ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

Ενότητα 4: Η τραγωδία των κοινών

Ρεφανίδης Ιωάννης

Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

The commons tragedy

Η τραγωδία των κοινών

Γενικά

- Η έννοια της ισορροπίας Nash και η μελέτη ολιγοπωλιακών αγορών μπορεί να εφαρμοστεί στη μελέτη της τραγωδίας ή του προβλήματος των κοινών (the commons tragedy).
- Ως κοινά θεωρούνται οι πόροι ή τα αγαθά τα οποία:
  – είναι προσβάσιμα σε όλους
  – η διαθεσιμότητα τους (τωρινή ή/και μελλοντική) μειώνεται με τη χρήση.
- Το πρόβλημα έγκειται στην υπερβολική χρήση των κοινόχρηστων πόρων:
  – Το όφελος από την υπερβολική χρήση κατευθύνεται σε λίγους.
  – Το κόστος από την υπερβολική χρήση μοιράζεται σε όλους!

Παραδείγματα

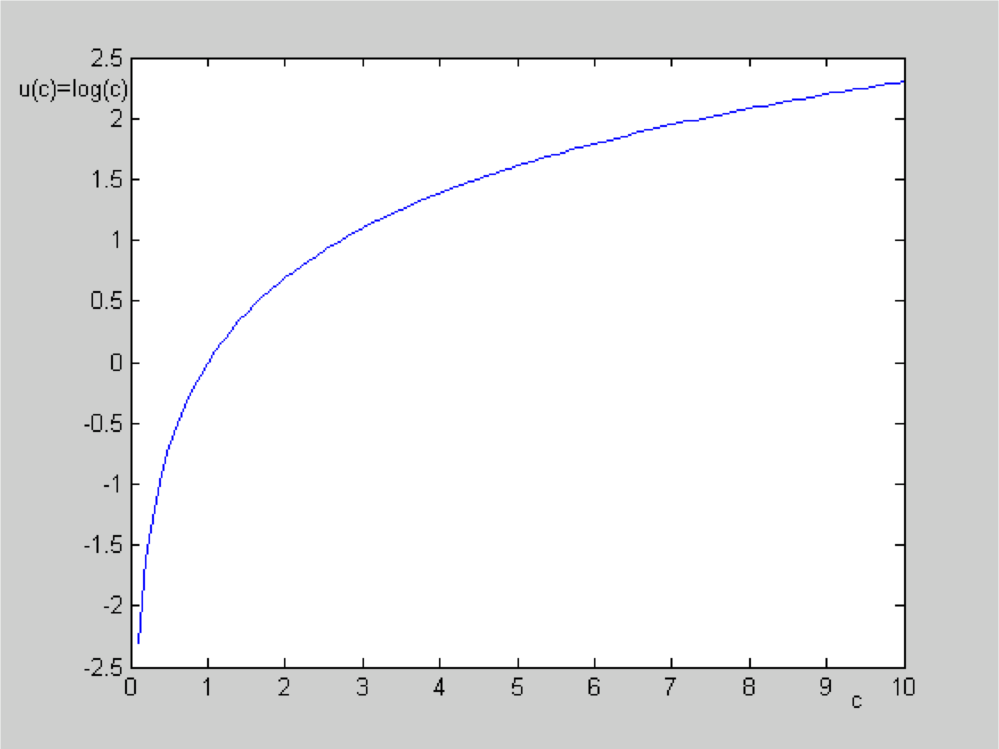
- Κυνηγοί και θηράματα
- Φαινόμενο του θερμοκηπίου.
  - Εταιρείες, έθνη κλπ δεν μειώνουν τις εκπομπές τους σε διοξείδιο του άνθρακα.
- Χρήση των modem του πανεπιστημίου.
- Διαφημίσεις (πινακίδες στους δρόμους, spam e-mails κλπ).

Ένα απλό μοντέλο (1/5)

- Έστω δύο παίκτες, A και B, και ένας κοινόχρηστος πόρος μεγέθους $y>0$.
- Σε κάθε χρονική περίοδο (π.χ. κάθε μέρα) κάθε παίκτης μπορεί να καταναλώσει μια μη-αρνητική ποσότητα του πόρου, c_A ή c_B, έτσι ώστε $c_A+c_B \leq y$.
- Εάν η συνολική ζήτηση είναι μεγαλύτερη από τη διαθέσιμη ποσότητα, αυτή μοιράζεται στους παίκτες, αλλιώς κάθε παίκτης λαμβάνει όσο ζήτησε.
- Για απλοποίηση θεωρούμε ότι το παιχνίδι διαρκεί δύο χρονικές περιόδους.

Ένα απλό μοντέλο (2/5)

- Έστω ότι το όφελος για κάθε παίκτη από την κατανάλωση ποσότητας c σε μια μέρα ισούται με:
  - u(c)=log(c)



Ένα απλό μοντέλο (3/5)

- Έστω ότι την πρώτη περίοδο κάθε παίκτης κατανάλωσε c_A και c_B ποσότητες αντίστοιχα.
- Την δεύτερη (και τελευταία) περίοδο κάθε παίκτης θα προσπαθήσει να καταναλώσει το μέγιστο της υπόλοιπης ποσότητας, η οποία είναι $y-c_A-c_B$.
- Έτσι, τη δεύτερη περίοδο κάθε παίκτης θα καταναλώσει:

$$\frac{y-c_A-c_B}{2}$$

- Το ερώτημα λοιπόν είναι ποιες πρέπει να είναι οι ποσότητες c_A και c_B.

