ΘΕΩΡΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ ΚΑΙ ΑΥΤΟΜΑΤΩΝ

Ενότητα 13: Πολυωνυμική αναγωγή

Ρεφανίδης Ιωάννης

Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

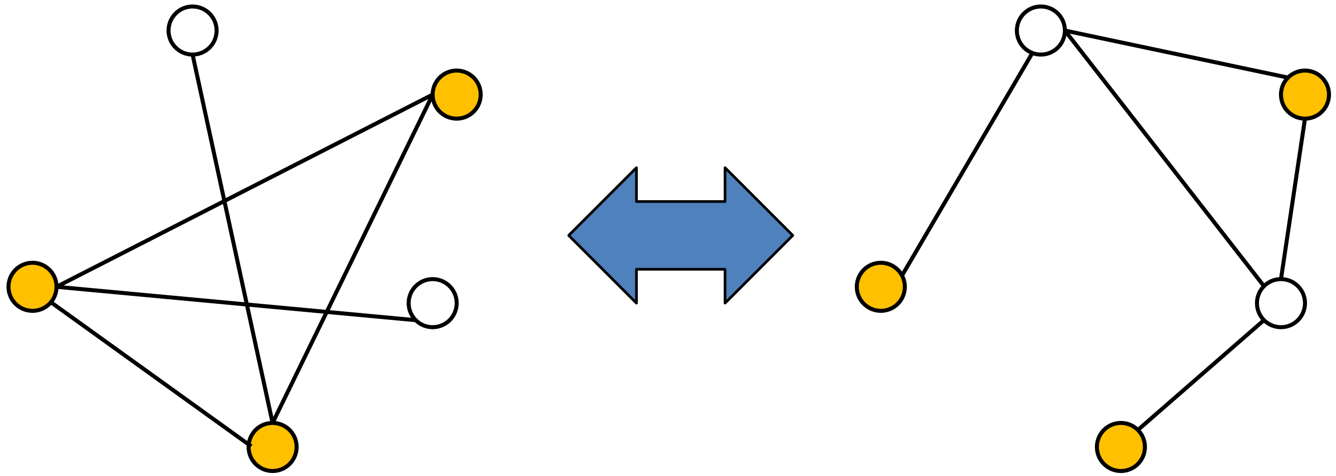
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Αναγωγές

Κλίκα – Ανεξάρτητο Σύνολο (1/2)

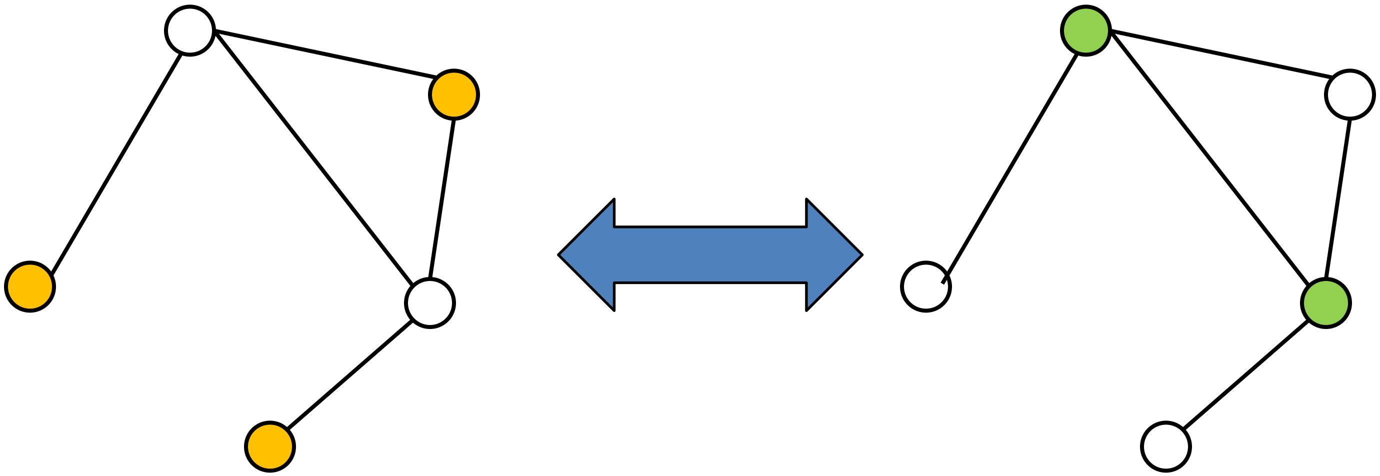
- Μέγιστη κλίκα: Το μέγιστο πλήθος κορυφών που συνδέονται όλες με όλες.
- Ανεξάρτητο σύνολο: Το μέγιστο σύνολο κορυφών που δεν υπάρχει καμία σύνδεση μεταξύ τους.
- Έστω G=(V,E) ο γράφος στον οποίο θέλουμε να βρούμε τη μέγιστη κλίκα.
- Έστω G'=(V,E') ένας νέος γράφος με το ίδιο πλήθος κορυφών και με ακμές:
  – $E' = \{(v_1,v_2) : v_1 \in V,\ v_2 \in V,\ (v_1,v_2) \notin E\}$

Κλίκα – Ανεξάρτητο Σύνολο (2/2)



Ανεξάρτητο σύνολο – Κάλυμμα κόμβων

- Σε έναν γράφο, κάθε κόμβος που δεν είναι στο μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο, ανήκει στο ελάχιστο κάλυμμα κόμβων.

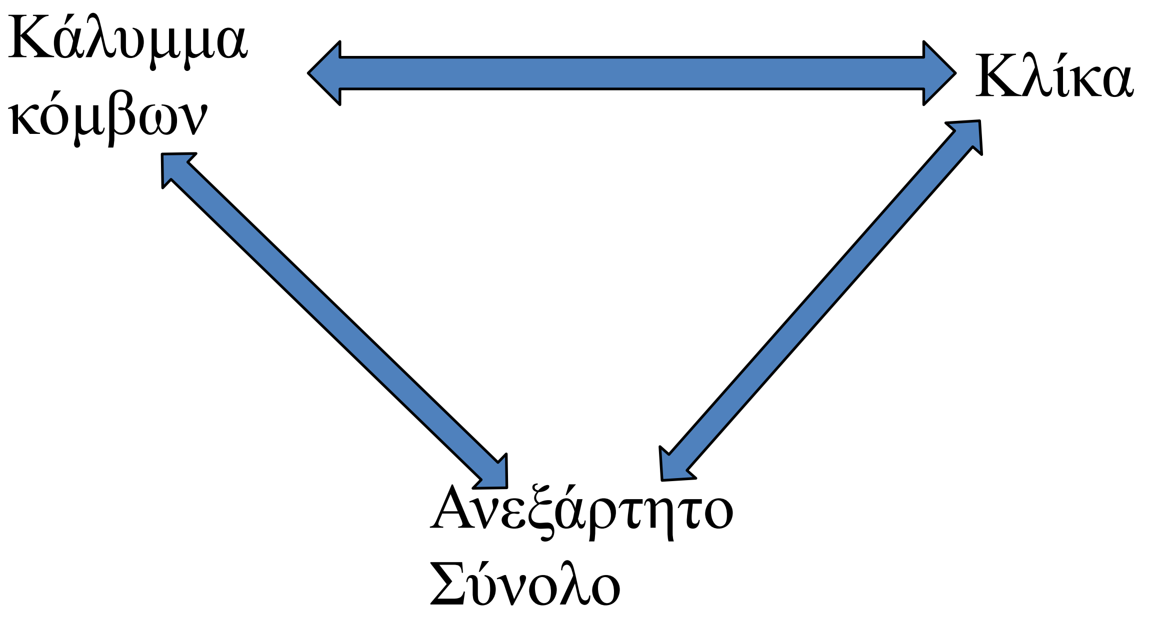


Πολυωνυμική αναγωγή

- Μια συνάρτηση $f:\Sigma^* \to \Sigma^*$ ονομάζεται υπολογίσιμη σε πολυωνυμικό χρόνο αν υπάρχει μια πολυωνυμικά φραγμένη Turing M που την υπολογίζει.
- Έστω οι γλώσσες $L_1, L_2 \in \Sigma^*$. Μια συνάρτηση υπολογίσιμη σε πραγματικό χρόνο $\tau:\Sigma^* \to \Sigma^*$ ονομάζεται πολυωνυμική αναγωγή από την L_1 στην L_2 αν για κάθε $x \in \Sigma^*$ ισχύει $x \in L_1 \Leftrightarrow \tau(x) \in L_2$.

