάλου του η s_1 δίνει μεγαλύτερο αναμενόμενο όφελος από την s_2.
  - Ανάλογα για παιχνίδια με περισσότερους από δύο παίκτες.

Κυριαρχία στρατηγικών (2/5)

- Έστω το παιχνίδι της Διαπραγμάτευσης Ι (ο παίκτης Α είναι πάντα άκαμπτος).
  - Στο παιχνίδι αυτό ο παίκτης Α δεν γνωρίζει τον τύπο του Β.
- Οι στρατηγικές του Α είναι δύο, οι Σ και Μ.
- Οι στρατηγικές του Β είναι τέσσερις, οι (Σ,Σ), (Σ,Μ), (Μ,Σ) και (Μ,Μ).
- Η στρατηγική Σ του Α κυριαρχεί έναντι της Μ πάντα.
- Παρόμοια, η στρατηγική (Σ,Μ) του Β κυριαρχεί έναντι των υπολοίπων πάντα.

B A	Σ	Μ
Σ	**1,1**	3,0
Μ	0,3	2,2

Άκαμπτος Β

B A	Σ	Μ
Σ	1,0	**3,1**
Μ	0,2	2,3

Ήπιος Β

Κυριαρχία στρατηγικών (3/5)

- Στο παιχνίδι της διαπραγμάτευσης ΙΙ, ο παίκτης Α θα ήθελε να ακολουθήσει παρόμοια τακτική με τον Β (σκληρή ή μετριοπαθή) .
  - Ο παίκτης Α πρέπει να αποφασίσει ωστόσο τι τακτική θα ακολουθήσει πριν βεβαιωθεί για την τακτική του Β.
  - Οι στρατηγικές του Α είναι οι Σ και Μ.
  - Οι στρατηγικές του Β είναι οι (Σ,Σ), (Σ,Μ), (Μ,Σ), (Μ,Μ).

B A	Σ	Μ
Σ	**1,1**	3,0
Μ	0,3	2,2

Άκαμπτος Β

B A	Σ	Μ
Σ	0,0	2,1
Μ	1,2	**3,3**

Ήπιος Β

Κυριαρχία στρατηγικών (4/5)

- Θα ελέγξουμε αν και πότε η στρατηγική Σ του Α κυριαρχεί της Μ. Θα πρέπει για κάθε στρατηγική του Β να έχει μεγαλύτερο αναμενόμενο όφελος.
  - Απέναντι στην (Σ,Σ) του Β, οι στρατηγικές Σ και Μ του Α έχουν αναμενόμενο όφελος:
    - Σ: ρ*1+(1-ρ)*0=ρ
    - Μ: ρ*0+(1-ρ)*1=1-ρ
  - Θα πρέπει ρ≥1-ρ ή ρ≥0.5
- Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει και για τις υπόλοιπες τρεις στρατηγικές του Β.
- Άρα για ρ≥0.5, η Σ κυριαρχεί επί της Μ για τον Α (και αντίστροφα για ρ<0.5).
  - Προφανώς κυρίαρχη στρατηγική του Β είναι η (Σ,Μ).

B A	Σ	Μ
Σ	**1,1**	3,0
Μ	0,3	2,2

Άκαμπτος Β

B A	Σ	Μ
Σ	0,0	2,1
Μ	1,2	**3,3**

Ήπιος Β

Κυριαρχία στρατηγικών (5/5)

- Τέλος, στα παιχνίδια με ελλιπή πληροφόρηση μπορεί να εφαρμοστεί και η επαναλαμβανόμενη απαλοιφή κυριαρχούμενων στρατηγικών (Iterated Elimination of Dominated Strategy, IEDS).
  - Ο παίκτης Α μπορεί να μην έχει αρχικά καμία κυριαρχούμενη στρατηγική, ύστερα όμως από την απαλοιφή κυριαρχούμενων στρατηγικών του Β μπορεί να αποκτήσει και ο Α.
  - Η διαδικασία αυτή μπορεί να επαναληφθεί για πολλούς κύκλους!

