ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

Ενότητα 1: Εισαγωγή

Ρεφανίδης Ιωάννης

Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Γενικά

- Web site:
  - Θεωρία Παιγνίων
- Συγγράμματα:
  - (Σ1) Μια εισαγωγή στη Θεωρία Παιγνίων (μετάφραση), Martin J. Osborne, Κλειδάριθμος, 2010.
  - (Σ2) Θεωρία Παιγνίων, Βαρουφάκης Γιάννης, Εκδόσεις Gutenberg, 2007.
- Επιπρόσθετη βιβλιογραφία:
  - (ΕΣ1) Strategies and Games, Theory and Practice. Prajit K. Dutta. HB144.D88, 1999.
  - Σημειώσεις και διαφάνειες του διδάσκοντα.
- Προαιρετικές εργασίες θα δοθούν κατά τη διάρκεια του εξαμήνου.

Εισαγωγή

- Η Θεωρία Παιγνίων εστιάζει στην αλληλεξάρτηση των αποφάσεων ομάδων ανθρώπων, όπου η απόφαση καθενός επηρεάζει τους υπόλοιπους.
  - Κανένας άνθρωπος δεν είναι μόνος του
- Μερικά από τα ερωτήματα που τίθενται σε τέτοιες καταστάσεις είναι τα ακόλουθα:
  - Τι ενέργειες μπορεί να εκτελέσει κάθε άνθρωπος.
  - Ποια είναι τα αποτελέσματα αυτών των ενεργειών. Είναι τα αποτελέσματα θετικά για όλους τους ανθρώπους;
  - Τι μπορεί να "μαντέψει" κάθε άνθρωπος για τις ενέργειες των υπολοίπων;
  - Παίζει ρόλο εάν οι άνθρωποι αλληλεπιδρούν περισσότερες από μία φορές;
  - Πώς επηρεάζει η γνώση για τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά άλλων ανθρώπων;

Ορισμός

- Η θεωρία παιγνίων είναι ένας συστηματικός τρόπος διερεύνησης των παρακάτω στοιχείων:
  - **Ομάδα (group)**: Σε κάθε παιχνίδι υπάρχουν περισσότερα από ένα άτομα που λαμβάνουν αποφάσεις (decision makers). Κάθε τέτοιο άτομο ονομάζεται παίκτης (player).
  - **Αλληλεπίδραση (Interaction)**: Οι "κινήσεις" καθενός παίκτη επηρεάζουν τους υπολοίπους.
  - **Στρατηγική σκοπιμότητα (strategic)**: Κάθε παίκτης επιλέγει τις ενέργειές του με βάση την ερμηνεία των αλληλεπιδράσεων.
  - **Ορθολογικότητα (rationality)**: Η ενέργεια που επιλέγει να εκτελέσει κάθε παίκτης είναι η καλύτερη δυνατή για αυτόν.

Παράδειγμα: Παιχνίδι Γνώσεων (1/6)

- Έστω ένα τηλεοπτικό παιχνίδι γνώσεων. Λίγο πριν από το τέλος του παιχνιδιού έχουμε κερδίσει ένα ποσό A_1 και πρέπει να στοιχηματίσουμε ένα ποσό $B_1<A_1$ για μια τελευταία ερώτηση (την οποία δεν γνωρίζουμε ακόμη).
- Εάν απαντήσουμε σωστά, το ποσό B_1 προστίθεται στο A_1, αλλιώς αφαιρείται.
- Έστω N συνολικά οι παίκτες, κάθε ένας από τους οποίους κερδίζει μέχρι στιγμής ποσό A_i και καλείται να στοιχηματίσει ποσό $B_i<A_i$.

Παράδειγμα: Παιχνίδι Γνώσεων (2/6)

- Μετά την ολοκλήρωση των ερωτήσεων, ο παίκτης που έχει συγκεντρώσει το μεγαλύτερο ποσό A_i+B_i κερδίζει και παίρνει τα χρήματά του, ενώ οι υπόλοιποι δεν παίρνουν τίποτα.
- Το ερώτημα που τίθεται είναι το εξής: Ποιο πρέπει να είναι το ποσό Bi για κάθε παίκτη i, έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει την πιθανότητα να φύγει νικητής και μάλιστα με όσο το δυνατόν περισσότερα χρήματα;

Παράδειγμα: Παιχνίδι Γνώσεων (3/6)

- Το πρόβλημα έχει όλα τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων που εξετάσει η θεωρία παιγνίων:
  - Υπάρχει μια ομάδα ανθρώπων.
  - Οι επιμέρους αποφάσεις τους επηρεάζουν ολόκληρη την ομάδα.
  - Για κάθε παίκτη υπάρχουν αποφάσεις που δεν έχουν ειδικό νόημα, οπότε δεν χρειάζεται να τις εξετάσει καν.
  - Προφανώς κάθε παίκτης θα αποφασίσει με τέτοιον τρόπο, ώστε να μεγιστοποιήσει (κατά την εκτίμησή του) την πιθανότητα να κερδίσει το παιχνίδι.

Παράδειγμα: Παιχνίδι Γνώσεων (4/6)

- Για παράδειγμα, έστω ότι εμείς κερδίζουμε μέχρι στιγμής 10.000€ και ο μοναδικός μας αντίπαλος 7.500€.
  - Εάν στοιχηματίσουμε 5.001€ εξασφαλίζουμε ότι, στην περίπτωση που απαντήσουμε σωστά, θα είμαστε σίγουρα οι νικητές, ανεξαρτήτως τι θα απαντήσει ο αντίπαλος.
  - Ωστόσο, το ίδιο στοίχημα μας οδηγεί στο να χάσουμε, εάν ο αντίπαλος στοιχηματίσει λιγότερα από 2.500€ (ακόμη και αν απαντήσει λάθος).
  - Θα μπορούσαμε να μην στοιχηματίσουμε τίποτα, οπότε σε αυτή την περίπτωση εξασφαλίζουμε ότι θα κερδίσουμε στην περίπτωση που ο αντίπαλος στοιχηματίσει λιγότερα από 2.500€, ακόμη και αν απαντήσει σωστά.