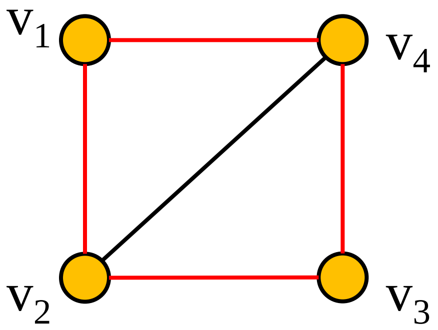
Πολυωνυμικές αναγωγές προβλημάτων

- Διπλές πολυωνυμικές αναγωγές
  – Αν ένα πρόβλημα ανήκει στο $\mathcal{P}$, τότε όλα ανήκουν στο $\mathcal{P}$.



Κύκλος Hamilton → Ικανοποιησιμότητα (1/7)

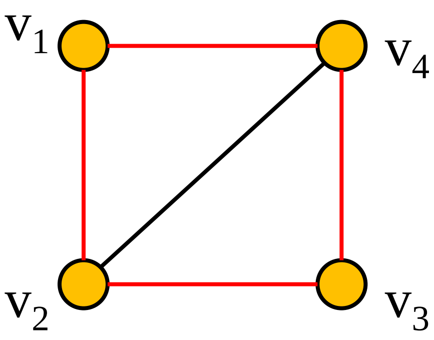
- Πρέπει να βρούμε έναν τύπο Bool που να περιγράφει το πρόβλημα Hamilton, έτσι ώστε ο γράφος να είναι Hamilton αν και μόνο αν ο τύπος Bool είναι ικανοποιήσιμος.



- Ορίζουμε μεταβλητές x_{ij}, $1 \le i,j \le 4$, με τη σημασία ότι ο i κόμβος εμφανίζεται στη θέση j του κύκλου Hamilton.

Κύκλος Hamilton → Ικανοποιησιμότητα (2/7)

- Κάθε κόμβος πρέπει να εμφανίζεται τουλάχιστον μια φορά στον κύκλο:
  - $(x_{11} \vee x_{12} \vee x_{13} \vee x_{14})$
  - $(x_{21} \vee x_{22} \vee x_{23} \vee x_{24})$
  - $(x_{31} \vee x_{32} \vee x_{33} \vee x_{34})$
  - $(x_{41} \vee x_{42} \vee x_{43} \vee x_{44})$

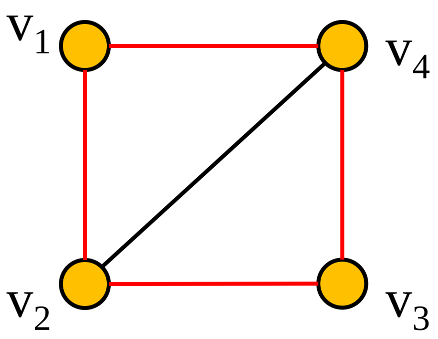


Κύκλος Hamilton → Ικανοποιησιμότητα (3/7)

- Κάθε κόμβος εμφανίζεται το πολύ μια φορά στον κύκλο:
  - $(x'_{11} \vee x'_{12}) \wedge (x'_{11} \vee x'_{13}) \wedge (x'_{11} \vee x'_{14}) \wedge (x'_{12} \vee x'_{13}) \wedge (x'_{12} \vee x'_{14}) \wedge (x'_{13} \vee x'_{14})$
  - $(x'_{21} \vee x'_{22}) \wedge (x'_{21} \vee x'_{23}) \wedge (x'_{21} \vee x'_{24}) \wedge (x'_{22} \vee x'_{23}) \wedge (x'_{22} \vee x'_{24}) \wedge (x'_{23} \vee x'_{24})$
  - $(x'_{31} \vee x'_{32}) \wedge (x'_{31} \vee x'_{33}) \wedge (x'_{31} \vee x'_{34}) \wedge (x'_{32} \vee x'_{33}) \wedge (x'_{32} \vee x'_{34}) \wedge (x'_{33} \vee x'_{34})$
  - $(x'_{41} \vee x'_{42}) \wedge (x'_{41} \vee x'_{43}) \wedge (x'_{41} \vee x'_{44}) \wedge (x'_{42} \vee x'_{43}) \wedge (x'_{42} \vee x'_{44}) \wedge (x'_{43} \vee x'_{44})$

Κύκλος Hamilton → Ικανοποιησιμότητα (4/7)

- Σε κάθε θέση του κύκλου Hamilton εμφανίζεται τουλάχιστον ένας κόμβος:
  - $(x_{11} \vee x_{21} \vee x_{31} \vee x_{41})$
  - $(x_{12} \vee x_{22} \vee x_{32} \vee x_{42})$
  - $(x_{13} \vee x_{23} \vee x_{33} \vee x_{43})$
  - $(x_{14} \vee x_{24} \vee x_{34} \vee x_{44})$

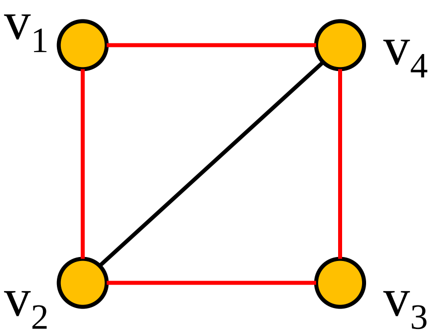


Κύκλος Hamilton → Ικανοποιησιμότητα (5/7)

- Σε κάθε θέση του κύκλου Hamilton εμφανίζεται τουλάχιστον το πολύ ένας κόμβος:
  - $(x'_{11} \vee x'_{21}) \wedge (x'_{11} \vee x'_{31}) \wedge (x'_{11} \vee x'_{41}) \wedge (x'_{21} \vee x'_{31}) \wedge (x'_{21} \vee x'_{41}) \wedge (x'_{31} \vee x'_{41})$
  - $(x'_{12} \vee x'_{22}) \wedge (x'_{12} \vee x'_{32}) \wedge (x'_{12} \vee x'_{42}) \wedge (x'_{22} \vee x'_{32}) \wedge (x'_{22} \vee x'_{42}) \wedge (x'_{32} \vee x'_{42})$
  - $(x'_{13} \vee x'_{23}) \wedge (x'_{13} \vee x'_{33}) \wedge (x'_{13} \vee x'_{43}) \wedge (x'_{23} \vee x'_{33}) \wedge (x'_{23} \vee x'_{43}) \wedge (x'_{33} \vee x'_{43})$
  - $(x'_{14} \vee x'_{24}) \wedge (x'_{14} \vee x'_{34}) \wedge (x'_{14} \vee x'_{44}) \wedge (x'_{24} \vee x'_{34}) \wedge (x'_{24} \vee x'_{44}) \wedge (x'_{34} \vee x'_{44})$

Κύκλος Hamilton → Ικανοποιησιμότητα (6/7)

- Για κάθε δύο κόμβους που δεν συνδέονται με ακμή, πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι δεν είναι συνεχόμενες στον κύκλο Hamilton.
  - $(x'_{11} \vee x'_{32})$ $(x'_{31} \vee x'_{12})$
  - $(x'_{12} \vee x'_{33})$ $(x'_{32} \vee x'_{13})$
  - $(x'_{13} \vee x'_{34})$ $(x'_{33} \vee x'_{14})$
  - $(x'_{14} \vee x'_{31})$ $(x'_{34} \vee x'_{11})$



Κύκλος Hamilton → Ικανοποιησιμότητα (7/7)

- Η αναγωγή από τον κύκλο Hamilton στην ικανοποιησιμότητα είναι πολυωνυμική.
  - Συνολικό πλήθος συνθηκών: $O(n^3)$
- Το πρόβλημα Hamilton έχει λύση, αν και μόνο αν το αντίστοιχο πρόβλημα ικαποιησιμότητας έχει λύση.
- Μπορεί να αποδειχθεί και η αντίστροφη αναγωγή.

