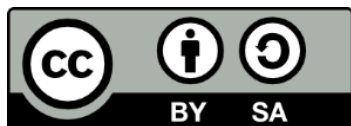


ΘΕΩΡΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ ΚΑΙ ΑΥΤΟΜΑΤΩΝ

Ενότητα 10: Συνδυασμοί μηχανών Turing

Ρεφανίδης Ιωάννης

Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

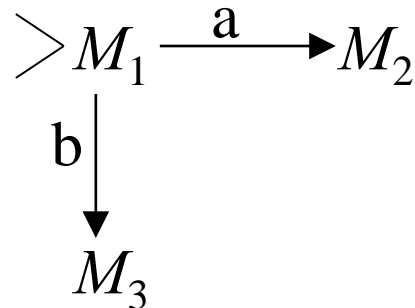
Συνδυασμοί μηχανών Turing

Συνδυασμός δύο μηχανών

- Έστω δύο μηχανές M_1 και M_2 .
Ο συμβολισμός $\triangleright M_1 \rightarrow M_2$ σημαίνει τα εξής:
 - Ξεκινά τον υπολογισμό η M_1 .
 - Η M_1 τερματίζει.
 - Αμέσως μετά ξεκινά τον υπολογισμό της η M_2 .
 - Η M_2 τερματίζει.
 - Το συνολικό αποτέλεσμα της συνδυασμένης μηχανής Turing είναι ό,τι έμεινε στην ταινία μετά τον τερματισμό και της M_2 .
- Θεωρούμε ότι οι δύο μηχανές δεν κρεμάνε, εφόσον η λέξη εισόδου τους πληρεί κάποιες προϋποθέσεις (που εξαρτώνται κάθε φορά από την εκάστοτε μηχανή).

Σχήματα μηχανών

- Μπορούμε να συνδυάσουμε περισσότερες από δύο μηχανές, με τρόπο που θυμίζει λειτουργία πεπερασμένων αυτομάτων.



- Μετά τον τερματισμό της M_1 , θα ξεκινήσει είτε η M_2 ή η M_3 , ανάλογα με το σύμβολο που είναι γραμμένο στη θέση που δείχνει η κεφαλή.
- Αποδεικνύεται ότι κάθε σχήμα μηχανής είναι ισοδύναμο με μια μηχανή Turing.

Παράδειγμα (1/2)

- Έστω ότι η M_1 εκτελεί πρόσθεση μεταξύ δύο ακεραίων αριθμών και η M_2 εκτελεί πολλαπλασιασμό.
- Για να λειτουργήσουν σωστά, και οι δυο μηχανές "απαιτούν" οι δύο αριθμοί να βρίσκονται στα αριστερά της αρχικής θέσης της κεφαλής, με ένα κενό μεταξύ τους αλλά και εκατέρωθέν τους.
- Έστω p_i οι καταστάσεις της M_1 και q_i οι καταστάσεις της M_2 , με p_0 και q_0 τις αρχικές καταστάσεις κάθε μηχανής.
- Επίσης, έστω h_p και h_q οι καταστάσεις τερματισμού των M_1 και M_2 αντίστοιχα.

Θέση του Church

Θέση του Church

- **Αλγόριθμος είναι οποιαδήποτε διαδικασία μπορεί να εκτελεστεί από κάποια μηχανή Turing.**
 - Δεν πρόκειται για θεώρημα αλλά για θέση.
 - Τίποτα δεν αποκλείει να καταρριφθεί στο μέλλον, εάν κατασκευαστεί ένα νέο μοντέλο υπολογισμού που θα μπορούσε να εκτελέσει στοιχειώδεις πράξεις που δεν μπορούν να εκτελέσουν οι σημερινοί υπολογιστές.
 - Κβαντικοί υπολογιστές;
- Απεριόριστη υπολογιστική ισχύς μπορεί να επιτευχθεί μόνο με εφαρμογή πεπερασμένων πόρων για απεριόριστη χρονική περίοδο.