Παράδειγμα: Παιχνίδι Γνώσεων (5/6)

- (συνέχεια...)
  - Φυσικά πάντα υπάρχει το ενδεχόμενο και για τους δύο παίκτες να στοιχηματίσουν όλα τα κέρδη τους, ελπίζοντας ταυτόχρονα να τα διπλασιάσουν και να κερδίσουν το παιχνίδι.
- Οι παραπάνω είναι μερικές από τις κινήσεις που έχουν ιδιαίτερη στρατηγική σκοπιμότητα στο συγκεκριμένο παιχνίδι.

Παράδειγμα: Παιχνίδι Γνώσεων (6/6)

- Το τι θα πράξει ο κάθε παίκτης εξαρτάται από τη γνώση που έχει για τις δυνατότητές του και τις δυνατότητες του αντιπάλου.
- Με άλλα λόγια, κάθε παίκτης προσπαθεί να μαντέψει την απόφαση και τις δυνατότητες του αντιπάλου του και, λαμβάνοντας υπόψη και τις δικές του ικανότητες, αποφασίζει τη δική του βέλτιστη κίνηση (ορθολογικότητα).

Παραδείγματα από την καθημερινή ζωή (1/2)

- Συμμετοχή σε μια ομαδική εργασία: Μια ομάδα φοιτητών έχει αναλάβει ένα project.
  - Εάν ένας φοιτητής δεν εργάζεται αρκετά, κάποιος άλλος πρέπει να εργαστεί περισσότερο (αλληλεπίδραση).
  - Κάθε φοιτητής πρέπει να αποφασίσει αν και σε ποια ομάδα θα μπει (εκτιμώντας τις δυνατότητες των συμφοιτητών του).
  - Η ορθολογικότητα έχει να κάνει με την απόφαση του χρόνου που θα αφιερωθεί στην εργασία σε σχέση με τον βαθμό που αναμένεται να πάρουν οι φοιτητές.

Παραδείγματα από την καθημερινή ζωή (2/2)

- Τυχαίος έλεγχος για αναβολικά: Κάθε αθλητής πρέπει να αποφασίσει αν θα χρησιμοποιήσει ή όχι αναβολικές ουσίες.
  - Εάν χρησιμοποιήσει, αυξάνει τις πιθανότητές του να κερδίσει, ταυτόχρονα όμως ρισκάρει να ανιχνευθεί και να αποβληθεί από σχετικές διοργανώσεις για μεγάλο χρονικό διάστημα, καθώς επίσης και να θέσει σε κίνδυνο την υγεία του.
  - Εάν δεν χρησιμοποιήσει, μειώνει τις πιθανότητές του να διακριθεί, εφόσον άλλοι αθλητές χρησιμοποιήσουν και δεν ανακαλυφθούν.

Παραδείγματα από την οικονομία (1/3)

- Επένδυση σε έρευνα και ανάπτυξη για τις φαρμακευτικές εταιρείες:
  – Κάθε φαρμακευτική εταιρεία επενδύει ένα ποσό στην ανάπτυξη νέων φαρμάκων.
  – Η πρώτη εταιρεία που αναπτύσσει ένα φάρμακο έχει το δικαίωμα να το εκμεταλλεύεται αποκλειστικά για κάποια χρόνια (αλληλεπίδραση).
  – Οι εταιρείες λοιπόν πρέπει να αποφασίσουν πού θα διοχετεύσουν τους πόρους τους για έρευνα, πώς θα τιμολογήσουν τα νέα φάρμακα, πώς θα μειώσουν το ρίσκο κατά την ανάπτυξη ενός νέου φαρμάκου κλπ.
  – Οι αποφάσεις αυτές λαμβάνονται βάσει συμπερασμάτων για τις αντίστοιχες αποφάσεις των ανταγωνιστριών εταιρειών.

Παραδείγματα από την οικονομία (2/3)

- Δημοπρασίες κρατικών ομολόγων:
  - Ανά τακτά χρονικά διαστήματα οι διάφορες κυβερνήσεις εκδίδουν κρατικά ομόλογα.
  - Οι συμμετέχοντες είναι οι μεγάλες τράπεζες, οι οποίες στη συνέχεια μεταπωλούν τα ομόλογα στους πελάτες τους (π.χ. ομολογιακά αμοιβαία κεφάλαια).
  - Η αλληλεπίδραση έχει να κάνει με το ότι ο μεγάλος ανταγωνισμός ανεβάζει τις τιμές.
  - Η ορθολογικότητα έχει να κάνει με την εξισορρόπηση του ποσού που προσφέρει κάθε τράπεζα για να πάρει κάποια ομόλογα και της πιθανότητας να μην πάρει

Παραδείγματα από την οικονομία (3/3)

- Νόμος για την πτώχευση στις ΗΠΑ:
  - Στις ΗΠΑ, όταν μια εταιρεία κηρύξει πτώχευση, τα περιουσιακά της στοιχεία δεν μπορούν πλέον να δεσμευθούν από ανεξάρτητους πιστωτές, αλλά προστατεύονται από το νόμο μέχρι η εταιρεία και οι πιστωτές να καταλήξουν σε κάποια συμφωνία διαμοιρασμού των.
  - Φυσικά οι πιστωτές μπορούν να διεκδικήσουν τα χρέη τους δικαστικά πριν η εταιρεία κηρύξει πτώχευση, ωστόσο σε αυτή την περίπτωση διακινδυνεύουν να κηρύξει τελικά η εταιρεία πτώχευση και να χάσουν τα χρήματά τους.
  - Κάθε πιστωτής πρέπει να εκτιμήσει τη μελλοντική πορεία της εταιρείας καθώς και το πόσο υπομονετικοί μπορεί να είναι οι υπόλοιποι πιστωτές, ώστε να αποφασίσει αν θα διεκδικήσει τα χρήματά του δικαστικά ή αν θα περιμένει.