Ένα απλό μοντέλο (4/5)

- Θα υπολογίσουμε για τον παίκτη A ποια είναι η καλύτερή του απάντηση για μια τυχαία κατανάλωση c_B του παίκτη B στον πρώτο γύρο.
- Έστω λοιπόν ότι ο παίκτης A καταναλώνει c_A στον πρώτο γύρο. Το αναμενόμενο συνολικό του όφελος (και για τους δύο γύρους) είναι:

$$\log c_A + \log \frac{y - c_A - c_B}{2}$$

- Η παραπάνω ποσότητα μεγιστοποιείται για:

$$c_A = R_A(c_B) = \frac{y - c_B}{2}$$

Ένα απλό μοντέλο (5/5)

- Με παρόμοιο συλλογισμό βρίσκουμε ότι η καλύτερη επιλογή του παίκτη B στον πρώτο γύρο είναι:

$$c_B = R_B(c_A) = \frac{y - c_A}{2}$$

- Ο συνδυασμός εκείνος, c_A* και c_B*, που αντιστοιχεί στο σημείο ισορροπίας Nash, καθώς και τα αντίστοιχα κέρδη είναι:

$$c_A^* = c_B^* = \frac{y}{3}$$

$$\pi_{\mathrm{A}}^* = \pi_B^* = \log\frac{y}{3} + \log\frac{y}{6}$$

Βέλτιστη λύση

- Η λύση που βρέθηκε με βάση το σημείο ισορροπίας Nash δεν είναι η βέλτιστη.
- Ας θεωρήσουμε ως βέλτιστη εκείνη τη λύση που μεγιστοποιεί το συνολικό όφελος για το σύνολο των παικτών και το σύνολο των περιόδων:

$$\pi_{o\lambda}^{\#} = \log c_A + \log c_B + 2 \cdot \log \frac{y - c_A - c_B}{2}$$

- η οποία μεγιστοποιείται για:

$$c_A^{\#} = c_B^{\#} = \frac{y}{4}$$

$$\pi_{o\lambda}^{\#} = 4 \cdot \log \frac{y}{4}$$

Παρατηρήσεις (1/2)

- Στο σημείο ισορροπίας Nash είδαμε ότι οι παίκτες υπερκαταναλώνουν στην πρώτη περίοδο, με αποτέλεσμα να μην υπάρχει επαρκής ποσότητα στη δεύτερη.
- Κάθε παίκτης ξεχωριστά δεν διακινδυνεύει να καταναλώσει λιγότερο στον πρώτο γύρο, γιατί η ποσότητα που θα περισσέψει θα μοιραστεί στο δεύτερο γύρο και στους δύο παίκτες.
- Αντίθετα, η βέλτιστη λύση βασίζεται στη συμφωνία (τύπου "καρτέλ") όλων των εμπλεκόμενων μερών για λογική κατανάλωση ανά περίοδο.

Παρατηρήσεις (2/2)

- Τα αποτελέσματα που προέκυψαν οφείλονται κατά κύριο λόγο στη μορφή της συνάρτησης χρησιμότητας (utility function), η οποία ήταν <u>κοίλη</u> (concave).
  - Τα ίδια αποτελέσματα θα προέκυπταν για οποιαδήποτε κοίλη συνάρτηση.
- Εάν η συνάρτηση ήταν γραμμική, δεν θα είχε σημασία σε ποια περίοδο γίνεται η κατανάλωση.
- Εάν τέλος η συνάρτηση ήταν κυρτή, τότε θα ήταν προτιμότερο όλη η κατανάλωση να γίνει σε μια περίοδο.

Πολλοί παίκτες (1/2)

- Εάν έχουμε περισσότερους παίκτες, έστω Ν, η κατάσταση χειροτερεύει:
  - Εάν ένας παίκτης αφήσει μια μονάδα για επόμενη περίοδο, θα μπορέσει να διεκδικήσει μόνο το 1/Ν αυτής.
- Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι στο σημείο ισορροπίας Nash κάθε παίκτης καταναλώνει στην πρώτη περίοδο:

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_N = \frac{y}{N+1}$$

- με συνολική κατανάλωση για την πρώτη περίοδο:

$$c_{o\lambda} = \frac{N \cdot y}{N+1}$$

Πολλοί παίκτες (2/2)

- Το συνολικό όφελος σε αυτή την περίπτωση είναι:

$$\pi^{*}_{o\lambda} = \mathrm{N} \cdot \log \frac{y^2}{N(N+1)^2}$$

- Αντίθετα, εάν υπολογιστούν τα ίδια μεγέθη με στόχο τη βελτιστοποίηση της συνολικής χρησιμότητας, προκύπτει:

$$c_1^{\#} = c_2^{\#} = \ldots = c_N^{\#} = \frac{y}{2 \cdot N}$$

$$\pi^{\#}_{o\lambda} = N \cdot \log \frac{y^2}{4 \cdot N^2}$$

Ιδιωτικοποίηση

- Μια πιθανή λύση στο πρόβλημα των κοινών είναι αυτό της ιδιωτικοποίησής τους.
  - Για παράδειγμα, στις μέρες μας οι περισσότερες εκτάσεις γης είναι ιδιωτικές, οπότε δεν υπάρχει ανταγωνισμός για τη χρήση τους (π.χ. ως βοσκοτόπους).
- Ωστόσο η ιδιωτικοποίηση ακυρώνει εντελώς την έννοια των κοινών πόρων, αφού αυτοί παύουν πλέον να είναι κοινοί.
- Επιπλέον, δεν είναι εφαρμόσιμοι σε πόρους όπως η ατμόσφαιρα κλπ.

Επιβολή τελών και όριο χρηστών

- Μια δεύτερη προσέγγιση είναι η επιβολή τελών χρήσης στους κοινόχρηστους πόρους (π.χ. το νερό).
  - Είναι η πιο συνηθισμένη προσέγγιση αντιμετώπισης του προβλήματος.
- Ζητούμενο είναι να βρεθεί εκείνο το τέλος χρήσης, ούτε πολύ χαμηλό, ούτε πολύ υψηλό, το οποίο θα οδηγήσει σε κανονική χρήση του πόρου.
  - Ένας συνηθισμένος τρόπος χρέωσης προβλέπει μεταβολή του τέλους χρήσης ανάλογα με την ζήτηση (π.χ. ζήτηση νερού το χειμώνα και το καλοκαίρι).
- Εναλλακτικά μπορεί να τεθεί ένα άνω όριο στο πλήθος των ταυτόχρονων χρηστών του πόρου.