Μελέτη περίπτωσης: δυοπώλιο cournot με ελλιπή πληροφόρηση

Σύνοψη (1/3)

- Έχουμε δει την περίπτωση του δυοπωλίου Cournot, όπου δυο εταιρείες, 1 και 2, παράγουν ισοδύναμα προϊόντα.
  - Οι ποσότητες παραγωγής των δύο εταιρειών είναι Q_1 και Q_2.
  - Η τιμή πώλησης του προϊόντος είναι: $P=a-b(Q_1+Q_2)$, $a>0$, $b>0$.
  - Το κόστος παραγωγής ανά μονάδα προϊόντος είναι κοινό για τις δύο εταιρείες και ίσο με c.
- Έχουμε δει ότι η συνάρτηση καλύτερης απάντησης της εταιρείας i σε παραγωγή Q_j της εταιρείας j, όπου $i \neq j$, είναι:

$$R_i(Q_j) = \begin{cases} \dfrac{a-c-bQ_j}{2b}, & \text{εάν } Q_j \leq \dfrac{a-c}{b} \\ 0, & \text{εάν } Q_j > \dfrac{a-c}{b} \end{cases}$$

Σύνοψη (2/3)

- Το σημείο ισορροπίας Nash είναι ένα σημείο (Q_1*, Q_2*), για το οποίο ισχύει:
  - $Q_1^*=R_1(Q_2^*)$
  - $Q_2^*=R_2(Q_1^*)$
- Έχουμε δείξει ότι στο σημείο αυτό ισχύουν:

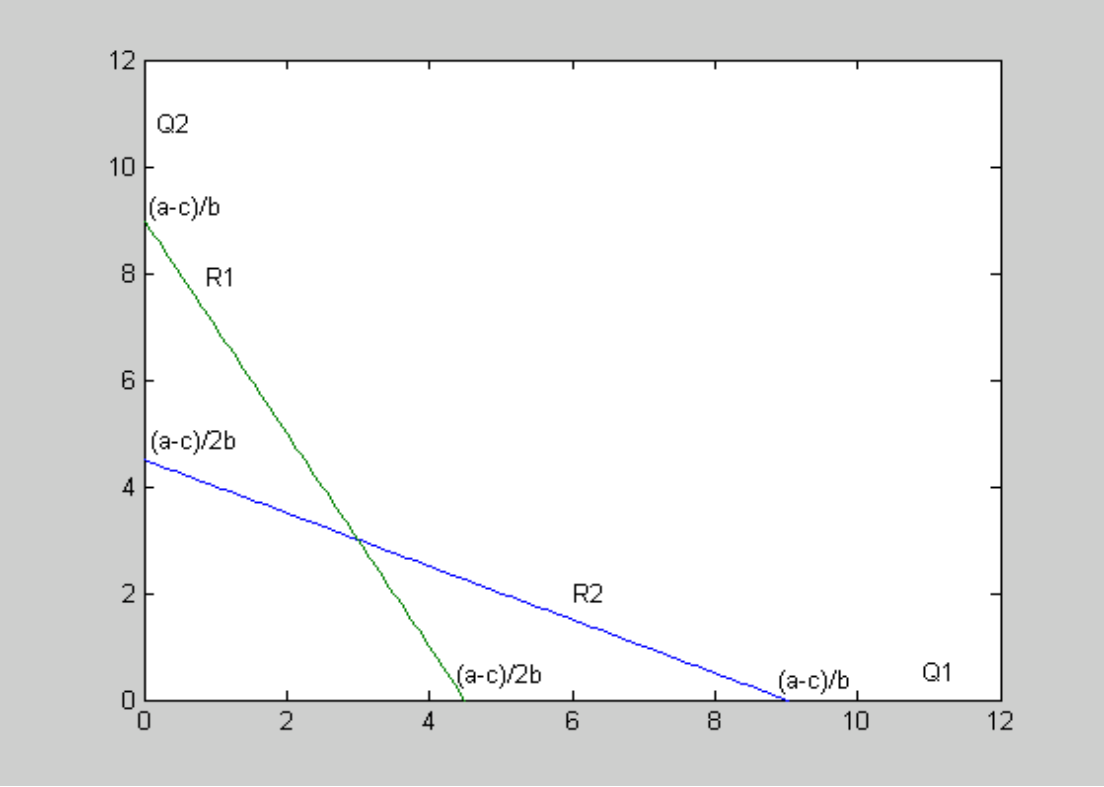
$$Q_1^* = Q_2^* = \frac{a-c}{3b}$$

$$P = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}c$$

$$\pi_1 = \pi_2 = \frac{(a-c)^2}{9b}$$

Σύνοψη (3/3)

- Στο διάγραμμα φαίνονται οι συναρτήσεις καλύτερης απάντησης στο ίδιο διάγραμμα. Η τομή τους είναι το σημείο ισορροπίας.