Χρονοπρογραμματισμός 2 μηχανών

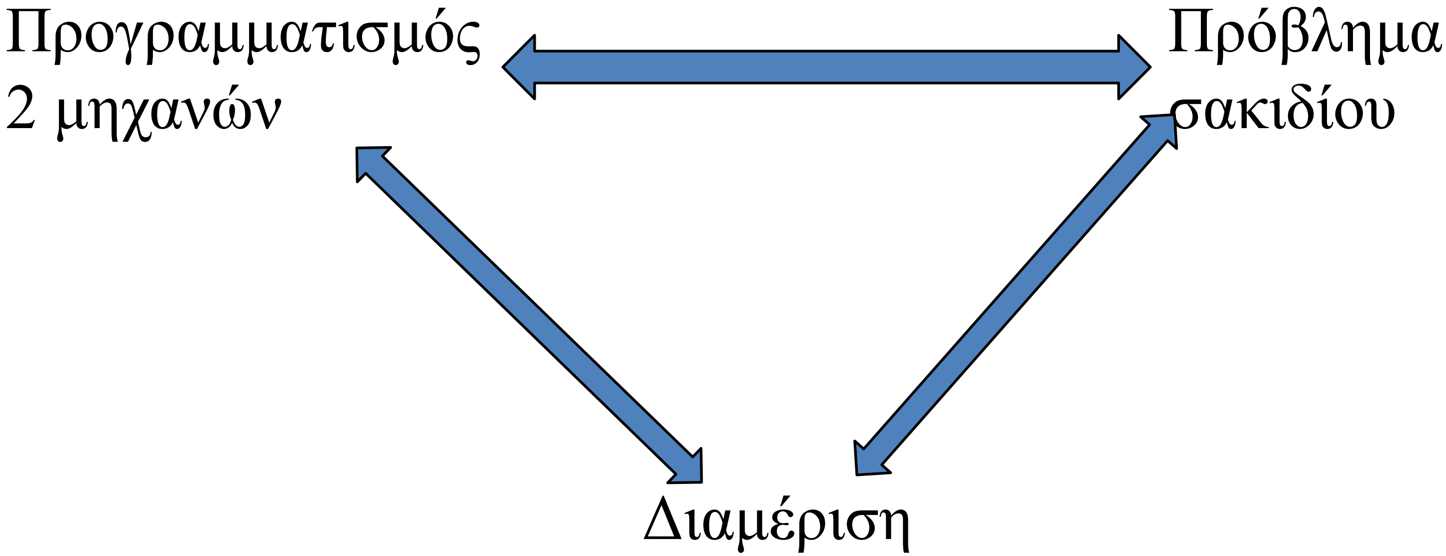
- Πρέπει να εκτελεστούν n εργασίες σε 2 μηχανές:
  - Δεν υπάρχουν περιορισμοί διάταξης.
  - Οι μηχανές είναι ίδιες.
  - Οι εργασίες έχουν ακέραιους μη αρνητικούς χρόνους εκτέλεσης $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
  - Οι εργασίες δεν διακόπτονται.
- Μπορούν να εκτελεστούν οι εργασίες σε προθεσμία D;

Πρόβλημα σακιδίου

- Μας δίνεται ένα σύνολο n αντικειμένων βάρους a_1, a_2, …, a_n (μη αρνητικοί ακέραιοι) και ένας ακέραιος K.
- Υπάρχει υποσύνολο P των αντικειμένων τέτοιο ώστε το άθροισμα των βαρών τους να ισούται με K;

Και άλλες αναγωγές

- Υπάρχουν 6 πολυωνυμικές αναγωγές μεταξύ των παρακάτω προβλημάτων.



Σακίδιο → Διαμέριση

- Έστω ότι το Κ στο πρόβλημα της διαμέρισης ισούται με το ημιάθροισμα των ακεραίων.
  - Το πρόβλημα του σακιδίου ταυτίζεται πλέον με το πρόβλημα της διαμέρισης.
- Έστω ότι το Κ δεν ισούται με το ημιάθροισμα των ακεραίων.
  - Προσθέτουμε δύο επιπλέον ακεραίους:
  - a_{n+1}=2H+2K
  - a_{n+2}=4H

Διάμεριση → Σακίδιο

- Η διαμέριση είναι ειδική περίπτωση του Σακιδίου.
- Αρκεί να θέσουμε:

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Διαμέριση → Χρονοπρογραμματισμός 2M

- Έστω η διαμέριση σε δύο ισοβαρή σύνολα των $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
- Ορίζουμε το πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού με:

$$D = \left\lfloor \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i \right\rfloor$$

Χρονοπρογραμματισμός 2Μ → Διαμέριση

- Έστω n εργασίες με διάρκειες $a_1, a_2, \ldots, a_n$ και προθεσμία D.
- Έστω ο αριθμός: $I = 2D - \sum_{i=1}^{n} a_i$
- Ο I εκφράζει το συνολικό «νεκρό» χρόνο (idle time) του συνολικού χρονοπρογραμματισμού.
- Προσθέτουμε νέες εργασίες για να καλύψουμε τη διάρκεια I:
  - Χρησιμοποιούμε δυνάμεις του 2.
  - Π.χ., για I=56 → 1, 2, 4, 8, 16, 25

Σακίδιο ↔ Χρονοπρογραμματισμός 2Μ

- Δεν χρειάζεται να το αποδείξουμε, μιας και έχουμε αποδείξει τα:
  - Σακίδιο → Διαμέριση → Χρονοπρογραμματισμός 2Μ
  - Χρονοπρογραμματισμός 2Μ → Διαμέριση → Σακίδιο
- Αν τ_1 είναι μια πολυωνυμική αναγωγή από την L_1 στην L_2 και τ_2 μια πολυωνυμική αναγωγή από την L_2 στην L_3, τότε η $\tau_1 \circ \tau_2$ είναι μια πολυωνυμική αναγωγή από την L_1 στην L_3 .

$\mathcal{Np}$-πληρότητα

$\mathcal{NP}$-πλήρης γλώσσα

- Μια γλώσσα L$\in\Sigma^*$ ονομάζεται $\mathcal{NP}$-πλήρης αν:
  - L$\in\mathcal{NP}$
  - Για κάθε γλώσσα L'$\in\mathcal{NP}$, υπάρχει μια πολυωνυμική αναγωγή από την L' στην L.

- Αν αποδειχθεί έστω και για μια $\mathcal{NP}$-πλήρη γλώσσα ότι ανήκει στο $\mathcal{P}$, τότε θα έχει αποδειχθεί πως $\mathcal{P}=\mathcal{NP}$.

Το θεώρημα του Cook

- Για να αποδείξουμε ότι υπάρχουν $\mathcal{NP}$-πλήρεις γλώσσες, πρέπει να αποδείξουμε για τουλάχιστον μία $\mathcal{NP}$ γλώσσα ότι **όλες** οι άλλες $\mathcal{NP}$-γλώσσες μπορούν να αναχθούν σε αυτήν.
  – Αυτό δεν είναι ιδιαίτερα εύκολο!
- Ο πρώτος που απέδειξε κάτι τέτοιο ήταν ο Stephen Cook το 1971, για το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας.