Utility and Expected Utility

Χρησιμότητα και αναμενόμενη χρησιμότητα

Σχέσεις προτίμησης

- Μια σχέση προτίμησης (preference relation) είναι μια διμελής σχέση $\succsim$ μεταξύ διαφόρων στρατηγικών, τέτοια ώστε:
  - $a \succsim b \Leftrightarrow$ το αποτέλεσμα a είναι τουλάχιστον εξίσου καλό με το αποτέλεσμα b
- Η σχέση πρέπει να έχει τις παρακάτω ιδιότητες:
  - *Πληρότητα* (completeness): Για κάθε ζεύγος αποτελεσμάτων a και b, θα πρέπει να ισχύει είτε $a \succsim b$ ή $b \succsim a$.
  - *Μεταβατικότητα* (transitivity): Εάν ισχύει $a \succsim b$ και $b \succsim c$, τότε πρέπει να ισχύει και $a \succsim c$.
- Μπορούν να οριστούν οι παρακάτω σχέσεις:
  - $a \succ b \Leftrightarrow (a \succsim b) \wedge \neg(b \succsim a)$
  - $a \sim b \Leftrightarrow (a \succsim b) \wedge (b \succsim a)$

Χρησιμότητα

- Θα θέλαμε να αντιστοιχούμε έναν αριθμό σε κάθε αποτέλεσμα και απλά να συγκρίνουμε αριθμούς.
  - Ο αριθμός αυτός ονομάζεται **χρησιμότητα** (utility).
- Για παράδειγμα, έστω πέντε αποτελέσματα, (a,b,c,d,e), για τα οποία ισχύει:
  - $b \sim d \succ a \succ c \succ e$
- Θα μπορούσαμε να κάνουμε την αντιστοίχηση:
  - $(a,b,c,d,e) \rightarrow (3,4,2,4,1)$
- Η παραπάνω αντιστοίχηση χρησιμοτήτων είναι συνεπής (consistent) με τις προτιμήσεις μας.
- Προφανώς υπάρχουν άπειρες συνεπείς αντιστοιχήσεις χρησιμότητας.
  - Κάθε μονότονη συνάρτηση της παραπάνω αντιστοίχησης.

Αποφάσεις υπό αβεβαιότητα (1/3)

- Υπάρχουν περιπτώσεις όπου το αποτέλεσμα μιας στρατηγικής είναι αβέβαιο.
  - Εάν αποφασίσω να πάω κινηματογράφο, υπάρχει πιθανότητα .7 να βρω εισιτήριο και .3 να μην βρω.
  - Εάν παρακολουθήσω το μεταπτυχιακό Α, υπάρχει πιθανότητα .8 να βρω δουλειά και .2 να μην βρω.
- Σε αυτές τις περιπτώσεις, για να αξιολογήσουμε το αποτέλεσμα των αποφάσεών μας, πρέπει αυτές να έχουν αντιστοιχηθεί σε χρησιμότητες.
- Μια κατανομή πιθανοτήτων επάνω σε ένα σύνολο πιθανών αποτελεσμάτων ονομάζεται λοταρία (lottery).

Αποφάσεις υπό αβεβαιότητα (2/3)

- Έστω δύο αποφάσεις:
  - Πάω κινηματογράφο (0.7 να βρω εισιτήριο)
  - Πάω θέατρο (0.5 να βρω εισιτήριο)
- Έστω 10 η αξία που δίνω στην παρακολούθηση ενός έργου στον κινηματογράφο, 20 η αξία που δίνω στην παρακολούθηση ενός θεατρικού έργου και 0 η αξία του να μην παρακολουθήσω τίποτα.
  - Θεωρώ ότι δεν λαμβάνω υπόψη την τιμή του εισιτηρίου.
- Πρέπει να βρω τρόπο να αντιστοιχήσω χρησιμότητες στα αποτελέσματα των δύο αποφάσεων.

Αποφάσεις υπό αβεβαιότητα (3/3)

- Θεώρημα αναμενόμενης χρησιμότητας (Expected Utility Theorem, von Neumann - Morgenstern):
  - *Μια συνάρτηση χρησιμότητας πάνω σε ένα σύνολο από λοταρίες μπορεί να γραφεί ως η αναμενόμενη χρησιμότητα των διαφόρων ενδεχομένων που συνθέτουν τη λοταρία.*
- Όταν αρχίζουμε και συνδυάζουμε χρησιμότητες διαφορετικών αποτελεσμάτων για να υπολογίσουμε χρησιμότητες σύνθετων καταστάσεων, παίζει σημαντικό ρόλο ο τρόπος με τον οποίο έχουμε αποδώσει τις χρησιμότητες στα επιμέρους αποτελέσματα.

Το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης (1/3)

- Έστω το εξής παιχνίδι:
  - "Ρίχνουμε" ένα κέρμα πολλές φορές. Έστω k η πρώτη φορά κατά την οποία το αποτέλεσμα είναι "γράμματα". Τότε κερδίζουμε 2^k €.
- Ποιο είναι το αναμενόμενο κέρδος για αυτό το παιχνίδι; Πόσα θα ήμασταν διατεθειμένοι να ρισκάρουμε για να παίξουμε στο παιχνίδι αυτό;
- Το αναμενόμενο κέρδος είναι:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot 2^k = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$$

- Προφανώς κανείς δεν θα ρίσκαρε ένα μεγάλο ποσό για να παίξει σε αυτό το παιχνίδι!