Άλλα παραδείγματα (1/2)

- Συμπεριφορά των ζώων:
  - Τα ζώα ανταγωνίζονται για δυσεύρετους πόρους όπως τροφή, περιοχή κλπ.
  - Οι παίκτες είναι όλα τα ζώα που έχουν βλέψη για τον ίδιο πόρο.
  - Σε τέτοιες περιπτώσεις, τα ζώα έχουν δύο δυνατότητες: Να μείνουν και να πολεμήσουν για τον πόρο ή να φύγουν.
  - Έχει διαπιστωθεί ότι η συμπεριφορά των ζώων σε καταστάσεις ανταγωνισμού είναι ορθολογική.

Άλλα παραδείγματα (2/2)

- Ψηφοφορίες.
- Χρήση των φυσικών πόρων.
- Συμπεριφορά στρατιωτών στον πρώτο παγκόσμιο πόλεμο.
- Καθορισμός τιμών πετρελαίου από τον OPEC.

Τι δεν είναι παιχνίδι;

- Καταστάσεις όπου υπάρχει μόνο ένας παίκτης:
  - Απόφαση σχετικά με το αν θα πάω θέατρο ή κινηματογράφο απόψε.
- Καταστάσεις όπου υπάρχουν πάρα πολλοί παίκτες, έτσι ώστε η επίδραση της απόφασης του ενός παίκτη στο σύνολο να είναι αμελητέα.
  - Απόφαση σχετικά με το αν θα αγοράσω 10 μετοχές του ΟΤΕ.

Ιστορική Αναδρομή

Ιστορική αναδρομή (1/5)

- 1838: Ο Γάλλος οικονομολόγος Augustin Cournot ανέλυσε ολιγοπωλιακές καταστάσεις με τρόπο παρόμοιο με τις σύγχρονες μεθόδους της θεωρίας παιγνίων (μοντέλο Cournot).
- 1881: Ο Άγγλος οικονομολόγος Francis Edgeworth ασχολήθηκε με την εφαρμογή των μαθηματικών στις κοινωνικές επιστήμες.
- 1913: Ο Γερμανός μαθηματικός Ernest Zermelo απέδειξε ότι το σκάκι έχει λύση από οποιαδήποτε κατάσταση

Ιστορική αναδρομή (2/5)

- 1928: Ο John von Neumann απέδειξε ότι μια σημαντική κατηγορία παιχνιδιών, τα παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος, έχουν πάντα λύση.
- 1944: Οι John von Neumann και Oskar Morgenstern εξέδωσαν το βιβλίο "Theory of Games & Economic Behavior", όπου:
  - Όρισαν αξιωματικά την θεωρία της χρησιμότητας (utility theory)
  - Ανέλυσαν διεξοδικά τις βέλτιστες λύσεις στα παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος.
  - Εισήγαγαν μια νέα κατηγορία παιχνιδιών, τα συνεργατικά παιχνίδια (cooperative games).

Ιστορική αναδρομή (3/5)

- 1950: Ο John Nash εισήγαγε την έννοια της ισορροπίας, η οποία είναι η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη έννοια στη σύγχρονη θεωρία παιγνίων.
  - Ισορροπία Nash (Nash equilibrium)
  - Η έννοια της ισορροπίας Nash εφαρμόζεται και στα παιχνίδια μη-μηδενικού αθροίσματος.
  - Η εργασία του Nash μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί επέκταση της εργασίας του Cournot.
  - Μοιράστηκε το βραβείο Nobel στα οικονομικά το 1994.
- Με απλά λόγια:
  - Ισορροπία Nash σε ένα παιχνίδι είναι μια κατάσταση από την οποία δεν συμφέρει κανέναν παίκτη να ξεφύγει μεμονωμένα.

Ιστορική αναδρομή (4/5)

- 1965, 1975: O Reinhard Selten γενίκευσε τις ιδέες του Nash στα δυναμικά παιχνίδια, δηλαδή σε παιχνίδια που εξελίσσονται στην πορεία του χρόνου.
- 1967-1968: O John Harsanyi γενίκευσε τις ιδέες του Nash σε παιχνίδια μη-πλήρους πληροφόρησης σχετικά με τις προτιμήσεις και τις αποφάσεις των άλλων παικτών.
- Οι Selten και Harsanyi μοιράστηκαν, μαζί με τον John Nash, το βραβείο Nobel στα οικονομικά το 1994.

Ιστορική αναδρομή (5/5)

- Ρίξτε μια ματιά στη διεύθυνση:
  - Ιστορική Αναδρομή Θεωρίας Παιγνίων
- για μια σύντομη ιστορική αναδρομή σχετική με τη θεωρία παιγνίων, καθώς και βιογραφικά των ανθρώπων που υπήρξαν συντελεστές στην πρόοδό της.

