

# ΘΕΩΡΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ ΚΑΙ ΑΥΤΟΜΑΤΩΝ

## Ενότητα 11: Καθολική μηχανή Turing

Ρεφανίδης Ιωάννης

Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



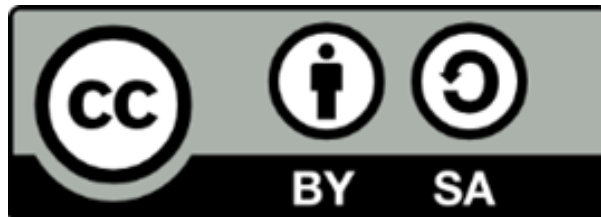
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ  
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ  
*επένδυση στην κοινωνία της γνώσης*  
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ  
2007-2013  
πρόγραμμα για την ανάπτυξη  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

# Καθολική μηχανή Turing (Universal Turing Machine)

# Κωδικοποίηση μηχανής Turing (1/3)

- Έστω ότι αριθμούμε τις καταστάσεις μιας μηχανής Turing ξεκινώντας από το 1 (λαμβάνοντας υπόψη και την κατάσταση  $h$ ).
  - Έτσι η τρίτη κατάσταση της μηχανής θα μπορούσε να συμβολίζεται με III (ή  $I^3$  για συντομία).
- Όμοια αριθμούμε τα σύμβολα του αλφαβήτου μιας μηχανής Turing (λαμβάνοντας υπόψη και τα  $L$  και  $R$ ) ξεκινώντας από το 1.
  - Έτσι το τέταρτο σύμβολο του αλφαβήτου θα συμβολιζόταν με IIII (ή  $I^4$  για συντομία).

# Κωδικοποίηση μηχανής Turing (2/3)

- Για να περιγράψουμε μια μετάβαση πρέπει να δώσουμε την τρέχουσα κατάσταση, το τρέχον σύμβολο, την επόμενη κατάσταση και την επόμενη κίνηση της κεφαλής.
- Έτσι μια μετάβαση μπορεί να περιγραφεί με τέσσερις αριθμούς. Για παράδειγμα:
- $c|l|l|c|l|l|c|l|l|c$  ή πιο σύντομα  $c|l^3|c|l^4|c|l^2|c|l^3|c$ 
  - Χρησιμοποιούμε το σύμβολο  $c$  για να διαχωρίζουμε αριθμούς μεταξύ τους.

# Κωδικοποίηση μηχανής Turing (3/3)

- Για να περιγράψουμε πλήρως μια μηχανή Turing πρέπει να δώσουμε την αρχική της κατάσταση και όλες τις μεταβάσεις.
- Για παράδειγμα:
  - $cl^3ccl^3cl^3clcl^5ccl^3cl^5cl^3cl^2ccl^3cl^8cl^3cl^2cc$
- Στην παραπάνω περιγραφή, αρχική είναι η τρίτη κατάσταση, ενώ δίνονται και τρεις μεταβάσεις. Η πρώτη μετάβαση ορίζει ότι εάν η μηχανή είναι στην τρίτη κατάσταση και διαβάσει το τρίτο σύμβολο, θα μεταβεί στην πρώτη κατάσταση και θα γράψει στην ταινία το πέμπτο σύμβολο.
  - Συνήθως το πρώτο και το δεύτερο "σύμβολο" είναι οι μετακινήσεις της κεφαλής  $L$  και  $R$  ενώ η πρώτη κατάσταση είναι η  $h$ .