Το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης (2/3)

- Το παράδοξο πρωτοαναφέρθηκε το 1725 στην ακαδημία της Αγίας Πετρούπολης, από τον Nicollas Bernoulli.
- Ο πρώτος που ανέφερε μια "λύση" στο παράδοξο είναι ο Daniel Bernoulli, αδελφός του Nicollas.
- Η κεντρική ιδέα της λύσης είναι η εξής:
  – *Η χρησιμότητα ενός χρηματικού ποσού (γενικότερα ενός αγαθού) δεν είναι ανάλογη της ποσότητάς του.*
- Με άλλα λόγια, διπλάσιο χρηματικό ποσό δεν μας δίνει διπλάσια χαρά.
- Το πρόβλημα λοιπόν έγκειται στην αντιστοίχηση της ποσότητας των υλικών αγαθών με τη χρησιμότητα που αυτά έχουν για μας.

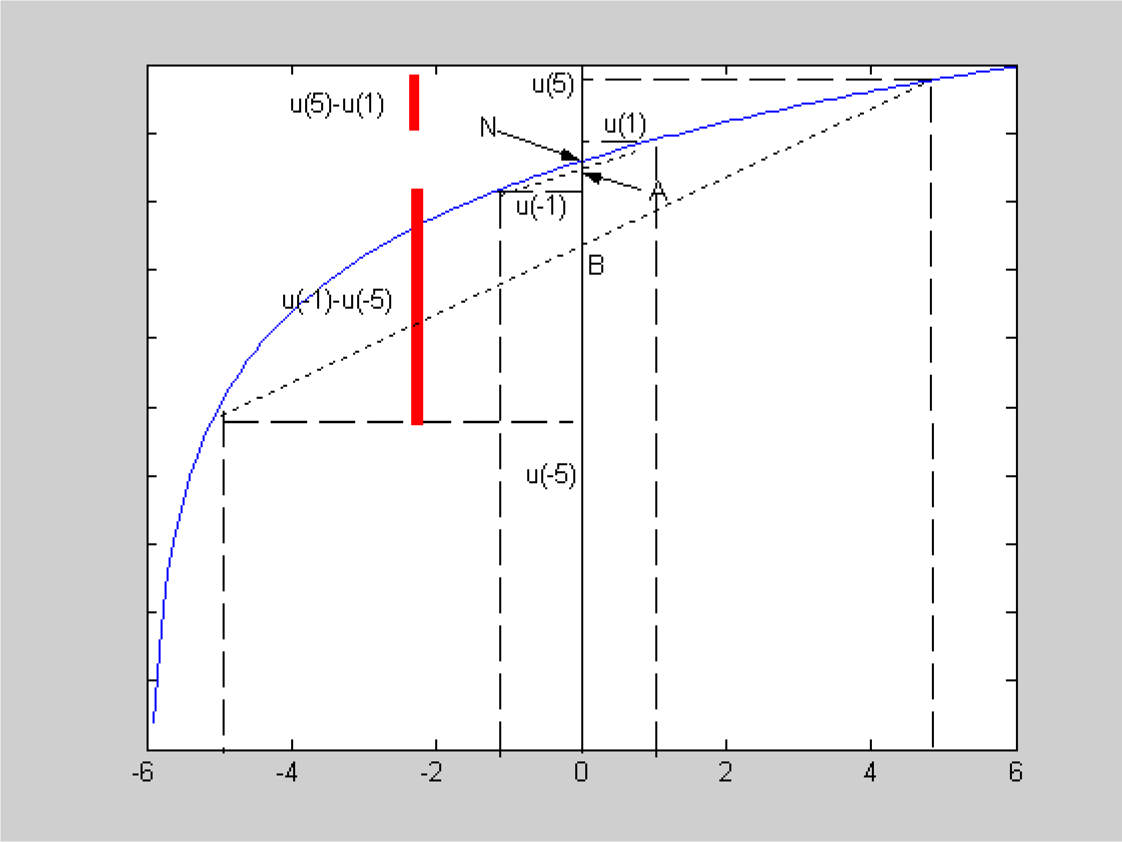
Αποστροφή ρίσκου (1/4)

- Έστω δύο λοταρίες, Α και Β, στις οποίες ρίχνουμε ένα κέρμα και αναλόγως το αποτέλεσμα:
  - Λοταρία Α: Εάν έρθουν γράμματα κερδίζουμε 1€, εάν έρθει κορώνα χάνουμε 1€.
  - Λοταρία Β: Εάν έρθουν γράμματα κερδίζουμε 5€, εάν έρθει κορώνα χάνουμε 5€.
- Οι περισσότεροι άνθρωποι θα επέλεγαν να συμμετάσχουν στην Α αντί στην Β (ακόμη περισσότεροι επίσης θα επέλεγαν να μην "παίξουν" καθόλου!).
- Οι δύο λοταρίες έχουν την ίδια αναμενόμενη απόδοση, δηλαδή 0€.
  - Ωστόσο έχουν διαφορετικές αναμενόμενες χρησιμότητες.

Αποστροφή ρίσκου (2/4)

- Έστω u(-5), u(-1), u(1) και u(5) οι χρησιμότητες των διαφόρων αποτελεσμάτων.
- Το γεγονός ότι οι περισσότεροι άνθρωποι επιλέγουν την A από την B δηλώνει ότι:
  - $\frac{1}{2}[u(1)+u(-1)]>\frac{1}{2}[u(5)+u(-5)]$
- ή ισοδύναμα:
  - $u(5)-u(1)<u(-1)-u(-5)$
- Κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί εάν η συνάρτηση χρησιμότητας έχει τη μορφή που φαίνεται στην επόμενη διαφάνεια.

Αποστροφή ρίσκου (3/4)



Αποστροφή ρίσκου (4/4)

- Στην προηγούμενη διαφάνεια:
  - Το σημείο N αντιστοιχεί στην αναμενόμενη χρησιμότητα του να μην παίξουμε καθόλου.
  - Το σημείο A αντιστοιχεί στην αναμενόμενη χρησιμότητα του να επιλέξουμε το παιχνίδι A.
  - Το σημείο B αντιστοιχεί στην αναμενόμενη χρησιμότητα του να επιλέξουμε το παιχνίδι B.
- Βλέπουμε ότι μεγαλύτερη χρησιμότητα αντιστοιχεί στο σημείο N, μετά στο A και μετά στο B.
- Τα παραπάνω αποτελέσματα προέκυψαν εξαιτίας της ειδικής μορφής της συνάρτησης χρησιμότητας, η οποία είναι κοίλη (concave).
  - Ισχύουν για όλες τις κοίλες συναρτήσεις.