Τα παιχνίδια Nim και Marienbad

Σενάριο

- Υπάρχουν δύο σωροί από σπίρτα και δύο παίκτες, A και B, οι οποίοι παίζουν εναλλάξ (ξεκινά ο A).
- Σε μια "κίνηση", κάθε παίκτης μπορεί να αφαιρέσει όσα σπίρτα θέλει από έναν από τους σωρούς.
- Στο παιχνίδι Nim, ο παίκτης που αφαιρεί το τελευταίο σπίρτο κερδίζει.
- Στο παιχνίδι Marienbad, ο παίκτης που αφαιρεί το τελευταίο σπίρτο χάνει.
- Μας ενδιαφέρει να βρούμε αν υπάρχει μια στρατηγική για κάθε παίκτη, η οποία να κερδίζει πάντα.

Ανάλυση του Nim

- Έστω ότι οι δύο σωροί είναι ισορροπημένοι (έχουν τον ίδιο αριθμό σπίρτων).
- Σε αυτή την περίπτωση ο παίκτης Β μπορεί να κερδίζει πάντα, αρκεί να "αντιγράφει" τις κινήσεις του παίκτη Α σε διαφορετικό όμως σωρό.
- Παρόμοια, αν οι δύο σωροί δεν είναι ισορροπημένοι, τότε ο παίκτης Α έχει την εξής νικηφόρα στρατηγική:
  - Πρώτα αφαιρεί μερικά σπίρτα από τον σωρό που έχει τα περισσότερα, ώστε οι δύο σωροί να ισορροπήσουν.
  - Στη συνέχεια εφαρμόζει την στρατηγική για ισορροπημένους σωρούς, όντας τώρα δεύτερος παίκτης!

"Αποδείξεις" για το σπίτι

- Στο Nim με τρεις σωρούς:
  - εάν οι δύο τουλάχιστον έχουν ίδιο αριθμό σπίρτων, ο παίκτης Α έχει νικηφόρα στρατηγική.
  - εάν η αρχική κατανομή έχει μία από τις μορφές (3,2,p), (3,1,p) ή (1,2,p), με $p>3$, τότε ο Α έχει νικηφόρα στρατηγική.
- Στο Marienbad με δύο σωρούς:
  - εάν η αρχική κατανομή είναι (1,1), κερδίζει ο Α.
  - εάν η αρχική κατανομή είναι (n,n), $n>1$, ο Β έχει νικηφόρα στρατηγική.
  - εάν η αρχική κατανομή είναι (m,n), $m\neq n$, ο Α έχει νικηφόρα στρατηγική.

Ψηφοφορία σε επιτροπή

Σενάριο (1/2)

- Έστω ότι υπάρχουν 2 εναλλακτικές προτάσεις, A και B, και τρεις ψηφοφόροι.
- Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις: Ή να εγκριθεί η πρόταση A, ή η πρόταση B ή τέλος καμία από τις δύο (περίπτωση N).
- Η ψηφοφορία οργανώνεται ως εξής:
  – Πρώτα γίνεται ψηφοφορία μεταξύ των προτάσεων A και B.
  – Στη συνέχεια, η πρόταση που θα προκριθεί τίθεται σε ψηφοφορία με την περίπτωση N.

Σενάριο (2/2)

- Έστω ότι οι προτιμήσεις των τριών ψηφοφόρων είναι οι εξής:
  - Ψηφοφόρος 1: A>N>B
  - Ψηφοφόρος 2: B>A>N
  - Ψηφοφόρος 3: N>A>B
- Εάν ψηφίσουν όλοι βάσει των προτιμήσεών τους, τότε θα κερδίσει και στις δύο ψηφοφορίες η πρόταση A.

Ανάλυση (1/2)

- Το αποτέλεσμα Α όμως δεν ευχαριστεί τον ψηφοφόρο 3, ο οποίος θα προτιμούσε να μην ψηφιστεί καμία πρόταση.
- Θα μπορούσε όμως να επιτύχει το δικό του επιθυμητό αποτέλεσμα, απλά ψηφίζοντας Β στην πρώτη ψηφοφορία.
- Συνειδητοποιώντας όμως αυτό το ενδεχόμενο ο ψηφοφόρος 2, θα μπορούσε και αυτός με τη σειρά του να ψηφίσει Α στην πρώτη ψηφοφορία, ώστε τελικά να περάσει η πρόταση Α στον δεύτερο γύρο!

  - Ψηφοφόρος 1: Α>Ν>Β
  - Ψηφοφόρος 2: Β>Α>Ν
  - Ψηφοφόρος 3: Ν>Α>Β

Ανάλυση (2/2)

- Μια πιο συστηματική ανάλυση ξεκινά από το δεύτερο γύρο, όπου όλοι ψηφίζουν ειλικρινά.
- Εάν στον δεύτερο γύρο έχει περάσει η πρόταση Α, τότε αυτή κερδίζει την πρόταση Ν.
- Εάν στον δεύτερο γύρο περάσει η πρόταση Β, τότε κερδίζει η πρόταση Ν.
- Άρα ουσιαστικά στον πρώτο γύρο η ψηφοφορία είναι μεταξύ Α και Ν (αντί για Β) και με βάση αυτή τη λογική ψηφίζουν οι ψηφοφόροι.

    - Ψηφοφόρος 1: Α>Ν>Β
    - Ψηφοφόρος 2: Β>Α>Ν
    - Ψηφοφόρος 3: Ν>Α>Β

Συμπέρασμα

- Το παράδειγμα της ψηφοφορίας κάνει φανερή την ανάγκη για "στρατηγικές" επιλογές, δηλαδή επιλογές οι οποίες λαμβάνουν υπόψη τις πιθανές επιλογές των αντιπάλων παικτών.

- Το σενάριο έχει ομοιότητες (μεταξύ άλλων) με την ψηφοφορία στις δημοτικές/νομαρχιακές εκλογές, η οποία γίνεται σε δύο γύρους.