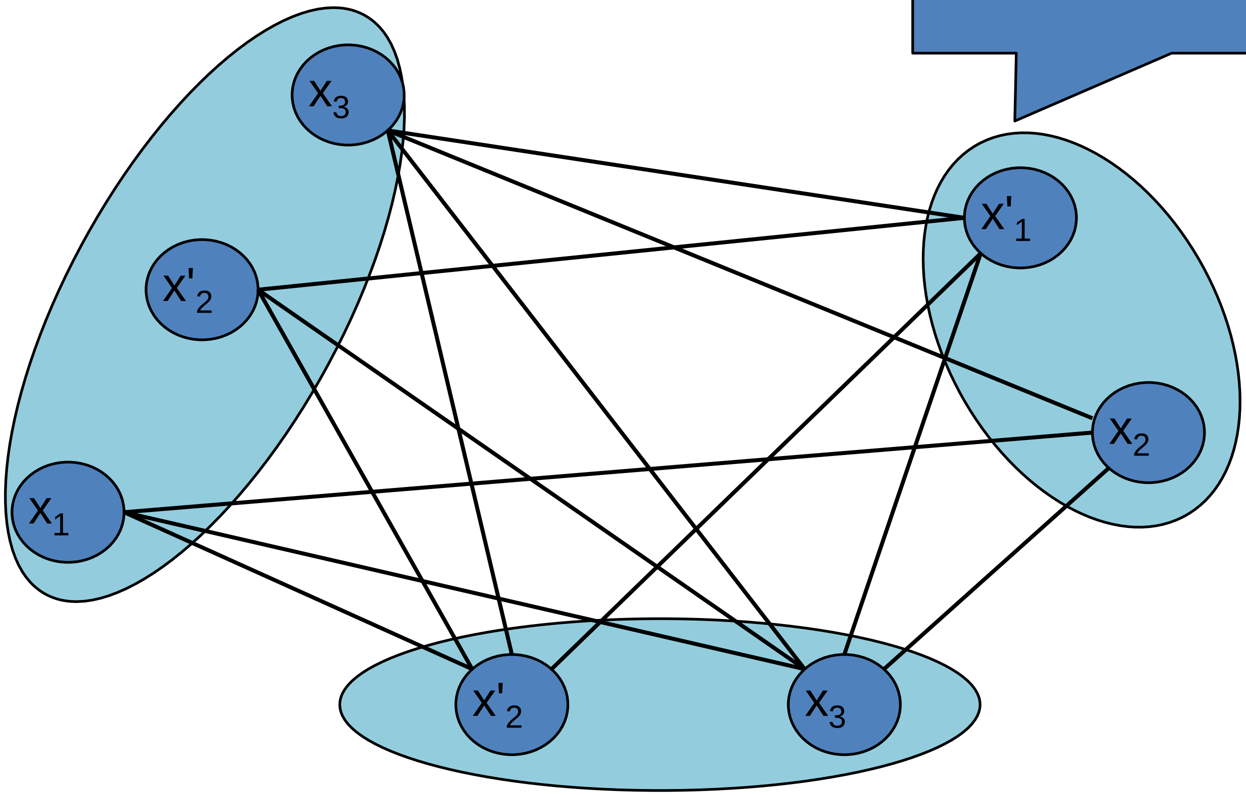
Ικανοποιησιμότητα → Κλίκα (1/2)

- Κάθε τύπος Bool μπορεί να γραφεί σε κανονική συζευκτική μορφή:
  - $(\ldots\vee\ldots\vee\ldots)\wedge(\ldots\vee\ldots\vee\ldots)\wedge\ldots$
- Έστω ένας τύπος Bool στην παραπάνω μορφή, π.χ.:
  - $(x_1\vee x'_2\vee x_3)\wedge(x'_1\vee x_2)\wedge(x'_2\vee x_3)$
- Κατασκευάζουμε έναν γράφο με μια κορυφή για κάθε λεκτικό διάζευξης (πολλά λεκτικά επαναλαμβάνονται).

Ικανοποιησιμότητα → Κλίκα (2/2)

- $(x_1 \vee x'_2 \vee x_3) \wedge (x'_1 \vee x_2) \wedge (x'_2 \vee x_3)$

Μπορούμε να βρούμε μια κλίκα μεγέθους 3;



Αποδεικνύοντας την $\mathcal{NP}$-πληρότητα

- Δύο βήματα:
  - Πρώτα αποδεικνύουμε ότι το νέο πρόβλημα είναι $\mathcal{NP}$.
  - Στη συνέχεια βρίσκουμε μια πολυωνυμική αναγωγή από ένα ήδη γνωστό $\mathcal{NP}$-πλήρες πρόβλημα στο νέο πρόβλημα.

- Γιατί είναι απαραίτητο το πρώτο βήμα;

$\mathcal{P}$ vs $\mathcal{NP}$

- Πολλοί έχουν προσπαθήσει να αποδείξουν αν
  $\mathcal{P}=\mathcal{NP}$ ή αν $\mathcal{P}\subset\mathcal{NP}$.
  - Υπάρχουν 41 «αποδείξεις» ότι $\mathcal{P}=\mathcal{NP}$.
  - Υπάρχουν 46 «αποδείξεις» ότι $\mathcal{P}\subset\mathcal{NP}$.
    - Μια εξ' αυτών, μεγέθους 102 σελίδων, είχε σφάλμα στη σελίδα 67.
- http://en.wikipedia.org/wiki/P_versus_NP_problem
- http://en.wikipedia.org/wiki/Millennium_Prize_Problems

Ελάχιστα Μονοπάτια

Ορισμός προβλήματος

- Έχουμε ένα γράφο με βάρη στις ακμές του.
- Θέλουμε να βρούμε τον ελάχιστο κύκλο που επισκέπτεται όλες τους κόμβους.
- Εναλλακτικά (πρόβλημα απόφασης):
  – Υπάρχει κύκλος που επισκέπτεται όλους τους κόμβους με κόστος κάτω από d;

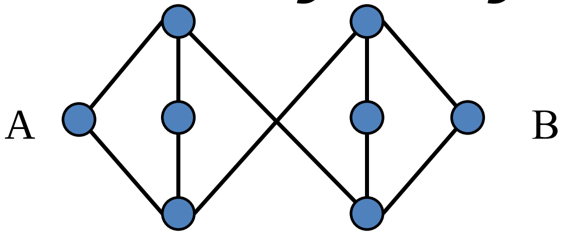
- Είναι το πρόβλημα αυτό $\mathcal{NP}$-πλήρες;

$\mathcal{NP}$-πληρότητα για το πρόβλημα του ελάχιστου κύκλου

- Βήμα 1ο: Είναι το πρόβλημα στο $\mathcal{NP}$;
  - Ναι! Αν μας δώσουν μια λύση, μπορούμε να την ελέγξουμε σε πολυωνυμικό χρόνο.
- Βήμα 2ο: Μπορούμε να ανάγουμε σε πολυωνυμικό χρόνο κάποιο γνωστό $\mathcal{NP}$–πλήρες πρόβλημα στο πρόβλημα εύρεσης του ελάχιστου μονοπατιού;
  - Θα προσπαθήσουμε να το κάνουμε για το SAT.