# Κωδικοποίηση λέξεων

- Έστω  $w$  μια λέξη του αλφαβήτου  $\Sigma$  μιας μηχανής Turing.
- Μπορούμε να αναπαραστήσουμε την  $w$  χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση που είδαμε στις προηγούμενες διαφάνειες ως εξής:
  - $\rho(w) = clllclllllllcllllclllclllllc$
- Δηλαδή η  $w$  αποτελείται από 5 σύμβολα, τα οποία είναι το 3<sup>ο</sup>, το 6<sup>ο</sup>, το 4<sup>ο</sup>, το 3<sup>ο</sup> και το 5<sup>ο</sup> αντίστοιχα σύμβολα του αλφαβήτου (θεωρώντας πάντα ως δύο πρώτα σύμβολα τα  $L$  και  $R$ , τα οποία φυσικά δεν μπορούν να εμφανίζονται στη  $w$ ).



# Καθολική μηχανή Turing (1/3)

- Θα θέλαμε να κατασκευάσουμε μια μηχανή Turing που να μπορεί να "προγραμματισθεί", δηλαδή να μπορεί να εκτελεί διαφορετικές λειτουργίες, ανάλογα με το "πρόγραμμα" με το οποίο την τροφοδοτούμε.
- Μια τέτοια μηχανή ονομάζεται **καθολική μηχανή Turing** και συμβολίζεται με  $U$ .

# Καθολική μηχανή Turing (2/3)

- Έστω μια συγκεκριμένη μηχανή Turing  $M$ , η οποία εκτελεί συγκεκριμένη λειτουργία, για παράδειγμα όταν η  $M$  ξεκινήσει με είσοδο μια λέξη  $w$ , τερματίζει με αποτέλεσμα μια λέξη  $u$ .
- Έστω  $\rho(M)$ ,  $\rho(w)$  και  $\rho(u)$  οι κωδικοποιήσεις των  $M$ ,  $w$  και  $u$ , σύμφωνα με όσα είδαμε στις προηγούμενες διαφάνειες.
- Η καθολική μηχανή θα πρέπει, όταν ξεκινά με είσοδο  $\# \rho(M) \rho(w) \underline{\#}$  να τερματίζει με  $\# \rho(u) \underline{\#}$ .

# Καθολική μηχανή Turing (3/3)

---

- Αποδεικνύεται ότι η κατασκευή της καθολικής μηχανής  $U$  είναι εφικτή και μάλιστα εύκολη!

# Μη Αποφασισιμότητα

# Το πρόβλημα του τερματισμού (1/4)

- Έστω το πρόγραμμα  $\text{halts}(P, X)$ , γραμμένο σε οποιαδήποτε γλώσσα προγραμματισμού, το οποίο κάνει το εξής:
  - Δέχεται ως είσοδο τον κώδικα ενός άλλου προγράμματος  $P$  της ίδιας γλώσσας.
  - Δέχεται ως είσοδο την είσοδο  $X$  στο πρόγραμμα  $P$ .
  - Απαντά με **yes** ή **no** εάν το πρόγραμμα  $P$  με είσοδο  $X$  θα σταματήσει κάποια στιγμή την εκτέλεσή του.

# Το πρόβλημα του τερματισμού (2/4)

- Δεν μας ενδιαφέρει ο τρόπος λειτουργίας του  $\text{halts}(P, X)$ , δηλαδή εάν προσομοιώνει τη λειτουργία του  $P$  ή πραγματοποιεί άλλες αναλύσεις.
- Η ύπαρξη του προγράμματος  $\text{halt}(P, X)$  θα ήταν ανεκτίμητης αξίας. Το πρόγραμμα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να ανιχνεύει bugs που έχουν να κάνουν με μη-τερματισμό σε άλλα προγράμματα.

# Το πρόβλημα του τερματισμού (3/4)

- Αποδεικνύεται ότι τέτοιο πρόγραμμα δεν μπορεί να κατασκευαστεί.
- Πράγματι, έστω ότι υπήρχε το πρόγραμμα  $\text{halts}(P, X)$ .
- Θα μπορούσαμε τότε να φτιάξουμε το πρόγραμμα  $\text{diagonal}(P)$  έτσι ώστε:
  - $\text{diagonal}(P)$ :
    - if  $\text{halts}(P, P) = \text{yes}$  then loop for ever
    - else halt.