Prisoners' Dilemma

Το δίλημμα
των φυλακισμένων

Σενάριο (1/2)

- Δύο φυλακισμένοι, Α και Β, κρατούνται ως ύποπτοι για ένα έγκλημα.
- Ο ανακριτής μιλάει και στους δύο ξεχωριστά και προσπαθεί να τους πείσει να ομολογήσουν.
- Υπάρχουν τα παρακάτω ενδεχόμενα:
  – Να ομολογήσουν και οι δύο.
  – Να μην ομολογήσει κανένας.
  – Να ομολογήσει μόνο ο Α.
  – Να ομολογήσει μόνο ο Β.

Σενάριο (2/2)

- Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι ποινές των δύο φυλακισμένων για κάθε μία από τις τέσσερις περιπτώσεις:

\ B A	Ομολογεί	Δεν ομολογεί
Ομολογεί	5, 5	0, 15
Δεν ομολογεί	15, 0	1, 1

Ανάλυση

- Αν το δούμε συνολικά, το συμφερότερο και για τους δύο μαζί είναι να μην ομολογήσουν.
- Ωστόσο, αν π.χ. ο Β πιστεύει ότι ο Α δεν θα ομολογήσει, τότε τον Β τον συμφέρει να ομολογήσει.
  – Το ίδιο ισχύει ανάλογα για τον Α.
- Γενικότερα, για κάθε επιλογή του Α, τον Β τον συμφέρει να ομολογήσει!!
- Τελικά ομολογούν και οι δύο.

Σχόλια

- Το παιχνίδι με τους φυλακισμένους δεν είναι μηδενικού αθροίσματος.
  - Υπάρχουν περιπτώσεις όπου και οι δύο παίκτες κερδίζουν, π.χ. όταν δεν ομολογήσουν.
- Έχει εφαρμογές στην καθημερινή ζωή:
  - Κούρσα εξοπλισμών μεταξύ δύο κρατών.
  - Η επιλογή δύο αντιμαχόμενων μερών σε μια αμφισβήτηση σχετικά με το αν θα χρησιμοποιήσουν δικηγόρους ή/και θα καταφύγουν στα δικαστήρια για να λύσουν για την αντιδικία τους.

Κανονική μορφή αναπαράστασης παιχνιδιών

Κανονική μορφή αναπαράστασης

- Η **κανονική** ή **στρατηγική** (**normal** ή **strategic**) μορφή αναπαράστασης παιχνιδιών χρησιμοποιεί πίνακες (όπως είδαμε στο δίλημμα των φυλακισμένων).
- Οι επικεφαλίδες των γραμμών και των στηλών του πίνακα ονομάζονται "στρατηγικές" (strategies) των παικτών.
- Στα κελιά των πινάκων υπάρχουν αριθμοί που δηλώνουν το όφελος (ή κέρδος ή απολαβή) κάθε παίκτη για κάθε συνδυασμό στρατηγικών.

Σημειογραφία

- Το πλήθος των παικτών το συμβολίζουμε με N.
- Έναν τυχαίο παίκτη τον συμβολίζουμε με i.
- Μια τυχαία στρατηγική του παίκτη i την συμβολίζουμε με s_i.
  - Εάν θέλουμε να αναφερθούμε σε περισσότερες στρατηγικές του παίκτη i, χρησιμοποιούμε συμβολισμούς όπως s_i*, s_i', s_i# κλπ.
- Ένα σύνολο στρατηγικών για όλους τους άλλους παίκτες εκτός του i το συμβολίζουμε με s_{-i}.
- Η συνάρτηση απολαβής (payoff function) του παίκτη i συμβολίζεται με u_i.
  - π.χ. $u_i(s_1, s_2, ..., s_N)$ ή $u_i(s_i, s_{-i})$

Συνάρτηση απολαβής

- Συνηθίζεται οι μεγαλύτερες τιμές τις συνάρτησης απολαβής να θεωρούνται καλύτερες.
- Σε περίπτωση που σε κάποιο πρόβλημα συμβαίνει το αντίθετο, όπως π.χ. στο δίλημμα των φυλακισμένων, μπορεί να οριστεί μια νέα συνάρτηση απολαβής με αφαίρεση των αρχικών τιμών από κάποια σταθερά.

B A	O	ΔO
O	5,5	0,15
ΔO	15,0	1,1

B A	O	ΔO
O	10,10	15,0
ΔO	0,15	14,14

Παιχνίδια με περισσότερους από δύο παίκτες (1/3)

- Όταν σε ένα παιχνίδι υπάρχουν περισσότεροι από δύο παίκτες, η αναπαράσταση του παιχνιδιού με έναν πίνακα καθίσταται προβληματική.
  - Έστω ότι τρεις εταιρείες, Α, Β και Γ, πρέπει να επιλέξουν να αναπτύξουν ένα από δύο ενδεχόμενα προϊόντα, Χ και Υ.
  - Η διαθέσιμη αγορά για κάθε προϊόν είναι 6 μονάδες και αυτή κατανέμεται ισόποσα στις εταιρείες που αποφασίζουν να αναπτύξουν το προϊόν.
  - Η κανονική μορφή αναπαράστασης του παιχνιδιού χρειάζεται δύο πίνακες, έναν για κάθε στρατηγική της εταιρείας Γ, όπως φαίνεται στην επόμενη διαφάνεια.