Δυοπώλιο με ελλιπή πληροφόρηση

- Έστω τώρα ότι υπάρχει αβεβαιότητα στην εταιρεία 1 σχετικά με το κόστος παραγωγής της εταιρείας 2.
  - Το κόστος παραγωγής της εταιρείας 1 είναι c.
  - Το κόστος παραγωγής της εταιρείας 2 είναι c+ε.
    - Την ακριβή τιμή του ε τη γνωρίζει μόνο η εταιρεία 2.
  - Θεωρούμε ότι η απόκλιση ε έχει γνωστή κατανομή με μέση τιμή όμως 0: **E(ε)=0**

- Θέλουμε να δούμε πώς μεταβάλλονται οι παραγωγές των δύο εταιρειών και τα κέρδη τους, ανάλογα με την τιμή του ε.
- Επίσης θέλουμε να δούμε αν και πότε συμφέρει την εταιρεία 2 να φανερώσει το κόστος παραγωγής της.

Ανάλυση (1/3)

- Για την εταιρεία 2 (με γνωστό κόστος παραγωγής c+ε) η συνάρτηση καλύτερης απάντησης βρίσκεται ότι είναι:

$$Q_2(\varepsilon) = R_2^{\varepsilon}(Q_1) = \begin{cases} \dfrac{a-(c+\varepsilon)-bQ_1}{2b}, & \text{εάν } Q_1 \le \dfrac{a-(c+\varepsilon)}{b} \\ 0, & \text{εάν } Q_1 > \dfrac{a-(c+\varepsilon)}{b} \end{cases}$$

- Μπορούμε μάλιστα να παρατηρήσουμε ότι ισχύει:

$$R_2^{\varepsilon}(Q_1) = R_2^{0}(Q_1) - \frac{\varepsilon}{2b}$$

- Επίσης παρατηρούμε ότι $EQ_2(\varepsilon)=Q_2(0)$, δηλαδή η αναμενόμενη παραγωγή της εταιρείας 2 ως καλύτερη απάντηση στην παραγωγή της εταιρείας 1 είναι αυτή που θα ήταν αν ε=0.

Ανάλυση (2/3)

- Η εταιρεία 1 δεν γνωρίζει ποια είναι η παραγωγή της εταιρείας 2.
- Εάν η παραγωγή της εταιρείας 2 είναι $Q_2(\varepsilon)$, τότε το κέρδος της εταιρείας 1 για παραγωγή Q_1 είναι:
  - $\pi_1(Q_1,\varepsilon)=[a-b\cdot(Q_1+Q_2(\varepsilon))-c]\cdot Q_1$
- Λόγω της αβεβαιότητας, η εταιρεία 1 επιθυμεί να μεγιστοποιήσει το αναμενόμενο κέρδος της, το οποίο είναι:
  - $\mathbf{E\pi_1(Q_1,\varepsilon)=[a-b\cdot(Q_1+EQ_2(\varepsilon))-c]\cdot Q_1}$
- Όμως $EQ_2(\varepsilon) = Q_2(0)$, άρα το αναμενόμενο κέρδος της 1 είναι αυτό που θα είχε αν το κόστος της 2 ήταν c.
- Τελικά η καλύτερη απάντηση της 1 είναι:

$$Q_1 = R_1(Q_2(\varepsilon)) = \begin{cases} \dfrac{a-c-bQ_2(0)}{2b}, & \text{εάν } Q_2(0) \le \dfrac{a-c}{b} \\ 0, & \text{εάν } Q_2(0) > \dfrac{a-c}{b} \end{cases}$$

Ανάλυση (3/3)

- Ένα σημείο ισορροπίας Bayes-Nash, Q_1^*, $Q_2^*(\varepsilon)$, θα πρέπει να έχει τις ιδιότητες:
  - $Q_1^*=R_1(Q_2^*(\varepsilon))$
  - $Q_2^*(\varepsilon)=R_2^{\varepsilon}(Q_1^*)$
- Μετά από λίγες πράξεις προκύπτει το αποτέλεσμα:

$$Q_1^* = \frac{a-c}{3b}, \quad Q_2(\varepsilon) = \frac{a-c}{3b} - \frac{\varepsilon}{2b}$$

Η τιμή για ε=0

- Η τιμή που θα διαμορφωθεί στην αγορά είναι:

$$P^*(\varepsilon) = a - b(Q_1^* + Q_2^*(\varepsilon)) = a - b(Q_1^* + Q_2^*(0)) + \frac{\varepsilon}{2} = P^* + \frac{\varepsilon}{2}$$