# Το πρόβλημα του τερματισμού (4/4)

- Και τότε τίθεται το πρόβλημα:
  - Τι γίνεται με την κλήση  $\text{diagonal}(\text{diagonal})$ ;
  - Εάν η κλήση αυτή σταματά, τότε η κλήση  $\text{halts}(\text{diagonal}, \text{diagonal})$  θα απαντήσει *yes*, με αποτέλεσμα αυτή η κλήση να μην σταματήσει.
  - Εάν η κλήση αυτή δεν σταματά, τότε η κλήση  $\text{halts}(\text{diagonal}, \text{diagonal})$  θα απαντήσει *no*, με αποτέλεσμα αυτή η κλήση να σταματήσει.
- Το άτοπο προήλθε από την παραδοχή της ύπαρξης του προγράμματος  $\text{halts}$ . Άρα τέτοιο πρόγραμμα δεν υπάρχει.



# Συμπέρασμα

- Δεν μπορεί να υπάρξει κανένα πρόγραμμα, κανένας αλγόριθμος που να μπορεί να μας πει για οποιοδήποτε άλλο πρόγραμμα εάν αυτό θα τερματίσει ή όχι.
- Το πρόβλημα τερματισμού ανήκει στη κατηγορία των **μη-αποφασίσιμων προβλημάτων**.

# Turing αποφασίσιμες και αποδεκτές γλώσσες

- Αναφορά σε διαφάνειες 176-180.
- Αν  $L$  είναι μια Turing-αποφασίσιμη γλώσσα, το συμπλήρωμά της είναι επίσης Turing-αποφασίσιμη.
- Δεν είναι κάθε Turing-αποδεκτή γλώσσα Turing-αποφασίσιμη.
- Το συμπλήρωμα μιας Turing-αποδεκτής γλώσσας δεν είναι συνήθως Turing-αποδεκτή γλώσσα.
- Εάν ωστόσο μια γλώσσα και το συμπλήρωμά της είναι Turing-αποδεκτές, τότε οι γλώσσες αυτές είναι και Turing-αποφασίσιμες.

# Μη αποφασίσιμα προβλήματα

- Ένα πρόβλημα λέγεται μη-αποφασίσιμο, εάν δεν υπάρχει μηχανή Turing που να το αποφασίζει.
- Οι Turing-αποδεκτές γλώσσες αποτελούν παράδειγμα μη-αποφασίσιμων προβλημάτων.

# Μη-αποφασίσιμα προβλήματα σχετικά με μηχανές Turing

- Τα παρακάτω αποτελούν παραδείγματα μη-αποφασίσιμων προβλημάτων:
  - Δεδομένης μιας μηχανής  $M$  και μιας λέξης  $w$ , τερματίζει η  $M$  με είσοδο  $w$ ;
  - Δεδομένης μιας μηχανής  $M$ , υπάρχει έστω και μια λέξη για την οποία η  $M$  τερματίζει;
  - Δεδομένης μιας μηχανής  $M$ , τερματίζει η  $M$  για κάθε λέξη;

# Μη-αποφασίσιμα προβλήματα για γραμματικές ανεξάρτητες συμφραζομένων

- Για τυχαίες γραμματικές ανεξάρτητες από συμφραζόμενα  $G, G_1, G_2$ , τα παρακάτω προβλήματα είναι μη-αποφασίσιμα:
  - Ισχύει  $L(G)=\Sigma^*$  ;
  - Ισχύει  $L(G_1)=L(G_2)$  ;

# Μη αποφασίσιμα προβλήματα για γραμματικές χωρίς περιορισμούς

- Για τυχαίες γραμματικές χωρίς περιορισμούς  $G, G_1, G_2$ , τα παρακάτω προβλήματα είναι μη-αποφασίσιμα:
  - Για τυχαία λέξη  $w$ , ισχύει  $w \in L(G)$  ;
  - Ισχύει  $L(G) = \emptyset$  ;

# Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