Το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης (3/3)

- Εάν στο παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης ορίσουμε μια κοίλη συνάρτηση χρησιμότητας, π.χ. u(x)=log(x+c), τότε η αναμενόμενη χρησιμότητα από το παιχνίδι είναι:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \log(2^k + c) < \infty$$

- Άρα ο παίκτης πρέπει να βρει ποιο είναι το μέγιστο ποσό -K που θα διακινδύνευε να χάσει, έτσι ώστε η αναμενόμενη χρησιμότητα να είναι μεγαλύτερη του μηδέν.

Μη-κοίλες συναρτήσεις

- Σε περίπτωση που η συνάρτηση χρησιμότητας ήταν γραμμική, δηλαδή u(x)=a·x, τότε λοταρίες σαν τις Α και Β είναι ίσης προτίμησης.
  - Μικρά τμήματα μιας κοίλης συνάρτησης χρησιμότητας μπορούν να θεωρηθούν γραμμικά.
    - Εφαρμογή σε τυχερά παιχνίδια
- Σε περίπτωση που η συνάρτηση χρησιμότητας ήταν κυρτή (convex), τότε θα προτιμούσαμε το παιχνίδι Β !

Mixed strategies

Μικτές στρατηγικές

Γενικά

- Έστω η μάχη των φύλων. Κάθε παίκτης έχει δύο διαθέσιμες στρατηγικές, Γήπεδο ή Όπερα.
- Ωστόσο υπάρχει (τουλάχιστον) μια ακόμη στρατηγική:
  - "Στρίβουμε" ένα κέρμα και αν έρθει "γράμματα" πάμε στο γήπεδο, εάν έρθει "κορώνα" πάμε στην όπερα.
- Η τελευταία στρατηγική ονομάζεται *μικτή στρατηγική* (mixed strategy) και μεταφράζεται σε 50% πιθανότητα να επιλέξει ο παίκτης το Γήπεδο και 50% πιθανότητα να επιλέξει την Όπερα.
- Υπάρχουν άπειρες μικτές στρατηγικές, ανάλογα με τις πιθανότητες που δίνουμε στις διάφορες επιλογές.

Ορισμός

- Έστω ότι ένας παίκτης έχει Μ καθαρές (pure) στρατηγικές, s_1, s_2, ..., s_M. Μια μικτή στρατηγική για αυτόν τον παίκτη είναι μια κατανομή πιθανότητας επί των καθαρών στρατηγικών του:
  – (p_1, p_2, ..., p_M), έτσι ώστε $p_1+p_2+...+p_M=1$.
- Η αξιολόγηση της αναμενόμενης χρησιμότητας μιας μικτής στρατηγικής γίνεται αθροίζοντας τα γινόμενα των (αναμενόμενων) αποτελεσμάτων των επιμέρους στρατηγικών επί τις αντίστοιχες πιθανότητες.

Παράδειγμα

- Παρακάτω φαίνεται το παιχνίδι της μάχης των φύλων, με μια επιπλέον στρατηγική για κάθε παίκτη:

Γ Α	Γήπεδο	Όπερα	0.5-0.5
Γήπεδο	3,1	0,0	1.5, 0.5
Όπερα	0,0	1,3	0.5, 1.5
0.5-0.5	1.5, 0.5	0.5, 1.5	1, 1

Καλύτερη απάντηση με μικτές στρατηγικές (1/2)

- Έστω μια μικτή στρατηγική s_m που αποτελείται από τρεις καθαρές στρατηγικές, s_{i1}, s_{i2} και s_{i3}, με πιθανότητες p_1, p_2 και p_3.
- Έστω ότι οι αντίπαλοι εφαρμόζουν συνολικά τη στρατηγική s_{-i}.
- Τότε το όφελος για τον παίκτη i είναι:
  - $u(s_m,s_{-i})=p_1 \cdot u(s_{i1},s_{-i})+ p_2 \cdot u(s_{i2},s_{-i})+ p_3 \cdot u(s_{i3},s_{-i})$
- Ας υποθέσουμε ότι $u(s_{i1},s_{-i})>u(s_{i2},s_{-i})>u(s_{i3},s_{-i})$.
- Τότε θα συνέφερε τον παίκτη i να παίξει την καθαρή στρατηγική s_{i1}, αντί της μικτής στρατηγικής m !

Καλύτερη απάντηση με μικτές στρατηγικές (2/2)

- Για να είναι λοιπόν μια μικτή στρατηγική m η καλύτερη απάντηση σε έναν συνδυασμό στρατηγικών s_{-i} των υπολοίπων παικτών, θα πρέπει κάθε επιμέρους καθαρή στρατηγική της μικτής στρατηγικής να είναι από μόνη της επίσης η καλύτερη απάντηση.
- Δηλαδή $u(s_m,s_{-i})=u(s_{i1},s_{-i})=u(s_{i2},s_{-i})=u(s_{i3},s_{-i})$
- Σε αυτή την περίπτωση, κάθε συνδυασμός (p_1',p_2',p_3') των επιμέρους στρατηγικών είναι καλύτερη απάντηση στο συνδυασμό στρατηγικών s_{-i}.