- Τα κέρδη των δύο εταιρειών είναι:

$$\pi_1^*(\varepsilon) = (P^* + \frac{\varepsilon}{2} - c)Q_1^*, \quad \pi_2^*(\varepsilon) = (P^* - c - \frac{\varepsilon}{2})(Q_2^*(0) - \frac{\varepsilon}{2b})$$

Συμπεράσματα

- Η παραγωγή της 1 δεν αλλάζει.
- Για θετικό ε:
  - Η παραγωγή της 2 μειώνεται.
  - Η τιμή πώλησης αυξάνεται.
  - Τα κέρδη της 1 αυξάνονται.
  - Τα κέρδη της 2 μειώνονται.
- Το ακριβώς αντίθετα συμπεράσματα προκύπτουν για αρνητικό ε.

Λύση με πλήρη πληροφόρηση (1/2)

- Τι θα γινόταν εάν η εταιρεία 1 γνώριζε την τιμή του ε;
- Οι συναρτήσεις καλύτερης απάντησης είναι οι:

$$Q_2(\varepsilon) = R_2^{\varepsilon}(Q_1) = \begin{cases} \dfrac{a-(c+\varepsilon)-bQ_1}{2b}, & \text{εάν } Q_1 \le \dfrac{a-(c+\varepsilon)}{b} \\ 0, & \text{εάν } Q_1 > \dfrac{a-(c+\varepsilon)}{b} \end{cases}$$

$$Q_1 = R_1(Q_2(\varepsilon)) = \begin{cases} \dfrac{a-c-bQ_2(\varepsilon)}{2b}, & \text{εάν } Q_2(\varepsilon) \le \dfrac{a-c}{b} \\ 0, & \text{εάν } Q_2(\varepsilon) > \dfrac{a-c}{b} \end{cases}$$

- Η μόνη διαφορά στις παραπάνω συναρτήσεις (σε σχέση με την περίπτωση ελλιπούς πληροφόρησης της εταιρείας 1) είναι ότι η καλύτερη απάντηση της 1 υπολογίζεται βάσει της πραγματικής παραγωγής $Q_2(\varepsilon)$ της εταιρείας 2 (και όχι της αναμενόμενης $Q_2(0)$.

Λύση με πλήρη πληροφόρηση (2/2)

- Το σημείο ισορροπίας Nash είναι πλέον το $Q_1^{\#}(\varepsilon)$, $Q_2^{\#}(\varepsilon)$:

$$Q_1^{\#}(\varepsilon) = \frac{a-c}{3b} + \frac{\varepsilon}{3b}, \qquad Q_2^{\#}(\varepsilon) = \frac{a-c}{3b} - \frac{2\varepsilon}{3b}$$

- Η τιμή και τα κέρδη των εταιρειών διαμορφώνονται ως:

$$P = P^* + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\pi_1^{\#}(\varepsilon) = (P^* + \frac{\varepsilon}{3} - c)(Q_1^* + \frac{\varepsilon}{3b})$$

$$\pi_2^{\#}(\varepsilon) = (P^* - \frac{2\varepsilon}{3} - c)(Q_2^* - \frac{2\varepsilon}{3b})$$

Συμπεράσματα

- Εάν η εταιρεία 1 γνωρίζει την τιμή του ε, τότε για ε>0:
  - Η εταιρεία 1 αυξάνει την παραγωγή της.
  - Η εταιρεία 2 μειώνει την παραγωγή της, και μάλιστα περισσότερο από όσο θα την μείωνε αν η 1 δεν γνώριζε την τιμή του ε.
  - Η τιμή είναι και πάλι αυξημένη σε σχέση με την τιμή για ε=0, αλλά λιγότερο από όταν η 1 δεν γνώριζε την τιμή του ε.
  - Τα κέρδη της εταιρείας 1 είναι ελαφρώς αυξημένα.
  - Τα κέρδη της εταιρείας 2 είναι σαφώς χαμηλότερα.
- Άρα, εάν ε>0, δεν συμφέρει στην εταιρεία 2 να φανερώσει το κόστος παραγωγής της.
- Ανάλογα (αλλά αντίθετα) συμπεράσματα προκύπτουν όταν ε<0. Μάλιστα, εάν ε<0, συμφέρει την εταιρεία 2 να φανερώσει το κόστος παραγωγής της στους αντιπάλους.
  - Συμπέρασμα: Εάν μια εταιρεία δεν φανερώνει το κόστος παραγωγής της, μάλλον αυτό είναι μεγάλο!

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