Ικανοποιησιμότητα → Ελάχιστο μονοπάτι (1/9)

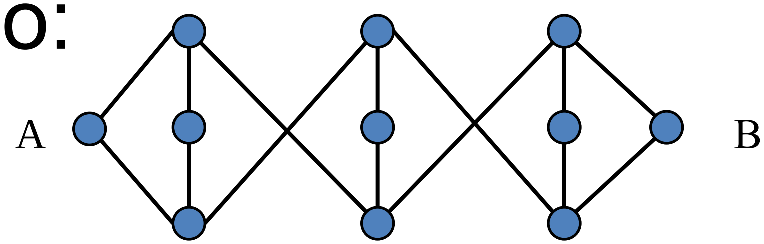
- Ποιο είναι το μήκος του ελάχιστου μονοπατιού από το A στο B που επισκέπτεται όλους τους κόμβους;



  – 7
- Πόσα διαφορετικά ελάχιστα μονοπάτια υπάρχουν από το A στο B, που επισκέπτονται όλους τους κόμβους;
  – 2

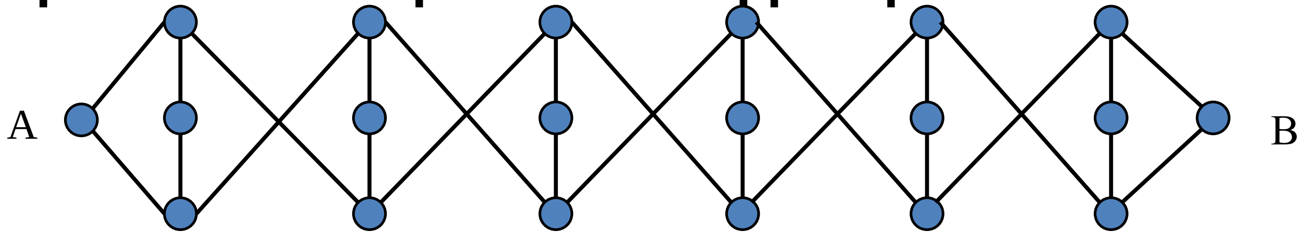
Ικανοποιησιμότητα → Ελάχιστο μονοπάτι (2/9)

- Τα ίδια ερωτήματα για τον παρακάτω γράφο:



  – Μήκος:10, Ελάχιστες διαδρομές: 2

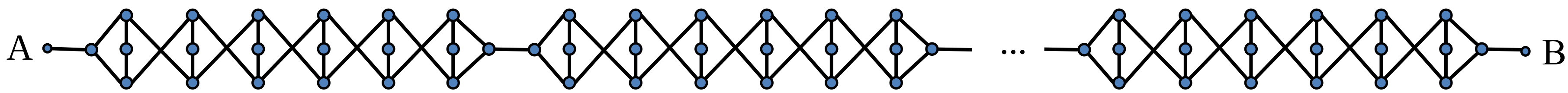
- Και για τον παρακάτω γράφο:



  – Μήκος:19, Ελάχιστες διαδρομές: 2

Ικανοποιησιμότητα → Ελάχιστο μονοπάτι (3/9)

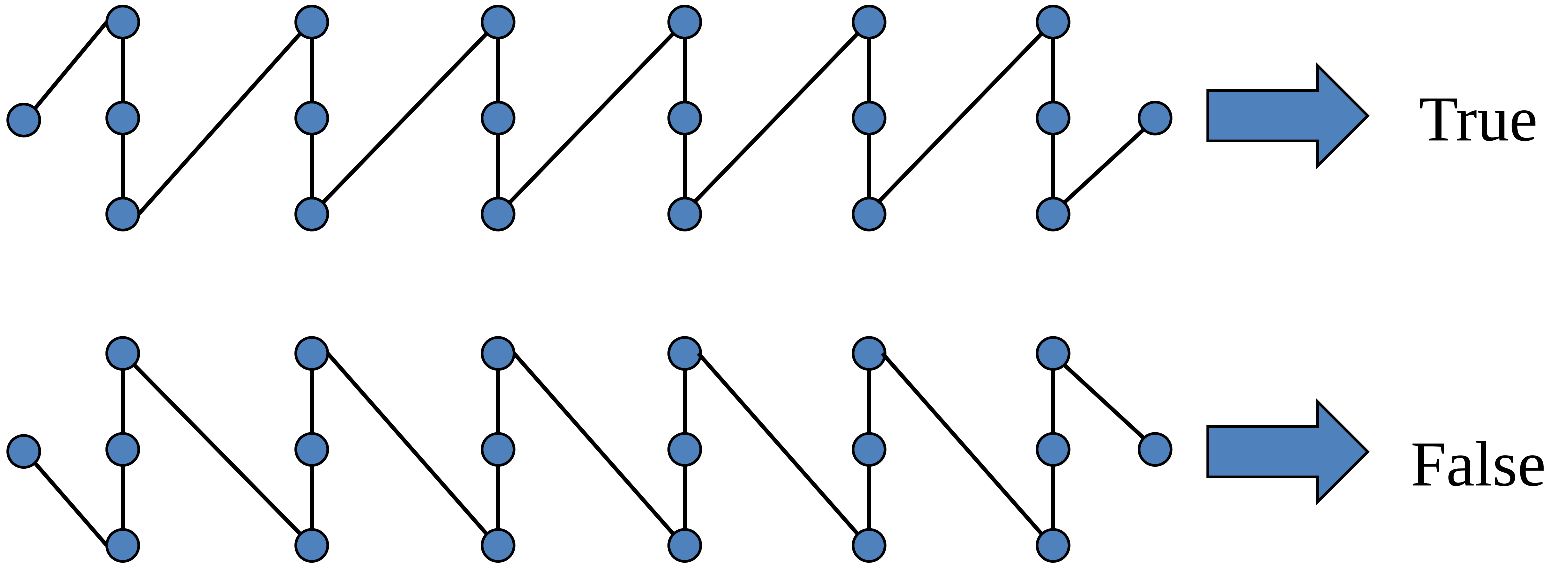
- Έστω ότι έχουμε n τέτοιες δομές:



- Ποιο είναι το μήκος του ελάχιστου μονοπατιού που επισκέπτεται όλες τις κορυφές;
  - $n \cdot 19+n+1$
- Πόσα τέτοια ελάχιστα μονοπάτια υπάρχουν;
  - 2^n

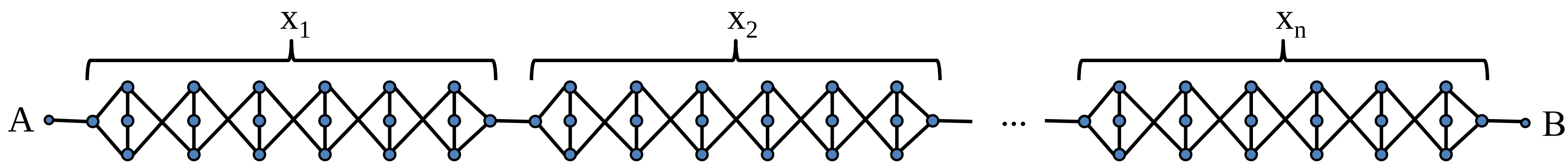
Ικανοποιησιμότητα → Ελάχιστο μονοπάτι (4/9)

- Μπορούμε να αντιστοιχήσουμε τις δύο ελάχιστες διαδρομές μέσα από κάθε δομή με τις δύο τιμές μιας Boolean μεταβλητής.



Ικανοποιησιμότητα → Ελάχιστο μονοπάτι (5/9)

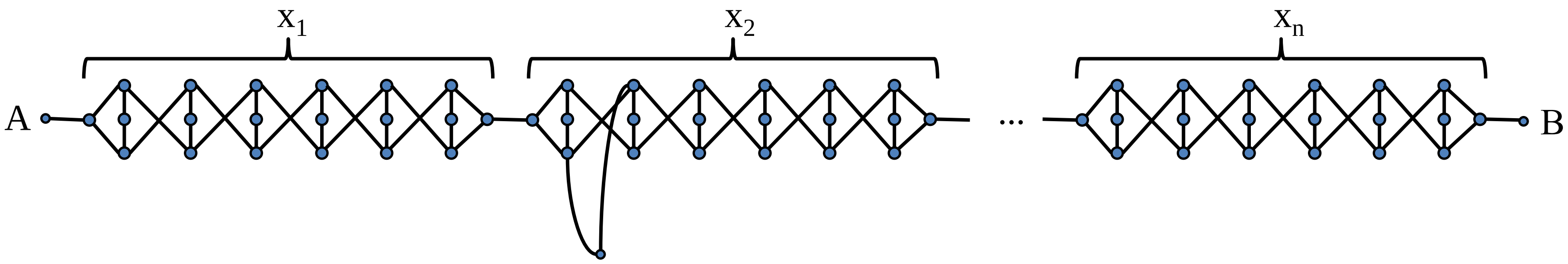
- Μπορούμε να αντιστοιχήσουμε κάθε δομή με μια μεταβλητή Boolean:



- Το πλήθος των εναλλακτικών ελάχιστων διαδρομών που επισκέπτονται κάθε κόμβο, 2^n, ισούται με το πλήθος των μεταβλητών Bool.