Παιχνίδια με περισσότερους από δύο παίκτες (2/3)

B / A	X	Y
X	2,2,2	3,6,3
Y	6,3,3	3,3,6

Στρατηγική εταιρείας Γ: X

B / A	X	Y
X	3,3,6	6,3,3
Y	3,6,3	2,2,2

Στρατηγική εταιρείας Γ: Y

Παιχνίδια με περισσότερους από δύο παίκτες (3/3)

- Εναλλακτικά, το παιχνίδι μπορεί να περιγραφεί παραθέτοντας όλους τους συνδυασμούς στρατηγικών των παικτών, μαζί με τις αντίστοιχες απολαβές:
  - XXX=2,2,2
  - YXX=6,3,3
  - XYX=3,6,3
  - YYX=3,3,6
  - XXY=3,3,6
  - YXY=3,6,3
  - XYY=6,3,3
  - YYY=2,2,2

Κυριαρχία στρατηγικών

Κυριαρχία

- Μια στρατηγική s_i* λέγεται ότι κυριαρχεί (**dominates**) μιας στρατηγικής $s_i^{\#}$, όταν ισχύει:
  - $\forall\ s_{-i}: u_i(s_i^*, s_{-i}) > u_i(s_i^{\#}, s_{-i})$
- Με άλλα λόγια, μια στρατηγική s_i* κυριαρχεί μιας στρατηγικής $s_i^{\#}$, εάν για όλους τους συνδυασμούς στρατηγικών των άλλων παικτών η στρατηγική s_i* έχει μεγαλύτερη απολαβή σε σχέση με την $s_i^{\#}$.
- Η στρατηγική $s_i^{\#}$ χαρακτηρίζεται ως κυριαρχούμενη στρατηγική (**dominated strategy**).

Κυρίαρχη στρατηγική

- Μια στρατηγική s_i* για τον παίκτη i λέγεται κυρίαρχη στρατηγική (**dominant strategy**), εάν ισχύει:
  - $\forall s_i \neq s_i^*, \forall s_{-i}: u_i(s_i^*, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$
- Με άλλα λόγια, μια στρατηγική s_i* είναι κυρίαρχη στρατηγική, εάν για όλους τους συνδυασμούς στρατηγικών των άλλων παικτών η στρατηγική αυτή έχει τη μεγαλύτερη απολαβή σε σχέση με τις εναλλακτικές στρατηγικές του παίκτη i.
  - Σε μια τέτοια περίπτωση, όλες οι εναλλακτικές στρατηγικές του παίκτη i είναι κυριαρχούμενες.

Παράδειγμα (1/2)

- Έστω το δίλημμα των φυλακισμένων:

B A	O	ΔΟ
O	10,10	15,0
ΔΟ	0,15	14,14

- Η στρατηγική O είναι κυρίαρχη για τον παίκτη A (φυσικά και για τον B) γιατί:
  – $u_A(O,O)>u_A(\Delta O,O)$
  – $u_A(O,\Delta O)>u_A(\Delta O,\Delta O)$

Παράδειγμα (2/2)

- Προφανώς ένας παίκτης που έχει κυρίαρχη στρατηγική, την ακολουθεί.
- Όταν κάθε παίκτης έχει μια κυρίαρχη στρατηγική, τότε το παιχνίδι έχει **λύση κυρίαρχης στρατηγικής**.
- Δεν υπάρχουν πάντα κυρίαρχες στρατηγικές για κάθε παίκτη.
  - Είναι δυνατόν να μην έχει κανένας παίκτης κυρίαρχη στρατηγική, να έχουν μερικοί μόνο παίκτες ή τέλος να έχουν όλοι οι παίκτες.

Παιχνίδι: Η μάχη των φύλων

- Ένας άνδρας και μια γυναίκα πρέπει να αποφασίσουν σχετικά με το αν θα πάνε στο γήπεδο ή στην όπερα.
  - Ο άνδρας προτιμά το γήπεδο ενώ η γυναίκα την όπερα, ωστόσο και οι δύο προτιμούν να πάνε κάπου μαζί αντί για χώρια
- Το παιχνίδι δεν έχει κυρίαρχη στρατηγική:

Γ Α	Γήπεδο	Όπερα
Γήπεδο	3,1	0,0
Όπερα	0,0	1,3

Ασθενής κυριαρχία

- Μια στρατηγική s_i* λέγεται ότι κυριαρχεί ασθενώς (**weakly dominates**) μιας στρατηγικής $s_i^{\#}$, όταν ισχύει:
  - $\forall\ s_{-i}$: $u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i^{\#}, s_{-i})$ και
  - $\exists\ s_{-i}'$: $u_i(s_i^*, s_{-i}') > u_i(s_i^{\#}, s_{-i}')$
- Με άλλα λόγια, μια στρατηγική s_i* κυριαρχεί ασθενώς μιας στρατηγικής $s_i^{\#}$, εάν για όλους τους συνδυασμούς στρατηγικών των άλλων παικτών η στρατηγική s_i* έχει ίση ή μεγαλύτερη απολαβή σε σχέση με την $s_i^{\#}$, ενώ υπάρχει τουλάχιστον ένας συνδυασμός στρατηγικών των άλλων παικτών s_{-i}', για τον οποίο η s_i* αποφέρει μεγαλύτερη απολαβή από την $s_i^{\#}$.
- Η στρατηγική $s_i^{\#}$ χαρακτηρίζεται ως ασθενώς κυριαρχούμενη στρατηγική
  (**weakly dominated strategy**).