Γλώσσες και μηχανές Turing

Turing αποφασίσιμες γλώσσες

- Έστω μια γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$.
- Έστω μια συνάρτηση $\chi_L: \Sigma^* \rightarrow \{\textcircled{Y}, \textcircled{N}\}$, τέτοια ώστε $\chi_L(w) = \textcircled{Y}$, εφόσον $w \in L$, αλλιώς $\chi_L(w) = \textcircled{N}$.
- Εάν η συνάρτηση χ_L είναι Turing υπολογίσιμη, τότε η γλώσσα L λέγεται Turing αποφασίσιμη.

...και με πιο απλά λόγια

- Με άλλα λόγια, αν για τη γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$ υπάρχει μια μηχανή Turing, τέτοια ώστε κάθε φορά που γράφουμε μια λέξη w του Σ^* στην ταινία και αφήνουμε τη μηχανή Turing να δουλέψει, **η μηχανή τερματίζει πάντα** (χωρίς να κρεμάει) γράφοντας στην ταινία είτε \textcircled{Y} ή \textcircled{N} , ανάλογα με το αν η λέξη w ανήκει ή όχι στη γλώσσα L αντίστοιχα, τότε η γλώσσα L λέγεται Turing αποφασίσιμη.

Turing αποδεκτές γλώσσες

- Έστω μια μηχανή Turing M και ένα αλφάβητο Σ . Λέμε ότι η M **δέχεται** (accepts) μια λέξη $w \in \Sigma^*$ εάν η M τερματίζει με είσοδο τη λέξη w .
- Έστω μια γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$.
- Εάν υπάρχει μια μηχανή Turing η οποία δέχεται τις λέξεις της L **και μόνο αυτές**, τότε η γλώσσα L λέγεται Turing αποδεκτή.

...και με πιο απλά λόγια

- Με άλλα λόγια, για να είναι μια γλώσσα Turing αποδεκτή θα πρέπει να υπάρχει μια μηχανή Turing που να τερματίζει πάντα με είσοδο λέξεις της γλώσσας και να μην τερματίζει ποτέ με είσοδο λέξεις που δεν ανήκουν στη γλώσσα.
- Η έννοια του "μη τερματισμού" σημαίνει ότι μια μηχανή μπορεί να λειτουργεί επ' άπειρον χωρίς να τερματίζει ούτε να κρεμάει.

Παράδειγμα αποδεκτής αλλά όχι αποφασίσιμης γλώσσας

- Έστω $\Sigma = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.
- Έστω η γλώσσα L , η οποία ορίζεται ως εξής:
 - $L = \{w : \text{η ακολουθία } w \text{ εμφανίζεται κάπου μέσα στην ακολουθία ψηφίων του } \pi\}$.
- Μπορούμε να φτιάξουμε μια μηχανή Turing, η οποία ξεκινώντας με είσοδο το w ελέγχει με τη σειρά τα ψηφία του π , προσπαθώντας να βρει μέσα σε αυτά τη λέξη w .
- Εάν το w όντως εμφανίζεται μέσα στο π , η μηχανή θα σταματήσει.
- Εάν το w δεν εμφανίζεται μέσα στο π , η μηχανή δεν θα σταματήσει ποτέ (εμείς όμως ποτέ δεν θα είμαστε σίγουροι ότι το w δεν θα εμφανιστεί "παρακάτω"...).
- Άρα η γλώσσα L είναι αποδεκτή, δεν είναι όμως αποφασίσιμη.

Turing αποφασίσιμες και Turing αποδεκτές γλώσσες

- Κάθε γλώσσα που είναι Turing αποφασίσιμη είναι και Turing αποδεκτή, αλλά όχι αντίστροφα.