Ικανοποιησιμότητα → Ελάχιστο μονοπάτι (6/9)

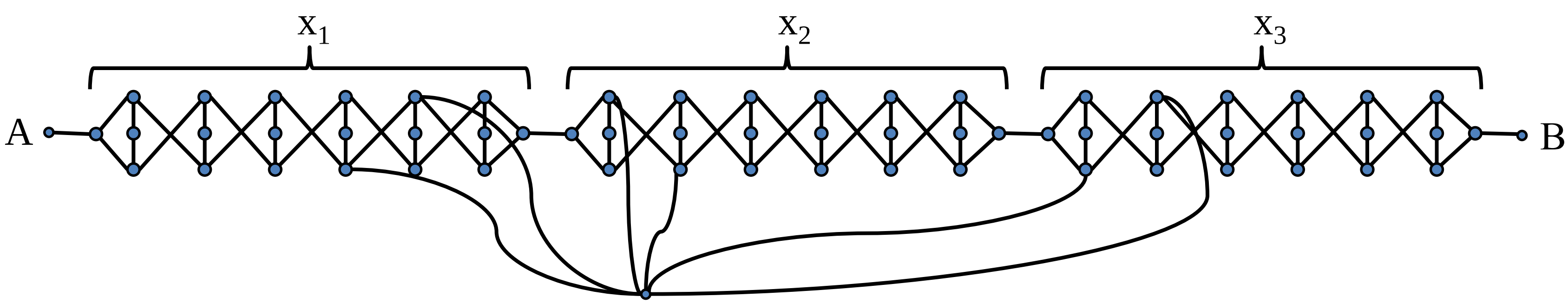
- Έστω ότι βάζουμε ακόμη έναν κόμβο στο γράφο μας:



- Πόσες εναλλακτικές διαδρομές υπάρχουν τώρα;
  - 2^{n-1}

Ικανοποιησιμότητα → Ελάχιστο μονοπάτι (7/9)

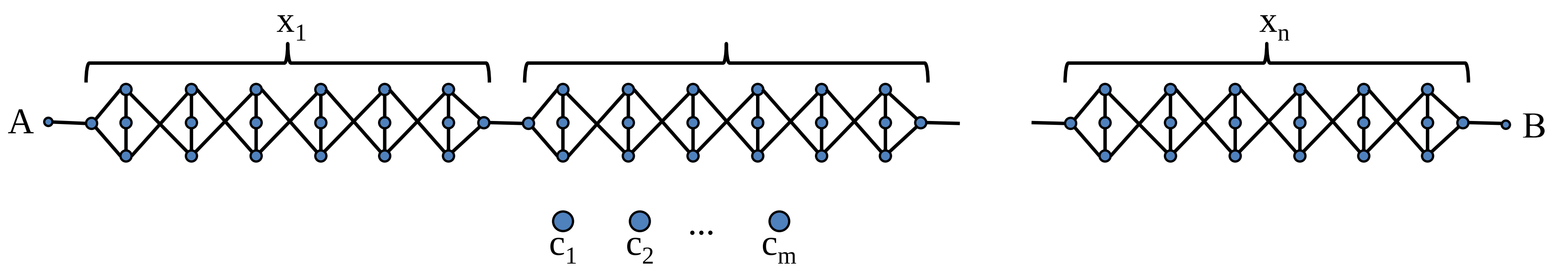
- Συσχέτιση μιας διάζευξης με ελάχιστα μονοπάτια:
  - $(x_1 \vee x'_2 \vee x_3)$



- Ποιο είναι το μήκος του ελάχιστου μονοπατιού;
  - $2 \cdot 19+20+4$
- Πόσα ελάχιστα μονοπάτια υπάρχουν;
  - $12=3 \cdot 2^2$

Ικανοποιησιμότητα → Ελάχιστο μονοπάτι (8/9)

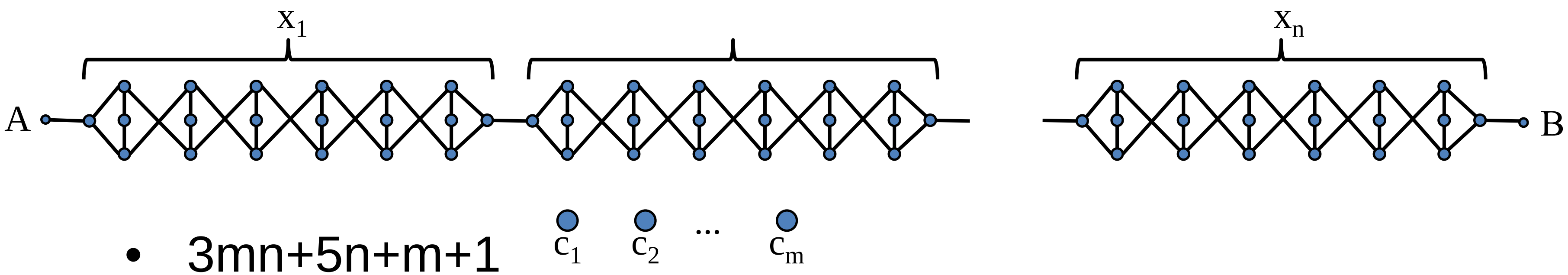
- Συσχέτιση ενός τύπου Bool σε κανονική συζευκτική μορφή, με τα ελάχιστα μονοπάτια:



- Πόσοι κόμβοι υπάρχουν;
  - $n(3(m+1)+2)+m+2 = 3mn+5n+m+2$

Ικανοποιησιμότητα → Ελάχιστο μονοπάτι (9/9)

- Ποιο (πρέπει να) είναι το μήκος του ελάχιστου μονοπατιού από το A στο B, ώστε ο τύπος Bool να είναι ικανοποιήσιμος;



  - 3mn+5n+m+1

- Αν λοιπόν υπάρχει ελάχιστο μονοπάτι με 3mn+5n+m+1 ακμές, τότε ο τύπος Bool είναι ικανοποιήσιμος.