Μικτές στρατηγικές και ισορροπία Nash (1/5)

- Έστω το παιχνίδι "μονά-ζυγά", στο οποίο δεν υπάρχει κανένα σημείο ισορροπίας Nash.
- Ας υποθέσουμε ότι ο παίκτης A επιλέγει να παίζει '0' με πιθανότητα p.
- Εάν ο παίκτης B παίξει καθαρά '0', τότε το αναμενόμενο όφελός του είναι:
  - $Eu_B('0')=p\cdot 0+(1-p)\cdot 1=1-p$
- Παρόμοια, εάν ο παίκτης B παίξει καθαρά '1', το αναμενόμενο όφελός του είναι:
  - $Eu_B('1')=p\cdot 1+(1-p)\cdot 0=p$
- Προφανώς ισχύει:
  - $Eu_B('0')>Eu_B('1') \Leftrightarrow (1-p)>p \Leftrightarrow p<½$

B A	0	1
0	1,0	0,1
1	0,1	1,0

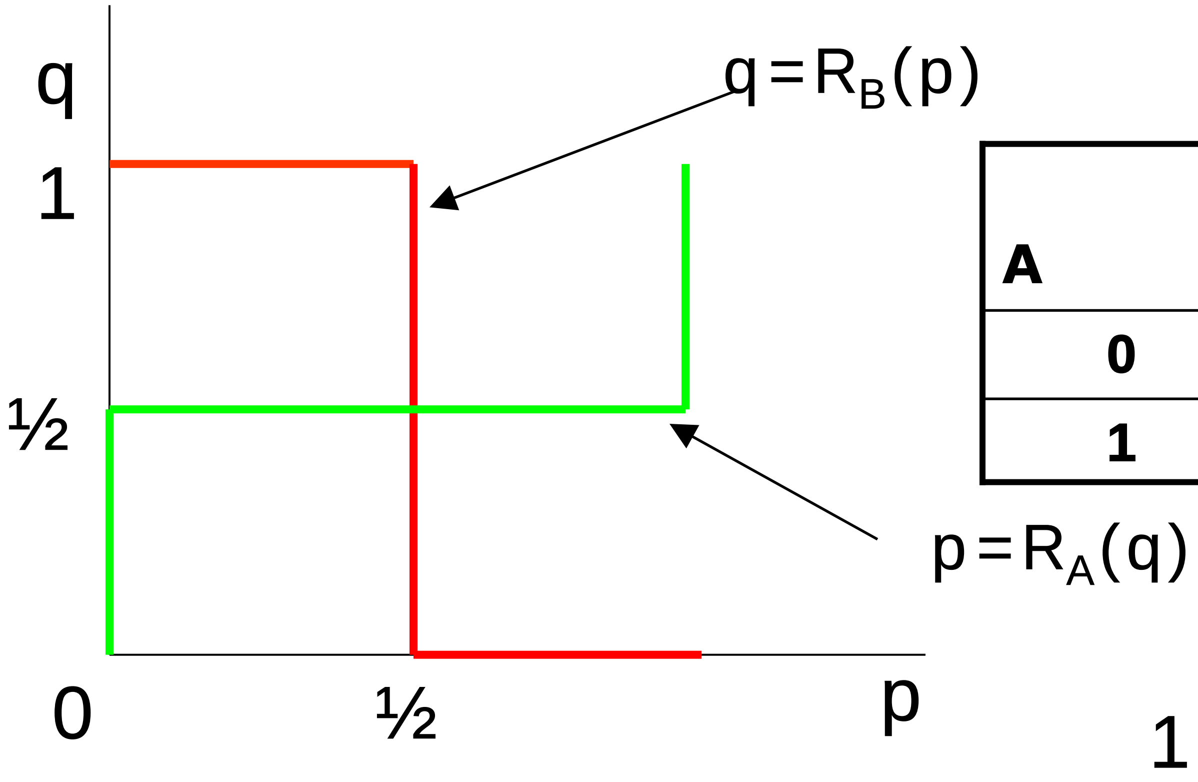
Μικτές στρατηγικές και ισορροπία Nash (2/5)

- Εάν p= ½, τότε ο παίκτης Β μπορεί να επιλέξει οποιαδήποτε στρατηγική, είτε την '0', είτε την ΄1΄, είτε ακόμη οποιαδήποτε μικτή στρατηγική από αυτές τις δύο.
- Άρα, μεταξύ άλλων, η μικτή στρατηγική (0.5, 0.5) για τον παίκτη Β, είναι καλύτερη απάντηση στην μικτή στρατηγική (0.5,0.5) του παίκτη Α.
- Με παρόμοιο συλλογισμό μπορεί να βρεθεί ότι ισχύει και το ακριβώς αντίστροφο για τους δύο παίκτες.
- Στο επόμενο διάγραμμα με q συμβολίζεται η πιθανότητα με την οποία ο παίκτης Β επιλέγει '0'.

B / **A**	**0**	**1**
0	1,0	0,1
1	0,1	1,0

Μικτές στρατηγικές και ισορροπία Nash (3/5)

- Οι γραφικές παραστάσεις καλύτερης απάντησης για τους δύο παίκτες είναι οι εξής:



B / A	0	1
0	1,0	0,1
1	0,1	1,0

Μικτές στρατηγικές και ισορροπία Nash (4/5)

- Άρα το ζεύγος στρατηγικών (0.5, 0.5) – (0.5, 0.5) αποτελεί σημείο ισορροπίας Nash, διότι:
- Κανένας παίκτης δεν έχει λόγο να ξεφύγει από το σημείο αυτό, γιατί δεν πρόκειται να κερδίσει άμεσα.
- Οποιοσδήποτε παίκτης ξεφύγει από αυτό το σημείο δίνει τη δυνατότητα στον άλλο παίκτη να το εκμεταλλευτεί.
  - Για παράδειγμα, εάν στα "μονά-ζυγά" κάποιος παίκτης δείχνει για πολλή ώρα προτίμηση σε ένα από τα δύο νούμερα, δίνει τη δυνατότητα στον άλλο παίκτη να κερδίσει μερικούς "πόντους".