Ασθενώς κυρίαρχη στρατηγική

- Μια στρατηγική s_i* για τον παίκτη i λέγεται ασθενώς κυρίαρχη στρατηγική (**weakly dominant strategy**), εάν ισχύει:
  - $\forall\ s_i \neq s_i^*,\ \forall\ s_{-i},\ :\ u_i(s_i^*,\ s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$ και
  - $\forall\ s_i \neq s_i^*,\ \exists\ s_{-i}',\ u_i(s_i^*,\ s_{-i}') > u_i(s_i, s_{-i}')$
- Με άλλα λόγια, μια στρατηγική s_i* είναι ασθενώς κυρίαρχη στρατηγική, εάν για κάθε μία από τις εναλλακτικές στρατηγικές του παίκτη i η s_i* έχει τουλάχιστον ίση απολαβή για όλους τους συνδυασμούς στρατηγικών των υπολοίπων παικτών και καλύτερη απολαβή για τουλάχιστον έναν συνδυασμό στρατηγικών των υπολοίπων παικτών.
  - Σε μια τέτοια περίπτωση, όλες οι εναλλακτικές στρατηγικές του παίκτη i είναι ασθενώς κυριαρχούμενες.

Παράδειγμα

- Έστω το παρακάτω υποθετικό παιχνίδι:

B A	Left	Right
Top	7, 3	5, 3
Bottom	7, 0	3, -1

- Παίκτης A: Η στρατηγική Top κυριαρχεί ασθενώς της Bottom.
- Παίκτης B: Η στρατηγική Left κυριαρχεί ασθενώς της Right.

Παράδειγμα: Κοινόχρηστοι χώροι (1/5)

- Έστω δύο ένοικοι μιας κατοικίας, A και B, οι οποίοι πρέπει να αφιερώσουν τον ελεύθερό τους χρόνο για καθαριότητα των κοινόχρηστων χώρων.
- Όσο περισσότερο χρόνο αφιερώσουν συνολικά, τόσο πιο καθαροί θα είναι οι κοινόχρηστοι χώροι.
  - Φυσικά, κάθε ένοικος προτιμά να ασχοληθεί με την καθαριότητα ο έταιρος ένοικος.
- Κάθε ένοικος έχει να επιλέξει μεταξύ του να αφιερώσει 0, 1, 2, 3 ή 4 ώρες για την καθαριότητα.

Παράδειγμα: Κοινόχρηστοι χώροι (2/5)

- Εάν x είναι οι ώρες που αφιερώνει ο A και y οι ώρες που αφιερώνει ο B.
- Έστω ότι το όφελος για κάθε έναν από τους ενοίκους είναι αντίστοιχα:
  - sqrt(x+y)-x
  - sqrt(x+y)-y
- Ακολουθεί ο πίνακας του παιχνιδιού:

y x	0	1	2	3	4
0	0.0, 0.0	1.0, 0.0	1.4, -0.6	1.7, -1.3	2.0, -2.0
1	0.0, 1.0	0.4, 0.4	0.7, -0.3	1.0, -1.0	1.2, -1.8
2	-0.6, 1.4	-0.3, 0.7	0.0, 0.0	0.2, -0.8	0.4, -1.5
3	-1.3, 1.7	-1.0, 1.0	-0.8, 0.2	-0.5, -0.5	-0.3, -1.3
4	-2.0, 2.0	-1.8, 1.2	-1.5, 0.4	-1.3, -0.3	-1.2, -1.2

Παράδειγμα: Κοινόχρηστοι χώροι (3/5)

- Παρατηρώντας τις στρατηγικές του ενοίκου Α (αριστερή στήλη), βλέπουμε ότι η στρατηγική 0 κυριαρχεί ασθενώς της στρατηγικής 1 και ισχυρώς όλων των υπολοίπων στρατηγικών.
- Άρα η στρατηγική 0 είναι μια ασθενώς κυρίαρχη στρατηγική για τον ένοικο Α.
  – Αντίστοιχα προκύπτουν για τις στρατηγικές του ενοίκου Β (επάνω γραμμή).

Παράδειγμα: Κοινόχρηστοι χώροι (4/5)

- Έστω ότι οι απολαβές των δύο ενοίκων δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:
  – 2*sqrt(x+y)-x
  – 2*sqrt(x+y)-y
- Στον πίνακα φαίνεται το νέο όφελος του ένοικου Α:

y x	0	1	2	3	4
0	0.0, 0.0	2.0, 1.0	2.8, 0.8	3.5, 0.5	4.0, 0.0
1	1.0, 2.0	1.8, 1.8	2.5, 1.5	3.0, 1.0	3.5, 0.5
2	0.8, 2.8	1.5, 2.5	2.0, 2.0	2.5, 1.5	2.9, 0.9
3	0.5, 3.5	1.0, 3.0	1.5, 2.5	1.9, 1.9	2.3, 1.3
4	0.0, 4.0	0.5, 3.5	0.9, 2.9	1.3, 2.3	1.7, 1.7

Παράδειγμα: Κοινόχρηστοι χώροι (5/5)

- Με την τροποποιημένη συνάρτηση απολαβής δεν υπάρχει καμία κυρίαρχη στρατηγική για κανέναν παίκτη.

Επιλυσιμότητα κυριαρχίας

Γενικά

- Εάν υπάρχει κυρίαρχη στρατηγική για κάποιον παίκτη, τότε αυτή επιλέγεται.
- Εάν δεν υπάρχει κυρίαρχη στρατηγική:
  - Εάν υπάρχουν κυριαρχούμενες στρατηγικές, τότε αυτές αγνοούνται.
  - Η επιλογή θα γίνει μεταξύ των μη-κυριαρχούμενων στρατηγικών.
  - Πάντα υπάρχει τουλάχιστον μία μη-κυριαρχούμενη στρατηγική.

Επαναλαμβανόμενη απαλοιφή κυριαρχούμενων στρατηγικών

- Εάν δεν υπάρχει κυρίαρχη στρατηγική, τότε μια καλή αρχή είναι να απαλείψουμε τις κυριαρχούμενες στρατηγικές.
- Η απαλοιφή κυριαρχούμενων στρατηγικών μπορεί να οδηγήσει στη δημιουργία νέων κυριαρχούμενων στρατηγικών, οι οποίες με τη σειρά τους θα απαλειφθούν και αυτές.
- Η διαδικασία αυτή ονομάζεται επαναλαμβανόμενη απαλοιφή κυριαρχούμενων στρατηγικών
  - **Iterated Elimination of Dominated Strategies**, **IEDS**.

Παράδειγμα: Ανταγωνισμός τιμών (1/3)

- Έστω δύο εταιρείες σε μια δυοπωλιακή (duopoly) αγορά, οι οποίες παράγουν ακριβώς το ίδιο προϊόν.
- Κάθε εταιρεία μπορεί να τιμολογήσει το προϊόν της με μια από τρεις εναλλακτικές τιμές.
- Η εταιρεία που τιμολογεί φθηνότερα κερδίζει ολόκληρη την αγορά.
- Σε περίπτωση ίσης τιμολόγησης, η αγορά μοιράζεται εξίσου.

Παράδειγμα: Ανταγωνισμός τιμών (2/3)

- Παρακάτω φαίνεται ο πίνακας του παιχνιδιού:

Β Α	Υψηλή	Μεσαία	Χαμηλή
Υψηλή	6,6	0,10	0,8
Μεσαία	10,0	5,5	0,8
Χαμηλή	8,0	8,0	4,4

- Η στρατηγική "Υψηλή" κυριαρχείται από τη στρατηγική "Μεσαία" και για τους δύο παίκτες, οπότε απαλείφεται.

Παράδειγμα: Ανταγωνισμός τιμών (3/3)

Β Α	Μεσαία	Χαμηλή
Μεσαία	5,5	0,8
Χαμηλή	8,0	4,4

- Στη συνέχεια, η στρατηγική "Μεσαία" κυριαρχείται από τη στρατηγική "Χαμηλή" (κάτι που δεν συνέβαινε εξαρχής!) οπότε απαλείφεται.

Β Α	Χαμηλή
Χαμηλή	4,4

Παράδειγμα: Ψηφοφορία (1/4)

- Έστω το πρόβλημα της ψηφοφορίας με τις δύο προτάσεις και τους τρεις ψηφοφόρους.
- Κάθε στρατηγική ενός ψηφοφόρου τρία μέρη:
  - Τι θα ψηφίσει στον πρώτο γύρο
  - Τι θα ψηφίσει στον δεύτερο γύρο εάν περάσει η πρόταση Α.
  - Τι θα ψηφίσει στον δεύτερο γύρο εάν περάσει η πρόταση Β.
- Για παράδειγμα, μια τέτοια στρατηγική είναι η ΑΑΝ.
- Συνολικά κάθε ψηφοφόρος έχει 8 διαθέσιμες στρατηγικές.

- Ψηφοφόρος 1: A>N>B
- Ψηφοφόρος 2: B>A>N
- Ψηφοφόρος 3: N>A>B

Παράδειγμα: Ψηφοφορία (2/4)

- Έχουμε ήδη εξηγήσει ότι στον δεύτερο γύρο "συμφέρει" κάθε ψηφοφόρο να ψηφίσει ειλικρινά.
- Έτσι, για τον ψηφοφόρο 1:
  - Η στρατηγική **AAN** κυριαρχεί επί των ANN, ANB και AAB.
  - Η στρατηγική **BAN** κυριαρχεί επί των BNN, BNB και BAB.
    - Θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε πίνακες 8x8 για να το διαπιστώσουμε.
- Παρόμοια, για τον ψηφοφόρο 2:
  - Η στρατηγική **AAB** κυριαρχεί επί των ANB, AAN και ANN.
  - Η στρατηγική **BAB** κυριαρχεί επί των BNB, BAN και BNN.
- Τέλος, για τον ψηφοφόρο 3:
  - Η στρατηγική **ANN** κυριαρχεί επί των AAN, ANB και AAB.
  - Η στρατηγική **BNN** κυριαρχεί επί των BAN, BNB και BAB.

- Ψηφοφόρος 1: A>N>B
- Ψηφοφόρος 2: B>A>N
- Ψηφοφόρος 3: N>A>B

Παράδειγμα: Ψηφοφορία (3/4)

- Μπορούμε πλέον να γράψουμε την κανονική μορφή του παιχνιδιού, με τις στρατηγικές που έμειναν, ως εξής:

Ψ2 Ψ1	AAB	BAB
AAN	1,0,0	1,0,0
BAN	1,0,0	0,-1,1

Ψ3: ANN

Ψ2 Ψ1	AAB	BAB
AAN	1,0,0	0,-1,1
BAN	0,-1,1	0,-1,1

Ψ3: BNN

- Ψηφοφόρος 1: A>N>B
- Ψηφοφόρος 2: B>A>N
- Ψηφοφόρος 3: N>A>B

Παράδειγμα: Ψηφοφορία (4/4)

- Βλέπουμε από τους πίνακες ότι:
  - Για τον ψηφοφόρο 1, η AAN κυριαρχεί της BAN.
  - Για τον ψηφοφόρο 2, η AAB κυριαρχεί της BAB.
  - Για τον ψηφοφόρο 3, η BNN κυριαρχεί της ANN.
- Άρα η λύση του προβλήματος είναι η:
  - **(AAN, AAB, BNN)**
- Η λύση αυτή είναι η ίδια που βρήκαμε και στη διαφάνεια 33.

- Ψηφοφόρος 1: A>N>B
- Ψηφοφόρος 2: B>A>N
- Ψηφοφόρος 3: N>A>B

Τέλος Ενότητας