Και άλλα $\mathcal{NP}$-πλήρη προβλήματα

- 1 Graph theory
  - 1.1 Covering and partitioning
  - 1.2 Subgraphs and supergraphs
  - 1.3 Vertex ordering
  - 1.4 Iso- and other morphisms
  - 1.5 Miscellaneous
- 2 Network design
  - 2.1 Spanning trees
  - 2.2 Cuts and connectivity
  - 2.3 Routing problems
  - 2.4 Flow problems
  - 2.5 Miscellaneous
  - 2.6 Graph Drawing
- 3 Sets and partitions
  - 3.1 Covering, hitting, and splitting
  - 3.2 Weighted set problems
  - 3.3 Set partitions
- 4 Storage and retrieval
  - 4.1 Data storage
  - 4.2 Compression and representation
  - 4.3 Database problems
- 5 Sequencing and scheduling
  - 5.1 Sequencing on one processor
  - 5.2 Multiprocessor scheduling
  - 5.3 Shop scheduling
  - 5.4 Miscellaneous
- 6 Mathematical programming
- 7 Algebra and number theory
  - 7.1 Divisibility problems
  - 7.2 Solvability of equations
  - 7.3 Miscellaneous
- 9 Logic
  - 9.1 Propositional logic
  - 9.2 Miscellaneous
- 10 Automata and language theory
  - 10.1 Automata theory
  - 10.2 Formal languages
- 11 Computational geometry
- 12 Program optimization
  - 12.1 Code generation
  - 12.2 Programs and schemes
- 13 Miscellaneous

http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_NP-complete_problems

Αντιμετώπιση $\mathcal{NP}$-Προβλημάτων

Δύο προσεγγίσεις

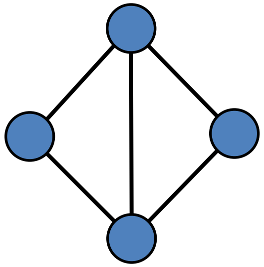
- Έξυπνοι αλγόριθμοι
  - Μολονότι το πρόβλημα παραμένει $\mathcal{NP}$–πλήρες, μπορούμε να το λύσουμε πολλές τάξεις μεγέθους γρηγορότερα.
- Προσεγγιστικές λύσεις

Έξυπνοι αλγόριθμοι

- Τα $\mathcal{NP}$-προβλήματα δεν λύνονται σε πολυωνυμικό χρόνο.
- Ωστόσο, υπάρχουν πολλές εκδοχές μη-πολυωνυμικού χρόνου.
- Για παράδειγμα:
  – Άλλο 2^n και άλλο $2^{sqrt(n)}$.
- Άλλα 2^n και άλλο 1.1^n .

Κάλυμμα κόμβων – Απλοϊκός αλγόριθμος

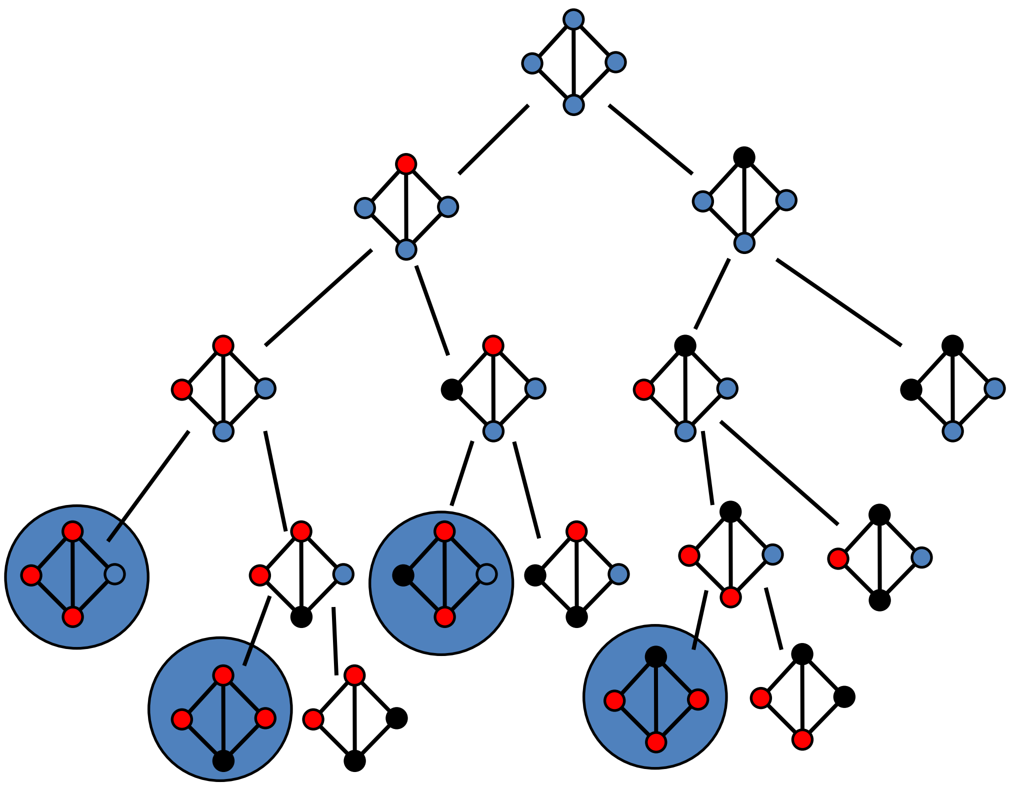
- Απλοϊκός αλγόριθμος (brute force)



- Ελέγχουμε όλα τα υποσύνολα κόμβων του γράφου, από τα μικρότερα προς τα μεγαλύτερα, μέχρι να βρούμε ένα που να καλύπτει όλες τις ακμές.
  – 2^n υποσύνολα

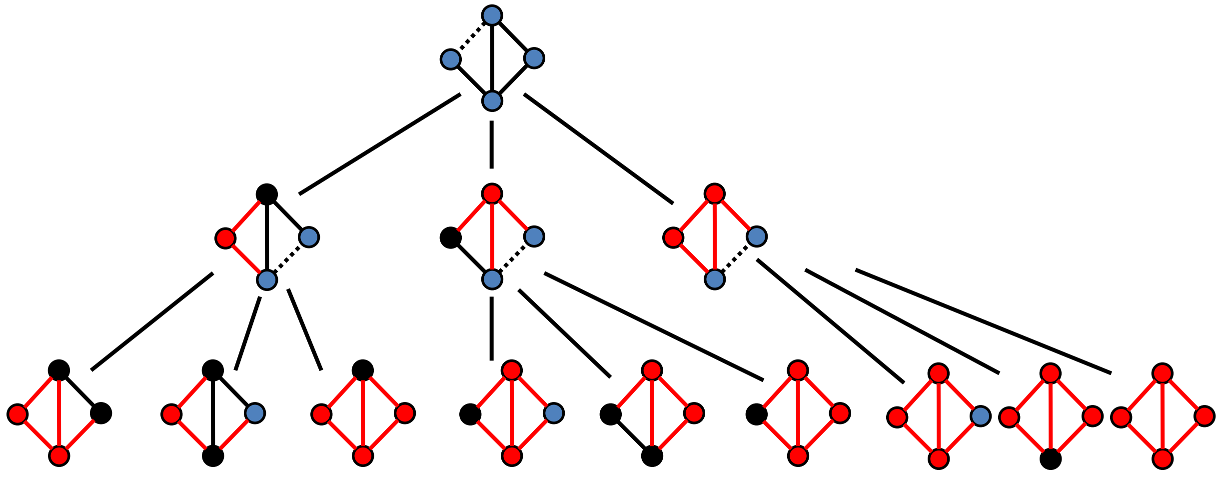
Δένδρο αναζήτησης

- Εξετάζουμε τους κόμβους, έναν-έναν, και αποφασίζουμε για κάθε κόμβο αν θα μπει στο κάλυμμα κόμβων ή όχι.



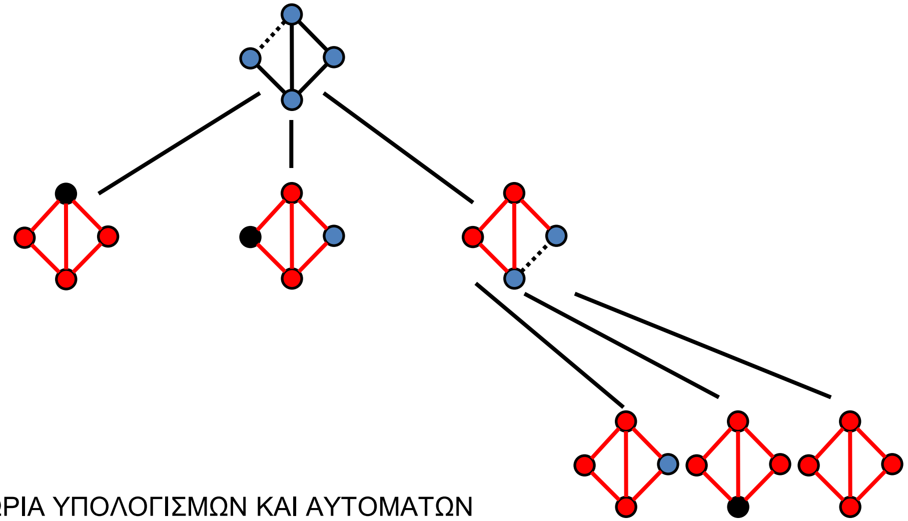
Βελτιωμένο δένδρο αναζήτησης (1/2)

- Εξετάζουμε μια-μία τις ακμές που δεν καλύπτονται.
  - Δίνουμε προτεραιότητα στις ακμές για τις οποίες δεν έχει ληφθεί απόφαση για κανένα από τα άκρα τους.