Γραμματικές χωρίς περιορισμούς

Γραμματικές χωρίς περιορισμούς

- Οι γραμματικές στη γενική τους μορφή διαφέρουν από τις "γραμματικές ανεξάρτητες από τα συμφραζόμενα" κατά το ότι στο αριστερό μέρος των κανόνων μπορούν να υπάρχουν περισσότερα από ένα σύμβολα, ένα τουλάχιστον από τα οποία είναι μη-τερματικό.
 - Π.χ.: $0A11B \rightarrow CD10E$
- Ο παραπάνω κανόνας λέει ότι εάν σε μια λέξη συναντηθεί η ακολουθία συμβόλων $0A11B$, αυτή μπορεί να αντικατασταθεί από την $CD10E$.
- Βλέπουμε ότι αντικατάσταση μπορεί να γίνει και στα τερματικά σύμβολα. Ωστόσο, το τελικό αποτέλεσμα πρέπει να αποτελείται μόνο από τερματικά σύμβολα.

Ορισμός Γραμματικής

- Γραμματική G ορίζεται μια τετράδα (V, Σ, R, S) όπου:
 - V είναι ένα **αλφάβητο**
 - Σ είναι το σύνολο των **τερματικών συμβόλων**, $\Sigma \subseteq V$.
 - $V - \Sigma$ είναι τα μη-τερματικά σύμβολα.
 - S , το **αρχικό σύμβολο**, είναι στοιχείο του $V - \Sigma$.
 - R , το **σύνολο των κανόνων**, είναι μια **σχέση** από το $V^*(V - \Sigma)V^*$ στο V^* .

Παράδειγμα (1/2)

- Έστω η γραμματική για τη γλώσσα $\{a^n b^n c^n : n \geq 1\}$:
 - $V = \{S, a, b, c, A, B, C, T_a, T_b, T_c\}$
 - $\Sigma = \{a, b, c\}$
 - $R = \{$
 $S \rightarrow ABCS, S \rightarrow T_c,$
 $CA \rightarrow AC, CB \rightarrow BC, BA \rightarrow AB,$
 $CT_c \rightarrow T_c c, CT_c \rightarrow T_b c,$
 $BT_b \rightarrow T_b b, BT_b \rightarrow T_a b,$
 $AT_a \rightarrow T_{ba} a, T_a \rightarrow \varepsilon \}$

Παράδειγμα (2/2)

- Ας δούμε την παραγωγή της λέξης **aabbcc**:
- $\underline{S} \Rightarrow \underline{ABC}S \Rightarrow ABC\underline{ABC}S \Rightarrow ABCABC\underline{T}_c \Rightarrow \dots \Rightarrow$
 $AABBC\underline{C}T_c \Rightarrow AABBC\underline{T}_c\underline{C} \Rightarrow AAB\underline{B}T_c\underline{CC} \Rightarrow$
 $AAB\underline{T}_c\underline{b}cc \Rightarrow AA\underline{T}_c\underline{a}bcc \Rightarrow A\underline{T}_c\underline{a}abbcc \Rightarrow$
 $\underline{T}_c\underline{a}abbcc \Rightarrow aabbcc$

Σε κάθε βήμα, με υπογράμμιση φαίνονται τα σύμβολα που παρήχθησαν από την προηγούμενη παραγωγή ενώ με bold φαίνονται τα γράμματα που χρησιμοποιούνται για την επόμενη παραγωγή.

Γραμματικές και μηχανές Turing

- Μια γλώσσα παράγεται από μια γραμματική, εάν και μόνο αν είναι Turing-αποδεκτή.
 - Για κάθε μηχανή Turing, είναι εύκολο να κατασκευάσουμε μια γραμματική που να "μιμείται" τις ντετερμινιστικές μεταβάσεις της μηχανής.
 - Για κάθε γραμματική, μπορούμε να φτιάξουμε μια μηχανή Turing που να ελέγχει όλες τις μη-ντετερμινιστικές παραγωγές της γραμματικής, ξεκινώντας από τις συντομότερες παραγωγές. Εάν μια λέξη παράγεται από τη γραμματική, η μηχανή θα το ανακαλύψει. Εάν μια λέξη δεν παράγεται από τη γραμματική, η μηχανή θα αναγκαστεί να λειτουργεί επ' άπειρον.

Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