B / **A**	**0**	**1**
0	1,0	0,1
1	0,1	1,0

Μικτές στρατηγικές και ισορροπία Nash (5/5)

- Όλα τα παιχνίδια έχουν τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας Nash στις μικτές στρατηγικές.
  – Δεν έχουν ωστόσο όλα τα παιχνίδια σημείο ισορροπίας Nash στις καθαρές στρατηγικές, όπως είδαμε στο παιχνίδι "μονά-ζυγά".
- Το σημείο ισορροπίας Nash στις μικτές στρατηγικές έχει διαφορετική ερμηνεία:
  – Ένας παίκτης δεν "φεύγει" από αυτό, γιατί:
    - δεν θα κερδίσει άμεσα
    - μπορεί να χάσει μελλοντικά
- Αντίθετα, στα σημεία καθαρής ισορροπίας, ένας παίκτης δεν φεύγει γιατί θα χάσει άμεσα.

Παράδειγμα: Τένις (1/5)

- Έστω δύο παίκτες που παίζουν τένις, Α και Β.
- Κάθε φορά που είναι η σειρά του Α να χτυπήσει την μπάλα, πρέπει να επιλέξει εάν θα σημαδέψει το εμπρός ή το πίσω μέρος του γηπέδου του Β.
- Αντίστοιχα, ο Β πρέπει να αποφασίσει αν θα τοποθετηθεί στο εμπρός ή στο πίσω μέρος του χώρου του.
- Η πιθανότητα για τον Α να έχει ένα επιτυχημένο χτύπημα αυξάνει όταν "ξεγελάσει" τον Β.
- Στον πίνακα που ακολουθεί θεωρούμε ως όφελος κάθε παίκτη την (εκατοστιαία) πιθανότητα να κερδίσει τον γύρο ανάλογα με τις επιλογές και των δύο παικτών.

Παράδειγμα: Τένις (2/5)

- Εάν ο παίκτης Α επιλέγει πάντα 'Εμπρός', τότε ο παίκτης Β μπορεί και αυτός με τη σειρά του να επιλέγει πάντα 'Εμπρός' κερδίζοντας στο 70% των περιπτώσεων.
- Έστω p και q οι πιθανότητες με τις οποίες ο Α και ο Β επιλέγουν 'Εμπρός' αντίστοιχα.
- Για να μειώσει τη δυνατότητα πρόβλεψης του Β, ο Α επιλέγει την πιθανότητα p με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι ισοδύναμες για τον Β οι δύο αποφάσεις του:
  - Eu_B(Εμπρός)=p·70+(1-p) ·30
  - Eu_B(Πίσω)=p·20+(1-p) ·60
  - Eu_B(Εμπρός)=Eu_B(Πίσω) ⇔ p=0.375

Β / **Α**	**(q) Εμπρός**	**(1-q) Πίσω**
(p) Εμπρός	30,70	80, 20
(1-p) Πίσω	70, 30	40, 60

Παράδειγμα: Τένις (3/5)

- Παρόμοια, ο παίκτης Β επιλέγει την πιθανότητα q με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι ισοδύναμες για τον Α οι δύο αποφάσεις του:
  - Eu_A(Εμπρός)=q·30+(1-q) ·80
  - Eu_A(Πίσω)=q·70+(1-q) ·40
  - Eu_A(Εμπρός)=Eu_B(Πίσω) $\Leftrightarrow$ q=0.5
- Άρα το ζεύγος στρατηγικών (0.375, 0.625) για τον Α και (0.5, 0.5) για τον Β αποτελούν σημείο ισορροπίας Nash.

B **A**	**(q)** **Εμπρός**	**(1-q)** **Πίσω**
(p) Εμπρός	30,70	80,20
(1-p) Πίσω	70,30	40,60

Παράδειγμα: Τένις (4/5)

- Τα αναμενόμενα κέρδη των δύο παικτών στο σημείο αυτό είναι:
  - $Eu_A=p\cdot Eu_A(\text{Εμπρός})+(1-p)\cdot Eu_A(\text{Πίσω}) = 0.375\cdot 55+0.615\cdot 55=55$
  - $Eu_B=q\cdot Eu_B(\text{Εμπρός})+(1-q)\cdot Eu_B(\text{Πίσω}) = 0.5\cdot 45+0.5\cdot 45=45$
- Το ίδιο αποτέλεσμα (όσον αφορά τις τελευταίες πράξεις) προκύπτει και από τους τύπους που δίνουν είτε το Eu_A(Εμπρός) ή το Eu_A(Πίσω) για τον A, και παρόμοια για τον B.
  - Αυτό οφείλεται στο ότι στο σημείο ισορροπίας η μικτή στρατηγική που ακολουθεί κάθε παίκτης έχει τα ίδια αναμενόμενα οφέλη με κάθε επιμέρους καθαρή στρατηγική, με την προϋπόθεση ότι ο αντίπαλος δεν θα αλλάξει τη δική του μικτή στρατηγική.

B A	(q) Εμπρός	(1-q) Πίσω
(p) Εμπρός	30,70	80,20
(1-p) Πίσω	70,30	40,60

Παράδειγμα: Τένις (5/5)

- Ας υποθέσουμε ότι ένας παίκτης αλλάζει τη μικτή στρατηγική του, π.χ. ο Α επιλέγει p=0.5.
- Σε αυτή την περίπτωση ο Β μπορεί να τροποποιήσει τη δική του στρατηγική ώστε να μεγιστοποιήσει το δικό του όφελος.
- Πράγματι, για p=0.5, ισχύει για τον Β:
  - Eu_B(Εμπρός)=0.5·70 + 0.5·30 = 50
  - Eu_B(Πίσω)=0.5·20 + 0.5·60 = 40
- Ο Β λοιπόν επιλέγει να παίζει συνέχεια "Εμπρός", ανεβάζοντας το αναμενόμενο όφελός του σε 50 (και αντίστοιχα μειώνοντας το αναμενόμενο όφελος του Α).