Βελτιωμένο δένδρο αναζήτησης (2/2)

- Και άλλη βελτίωση: Κάθε φορά που αποφασίζουμε ότι ένας κόμβος δεν είναι στο κάλυμμα κόμβων, όλοι οι γείτονές του πρέπει υποχρεωτικά να είναι.
  - Σε ένα βήμα μπορεί να αποφασίζονται τουλάχιστον δύο κόμβοι !



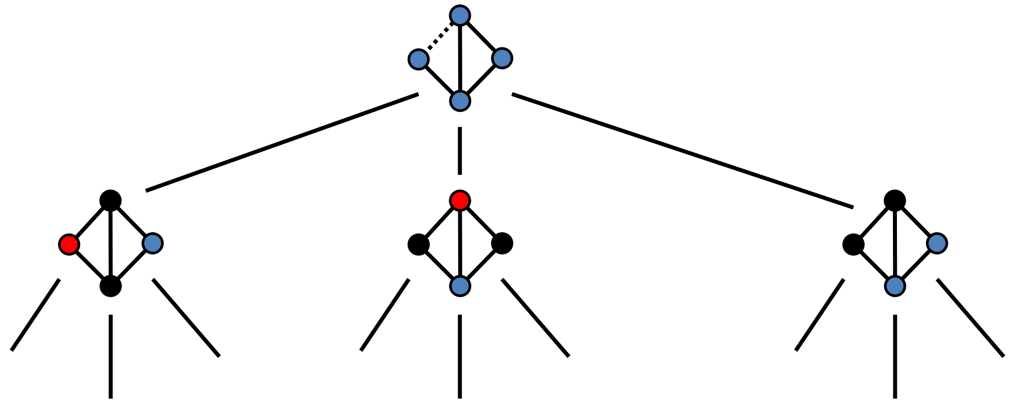
Ανάλυση

- Αφού σε κάθε κόμβο αποφασίζουμε τουλάχιστον 2 κόμβους, και κάθε κόμβος έχει 3 παιδιά, πόσους κόμβους έχει το βελτιωμένο δένδρο αναζήτησης;
  - $3^{n/2}$
- Συγκρίνετε το 2^n με το $3^{n/2} = 1.733^n$
  - $2^{50} = 1.13 \cdot 10^{15}$
  - $1.733^{50} = 8.71 \cdot 10^{11}$
- Και δεν έχουμε λάβει υπόψη ότι μπορεί σε κάθε επίπεδο να έχουμε περισσότερες από 2 αναθέσεις.

Ανεξάρτητο σύνολο (1/2)

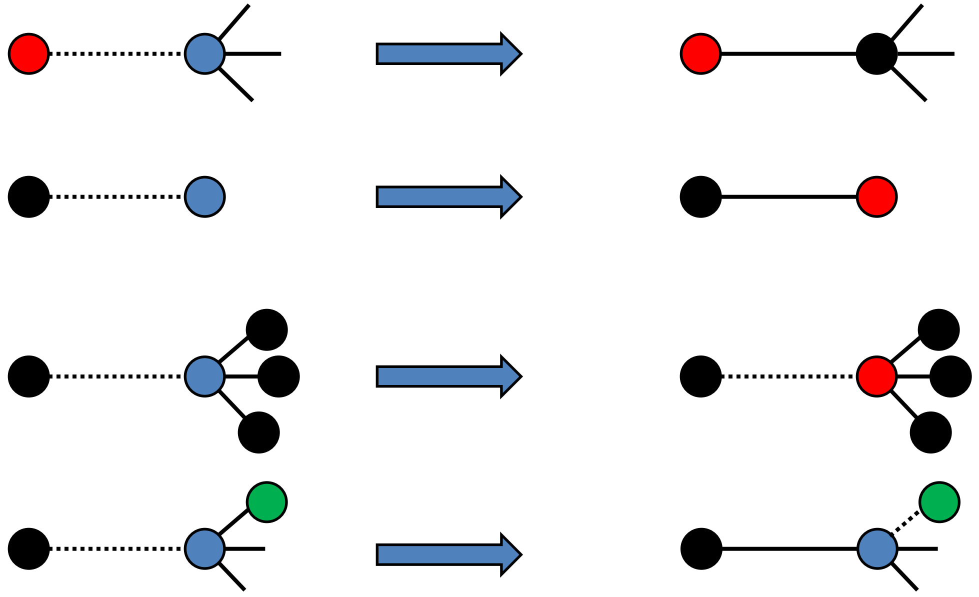
- Μπορούμε να εφαρμόσουμε μια παρόμοια προσέγγιση για το ανεξάρτητο σύνολο.
- Σε κάθε βήμα επιλέγουμε μια ακμή, και κάνουμε ανάθεση στους δύο κόμβους της:
  - Τρεις επιλογές: Είτε κανείς, είτε μόνο ένας.

Όταν ένας κόμβος γίνεται κόκκινος, οι γειτονικοί του γίνονται μαύροι.



Ανεξάρτητο σύνολο (2/2)

- Ειδικός χειρισμός όταν ένα από τα δύο άκρα της ακμής έχει αποφασιστεί.
- Περιπτώσεις:



Ανάλυση

- Και στο ανεξάρτητο σύνολο:
  - Ο παράγοντας διακλάδωσης είναι 3.
  - Αποφασίζουμε τουλάχιστον δύο κόμβους ανά επίπεδο.
- Άρα, το πλήθος των κόμβων είναι 1.733^n .

Πόσο χαμηλότερα μπορούμε να πάμε;

- Ανεξάρτητο σύνολο:
  - 1.189^n ή 1.211^n
- Κλίκα
  - 1.189^n ή 1.211^n
- 3-SAT
  - 1.496^n
- Ελάχιστος κύκλος / περιπλανώμενος πωλητής
  - 2^n

Πόσο μεγάλο μπορεί να γίνει το n ;

- Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να εξετάσουμε 10^9 κόμβους.
  - Ανεξάρτητο σύνολο:
    - **1.189^n** ή 1.211^n →119 κόμβοι
  - Κλίκα
    - 1.189^n ή 1.211^n →108 κόμβοι
  - 3-SAT
    - 1.496^n →51 μεταβλητές
  - Ελάχιστος κύκλος / περιπλανώμενος πωλητής
    - 2^n →29 κόμβοι

Χειρότερη περίπτωση και πραγματικότητα

- Στην πραγματικότητα (μέση περίπτωση) λύνουμε προβλήματα σημαντικά μεγαλύτερα:
  - Ανεξάρτητο σύνολο:
    - **1.189^n** ή 1.211^n → > 1000 κόμβοι
  - Κλίκα
    - 1.189^n ή 1.211^n → > 1000 κόμβοι
  - 3-SAT
    - 1.496^n → ~10.000 μεταβλητές

Βιβλιογραφία

Βιβλιογραφία

- Elements of the Theory of Computation, Harry Lewis, Christos Papadimitriou, 2nd edition, 1998.
- Computational Complexity, Christos Papadimitriou, 1994.
- Sebastian Wernicke, CS313, “Introduction to Theoretical Computer Science”, http://www.udacity.com/overview/Course/cs313

Τέλος Ενότητας

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