B A	(q) Εμπρός	(1-q) Πίσω
(p) Εμπρός	30,70	80,20
(1-p) Πίσω	70,30	40,60

Παρατηρήσεις (1/2)

- Τα παραδείγματα που προηγήθηκαν είχαν ένα κοινό χαρακτηριστικό: Αφορούσαν παιχνίδια μηδενικού (ή σταθερού) αθροίσματος.
- Στα παιχνίδια αυτά όταν ο ένας παίκτης κερδίζει κάποιο ποσό τότε ο άλλος χάνει το ίδιο ποσό.
  – Ανταγωνιστικά παιχνίδια (competitive games)
- Στα σημεία αυτά, το σημείο μικτής ισορροπίας Nash μοιάζει αρκετά με τα αντίστοιχα σημεία καθαρής ισορροπίας Nash, αφού οποιοσδήποτε παίκτης ξεφύγει από αυτό κινδυνεύει να χάσει.

Παρατηρήσεις (2/2)

- Ωστόσο, υπάρχουν παιχνίδια μη-σταθερού αθροίσματος, όπως η μάχη των δύο φύλων, στα οποία εάν ο ένας παίκτης αντιληφθεί τι προτίθεται να κάνει ο άλλος, μπορεί να το εκμεταλλευτεί για κοινό όφελος!
- Τέτοια παιχνίδια ονομάζονται συνεργατικά (cooperative).
  - ΠΡΟΣΟΧΗ: Δεν είναι όλα τα παιχνίδια μη-σταθερού αθροίσματος συνεργατικά.
- Στα παιχνίδια αυτά ορίζεται και πάλι η έννοια της μικτής ισορροπίας Nash, ωστόσο έχει διαφορετική ερμηνεία.

Παράδειγμα: Η μάχη των φύλων (1/3)

- Έστω το γνωστό παράδειγμα της μάχης των φύλων, το οποίο έχει δύο σημεία καθαρής ισορροπίας Nash.
- Θα ελέγξουμε εάν υπάρχουν σημεία μικτής ισορροπίας.
- Έστω ότι ο Α επιλέγει 'Γήπεδο' με πιθανότητα p και 'Όπερα' με πιθανότητα 1-p.
- Το αναμενόμενο όφελος της Γ για τις δύο καθαρές στρατηγικές της είναι:
  - $Eu_Γ$('Γήπεδο')=p·1+(1-p) ·0 = p
  - $Eu_Γ$('Όπερα')=p·0+(1-p) ·3 = 3-3·p

Γ Α	Γήπεδο	Όπερα
Γήπεδο	3,1	0,0
Όπερα	0,0	1,3

Παράδειγμα: Η μάχη των φύλων (2/3)

- Ισχύει:
  - $Eu_Γ$('Γήπεδο') > $Eu_Γ$('Όπερα') ⇔ p > 3-3p ⇔ p > ¾ .
- Άρα:
  - αν p > ¾ συμφέρει τη γυναίκα να επιλέγει πάντα 'Γήπεδο'.
  - αν p < ¾ συμφέρει τη γυναίκα να επιλέγει πάντα 'Όπερα'.
  - αν p = ¾ συμφέρει τη γυναίκα εξίσου να επιλέγει είτε 'Γήπεδο΄είτε 'Όπερα' είτε τέλος οποιονδήποτε συνδυασμό αυτών.
    - Για p= ¾ το αναμενόμενο όφελος της Γ είναι $Eu_Γ$=¾.
- Παρόμοια για τον άντρα, εάν η γυναίκα επιλέγει 'Όπερα' με πιθανότητα (1-q)=¾, τότε αυτός μπορεί να επιλέξει οποιαδήποτε στρατηγική (καθαρή ή μικτή) ως καλύτερη απάντηση.

Γ Α	Γήπεδο	Όπερα
Γήπεδο	3,1	0,0
Όπερα	0,0	1,3

Παράδειγμα: Η μάχη των φύλων (3/3)

- Άρα, ο συνδυασμός μικτών στρατηγικών (¾,¼)-(¼,¾) αποτελεί σημείο ισορροπίας Nash.
- Στο σημείο αυτό το αναμενόμενο όφελος κάθε παίκτη είναι ίσο με $Eu_A=Eu_\Gamma=¾$.
- Εάν οι παίκτες ξεφύγουν από το σημείο ισορροπίας Nash, το πιο πιθανό είναι να αυξηθεί το αναμενόμενο όφελος και για τους δύο!
  - Για παράδειγμα, για p=q=1/2 έχουμε:
    - $Eu_A= ½·½·3 + ½·½·0 + ½·½·0 + ½·½·1 = 1$
    - $Eu_\Gamma= ½·½·1 + ½·½·0 + ½·½·0 + ½·½·3 = 1$
- Ωστόσο μπορεί και να μειωθεί (μηδενισθεί), εάν π.χ. επιλέξουν {p=1,q=0} ή {p=0,q=1}.

Γ Α	Γήπεδο	Όπερα
Γήπεδο	3,1	0,0
Όπερα	0,0	1,3

Παρατηρήσεις

- Το παιχνίδι της μάχης των δύο φύλων είναι συνεργατικό (και όχι ανταγωνιστικό).
- Σε τέτοια παιχνίδια μας ενδιαφέρει ο αντίπαλος να μάθει τη στρατηγική που πρόκειται να εφαρμόσουμε, γιατί μπορεί να την αξιοποιήσει για κοινό όφελος.
- Το σημείο μικτής ισορροπίας Nash είναι το σημείο απόλυτης έλλειψης πληροφόρησης για τις προθέσεις του αντιπάλου.
- Το σημείο μικτής ισορροπίας Nash μας <u>εξασφαλίζει</u> ένα <u>ελάχιστο αναμενόμενο όφελος</u>, ανεξάρτητα από το τι θα επιλέξει να κάνει ο αντίπαλος.
  – Για παράδειγμα, εάν ο άντρας επέλεγε τη στρατηγική (1/2,1/2), τότε η γυναίκα μπορούσε να επιλέξει τη στρατηγική (0,1), με αναμενόμενο όφελος για τον άνδρα 0,5 και για τη γυναίκα 1,5.

Τέλος Ενότητας

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης