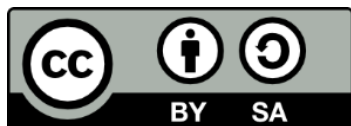


ΘΕΩΡΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ ΚΑΙ ΑΥΤΟΜΑΤΩΝ

Ενότητα 3: Μη-ντετερμινιστικά πεπερασμένα αυτόματα

Ρεφανίδης Ιωάννης
Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



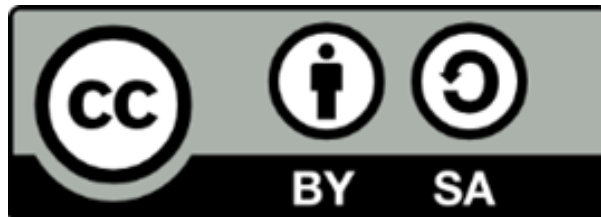
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Συνολική κατάσταση (configuration)

(1/2)

- Η συνολική κατάσταση υπολογισμού ενός αυτομάτου σε κάποια στιγμή της λειτουργίας του είναι η τρέχουσα κατάστασή του και το αδιάβαστο τμήμα της λέξης που επεξεργάζεται.
 - Συμβολίζεται με (q, w) , όπου q η τρέχουσα κατάσταση και w το κομμάτι της λέξης εισόδου που δεν έχει ακόμη διαβαστεί.
 - $(q, w) \in K \times \Sigma^*$

Συνολική κατάσταση (configuration) (2/2)

- Ο συμβολισμός $(q, w) \vdash_M (q', w')$ δηλώνει ότι το αυτόματο M μπορεί να μεταβεί από τη συνολική κατάσταση (q, w) στην (q', w') σε ένα βήμα.
 - Προφανώς ισχύει: $w = \sigma w'$ για κάποιο σύμβολο σ και επιπλέον $\delta(q, \sigma) = q'$.
- Παρόμοια, ο συμβολισμός $(q, w) \vdash^*_M (q', w')$ δηλώνει ότι το αυτόματο M μπορεί να μεταβεί από τη συνολική κατάσταση (q, w) στην (q', w') σε κανένα, ένα ή περισσότερα βήματα.

Πεπερασμένα αυτόματα

Μη-ντετερμινιστικά
πεπερασμένα αυτόματα

Μη-ντετερμινιστικά πεπερασμένα αυτόματα (ΜΠΑ) (Non-deterministic finite automata – NFA)

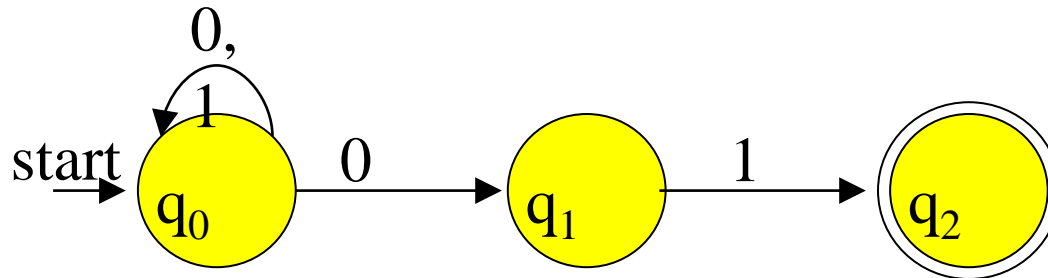
- Από κάθε κατάσταση επιτρέπονται πολλές διαφορετικές μεταβάσεις για το ίδιο σύμβολο εισόδου.
- Το αυτόματο μπορεί αυθαίρετα να επιλέξει ποια από τις δυνατές μεταβάσεις θα ακολουθήσει.
- Η επιλογή αυτή είναι **μη-ντετερμινιστική**.

Σύγκριση ΜΠΑ και ΝΠΑ

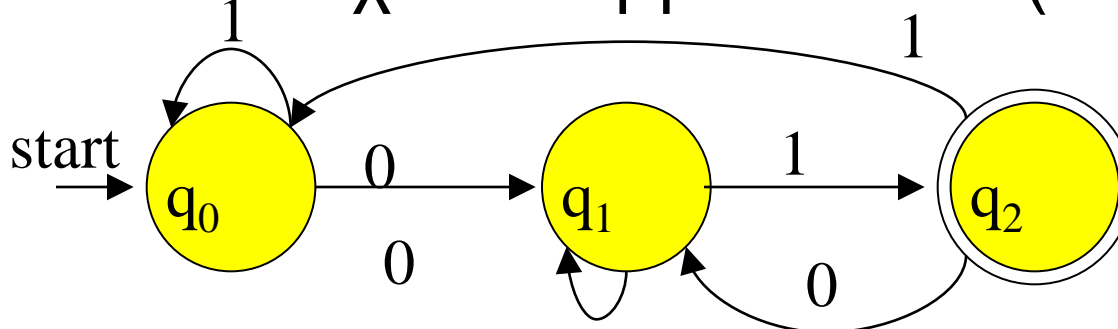
- Μια λέξη γίνεται δεκτή από ένα ΜΠΑ εάν υπάρχει κάποιος τρόπος το ΜΠΑ να μεταβεί από την αρχική του κατάσταση σε μια τελική με είσοδο τη συγκεκριμένη λέξη.
- Κάθε μη-ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματα είναι ισοδύναμο με κάποιο ντετερμινιστικό.
- Τα μη-ντετερμινιστικά πεπερασμένα αυτόματα είναι ευκολότερα στη σχεδίαση και την κατανόηση από τα αντίστοιχα ντετερμινιστικά.

Παράδειγμα

- Μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο (ΜΠΑ) που δέχεται όλες τις λέξεις που τελειώνουν σε 01.

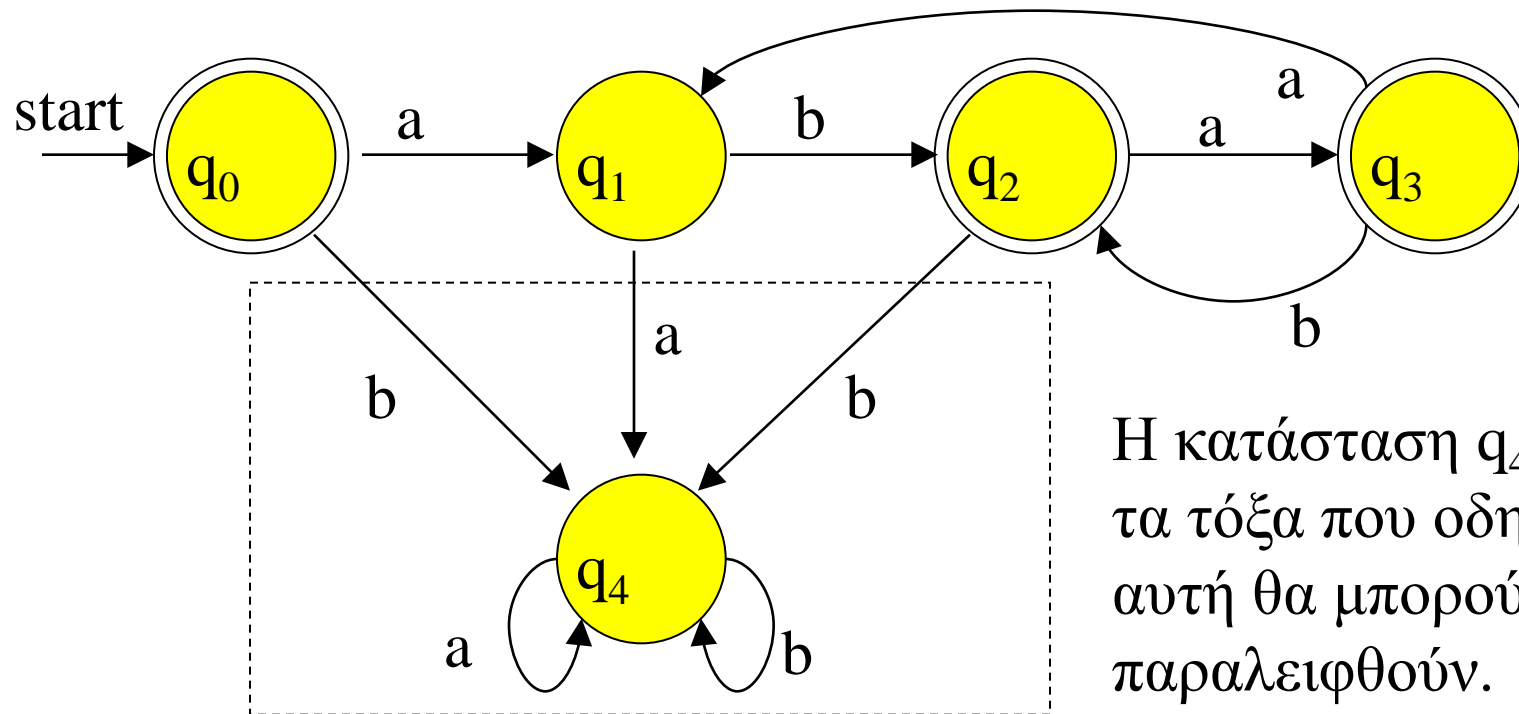


- και το αντίστοιχο ντετερμινιστικό... (ΝΠΑ)



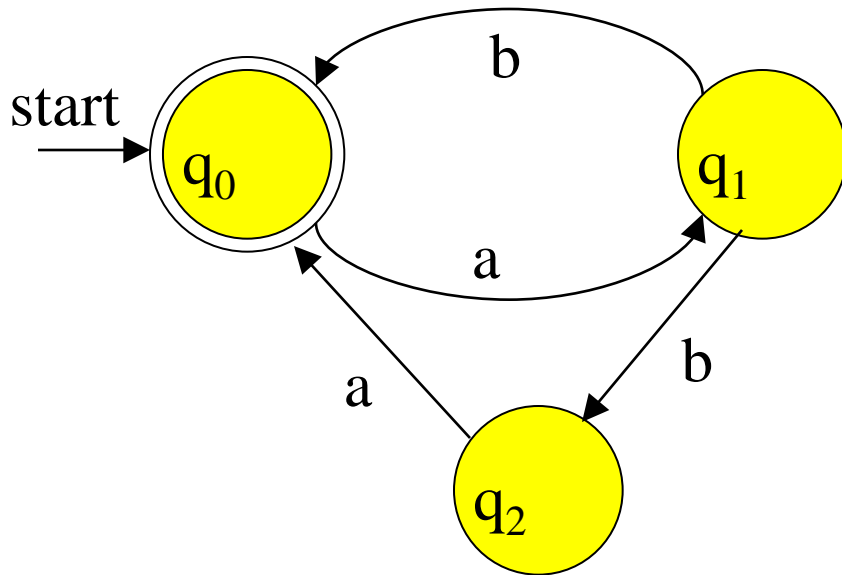
Ακόμη ένα παράδειγμα (1/2)

- ΝΠΑ για τη γλώσσα $L=(ab + aba)^*$.



Ακόμη ένα παράδειγμα (2/2)

- Και το αντίστοιχο ΜΠΑ για τη γλώσσα $L=(ab + aba)^*$.



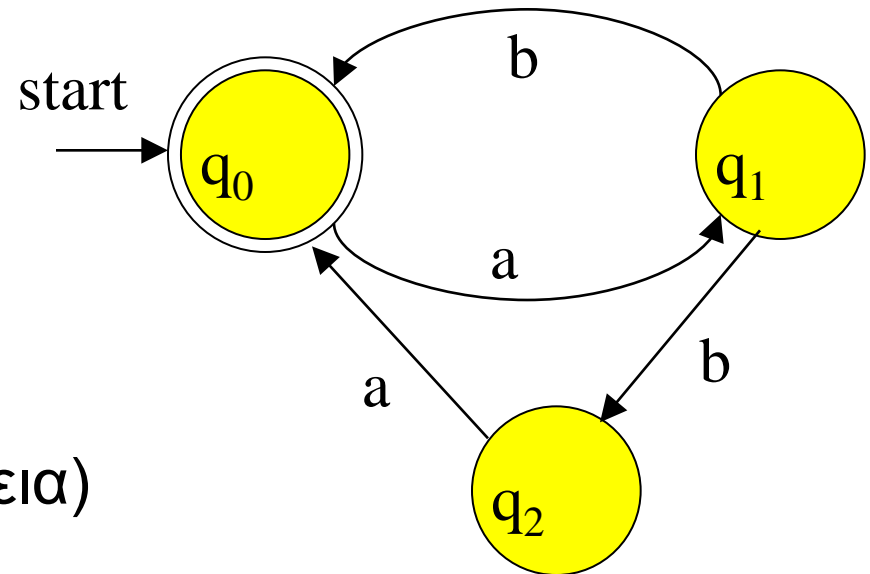
Όταν από μια κατάσταση δεν εξέρχεται βέλος για κάποιο συγκεκριμένο σύμβολο εισόδου, αυτό δηλώνει ότι αν στη κατάσταση αυτή έρθει το συγκεκριμένο σύμβολο εισόδου, το αυτόματα τερματίζει απαντώντας αρνητικά (πεθαίνει – dies)

Ορισμός ΜΠΑ

- Ένα μη-ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο είναι μια πεντάδα $M = \{K, \Sigma, s, F, \Delta\}$ όπου:
 - K είναι ένα πεπερασμένο σύνολο από καταστάσεις
 - Σ είναι ένα αλφάβητο
 - $s \in K$ είναι η αρχική κατάσταση
 - $F \subseteq K$ είναι το σύνολο των τελικών καταστάσεων
 - Δ είναι η **σχέση μετάβασης** (transition function) από το $K \times \Sigma$ στο K .

Παράδειγμα ορισμού ΜΠΑ (1/2)

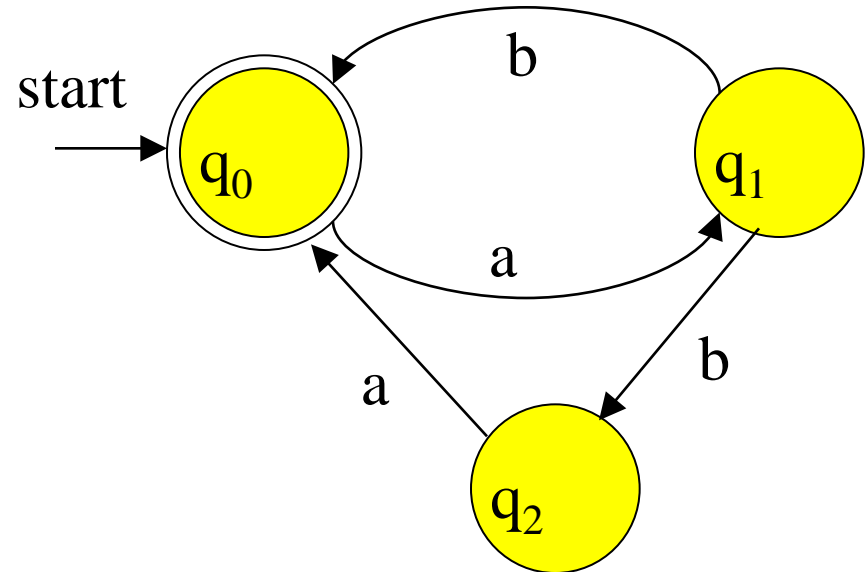
- $M = \{K, \Sigma, s, F, \Delta\}$
 - $K = \{q_0, q_1, q_2\}$
 - $\Sigma = \{a, b\}$
 - $s = q_0$
 - $F = \{q_0\}$
 - και... (επόμενη διαφάνεια)



Παράδειγμα ορισμού ΜΠΑ (2/2)

- Σχέση μετάβασης Δ

Τρέχουσα κατάσταση q	Επόμενη είσοδος σ	Επόμενη κατάσταση $\Delta(q,\sigma)$
q_0	a	$\{q_1\}$
q_0	b	$\{\}$
q_1	a	$\{\}$
q_1	b	$\{q_0, q_2\}$
q_2	a	q_0
q_2	b	$\{\}$



Πεπερασμένα αυτόματα

Ισοδυναμία ντετερμινιστικών και
μη-ντετερμινιστικών
πεπερασμένων αυτομάτων

Ισοδυναμία ΝΠΑ και ΜΠΑ

- Δύο πεπερασμένα αυτόματα M_1 και M_2 ονομάζονται ισοδύναμα αν και μόνο αν $L(M_1)=L(M_2)$.
- Για κάθε μη-ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματα υπάρχει ένα ισοδύναμο ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο.

(Μαθηματικό υπόβαθρο)

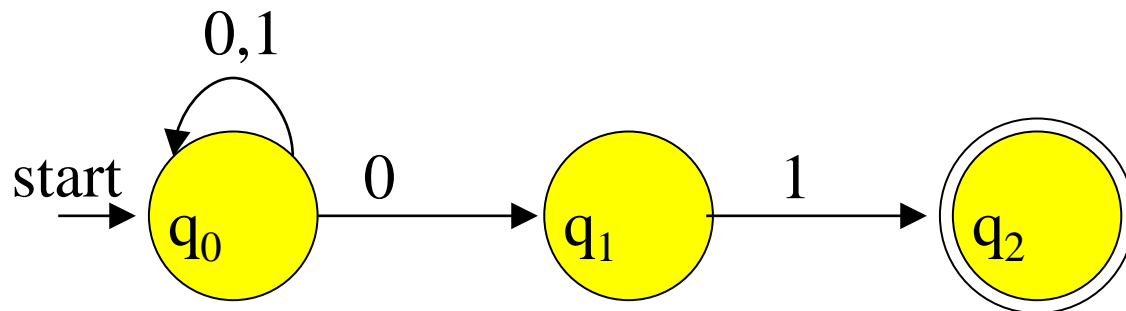
- Για ένα σύνολο A , το δυναμοσύνολό του συμβολίζεται με 2^A ή με $\text{Power}(A)$ και αποτελείται από όλα τα υποσύνολά του.
- Βρίσκεται εύκολα ότι το σύνολο 2^A έχει $2^{|A|}$ στοιχεία, εξ'ού και ο συμβολισμός 2^A .
- Παράδειγμα:
 - $A = \{a,b,c\}$
 - $2^A = \{ \{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\} \}$

Μετατροπή ΜΠΑ σε ΝΠΑ - Βήμα 1

- Έστω $M = \{K_M, \Sigma_M, s_M, F_M, \delta\}$ ένα μη-ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο και $N = \{K_N, \Sigma_N, s_N, F_N, \Delta\}$ το αντίστοιχο ντετερμινιστικό που θέλουμε να κατασκευάσουμε.
- Βασική ιδέα: Το σύνολο των καταστάσεων του N είναι το δυναμοσύνολο των καταστάσεων του M :
 - $K_N = 2^{K_M}$
 - Ωστόσο δεν είναι όλες οι καταστάσεις K_N προσβάσιμες...

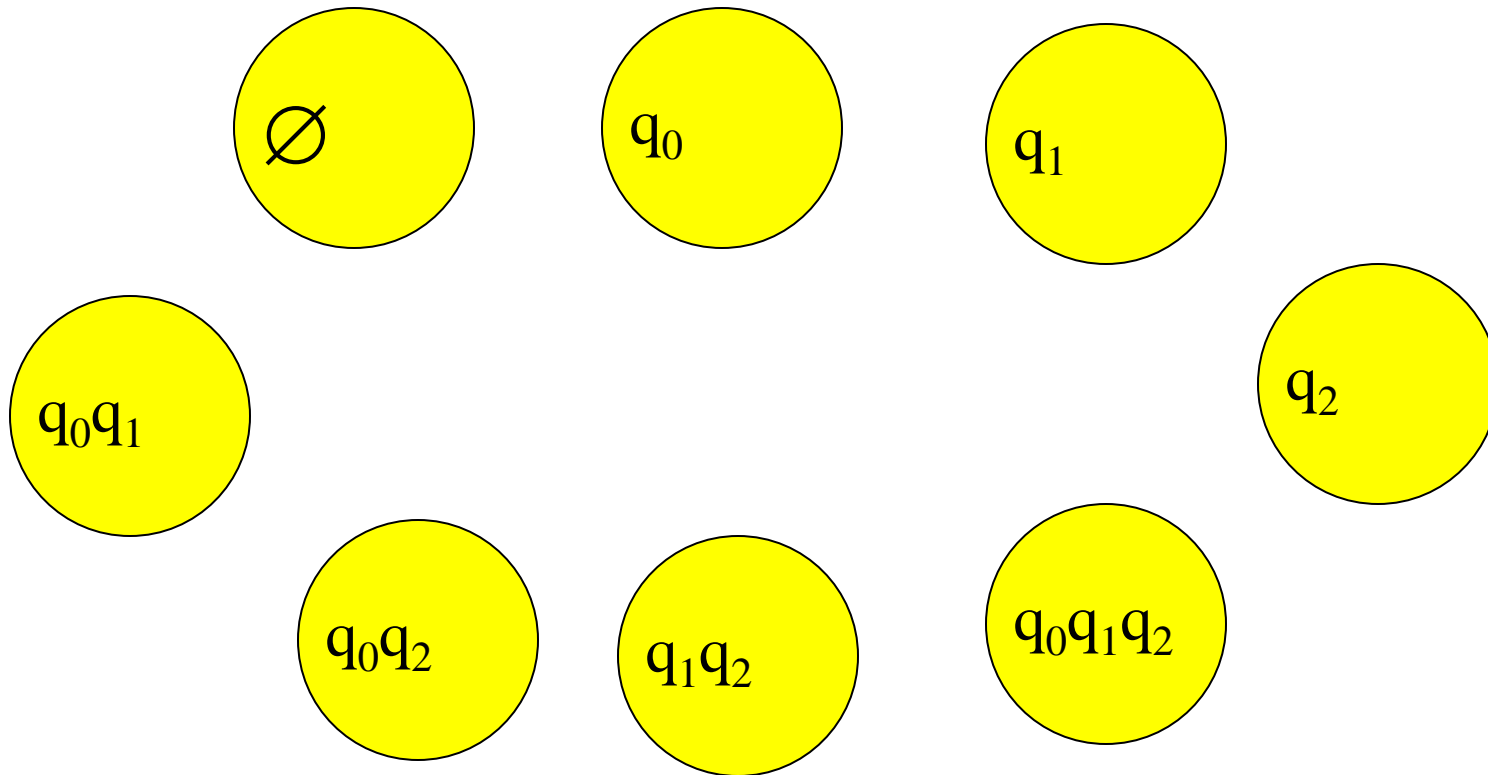
Παράδειγμα μετατροπής ΜΠΑ σε ΝΠΑ – Βήμα 1

- Έστω το ΜΠΑ M τριών καταστάσεων που δέχεται τη γλώσσα $L=(0+1)^*01$.



- Το αντίστοιχο ΝΠΑ N μπορεί να έχει μέχρι και 8 καταστάσεις:
 - , $K_N=2^{K_M}$, $|K_N| = 2^{|K_M|} = 2^3 = 8$

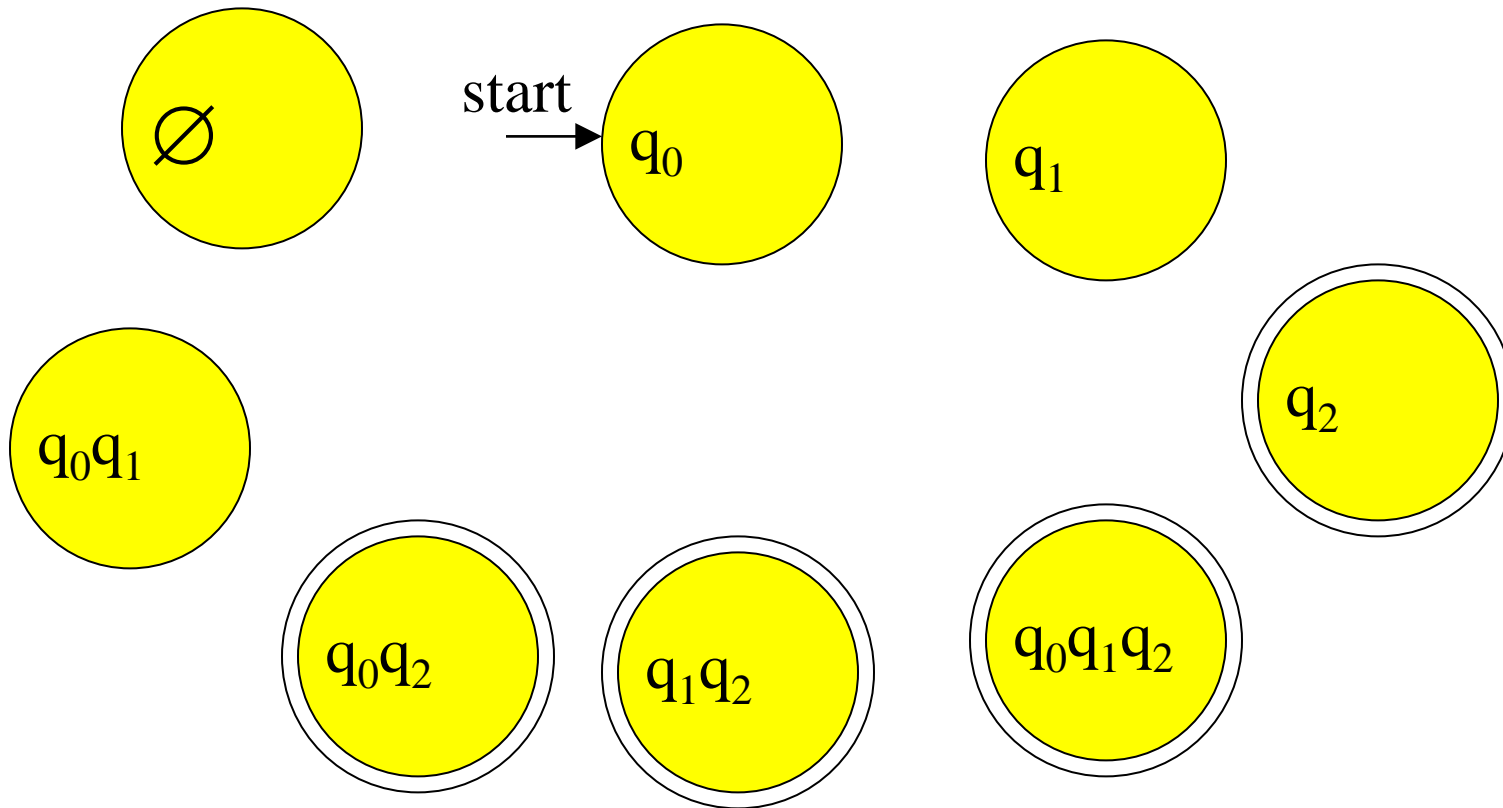
Παράδειγμα μετατροπής ΜΠΑ σε ΝΠΑ – Βήμα 1



Μετατροπή ΜΠΑ σε ΝΠΑ – *Βήμα 2*

- Αρχική κατάσταση του ΝΠΑ είναι αυτή που αντιστοιχεί στην αρχική κατάσταση του ΜΠΑ.
- Τελικές καταστάσεις του ΝΠΑ είναι όσες "περιέχουν" τουλάχιστον μία τελική κατάσταση του ΜΠΑ.

Παράδειγμα μετατροπής ΜΠΑ σε ΝΠΑ – Βήμα 2

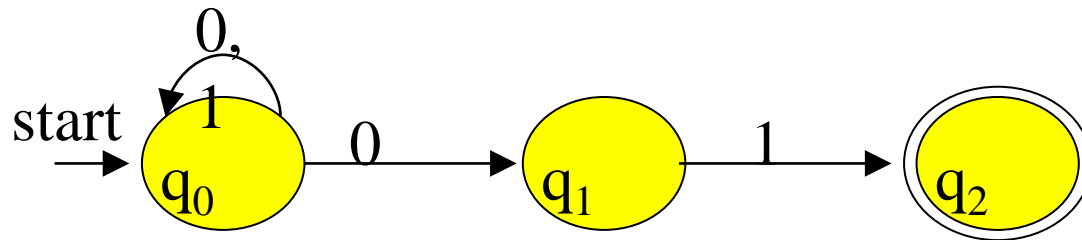


Μετατροπή ΜΠΑ σε ΝΠΑ –Βήμα 3

- Για κάθε $S \subseteq K_M$ (όπου η S αντιστοιχεί σε μια κατάσταση του M) και για κάθε σύμβολο εισόδου σ , ορίζουμε ως $\delta(S, \sigma)$ την κατάσταση του N που αντιστοιχεί στο σύνολο των καταστάσεων:

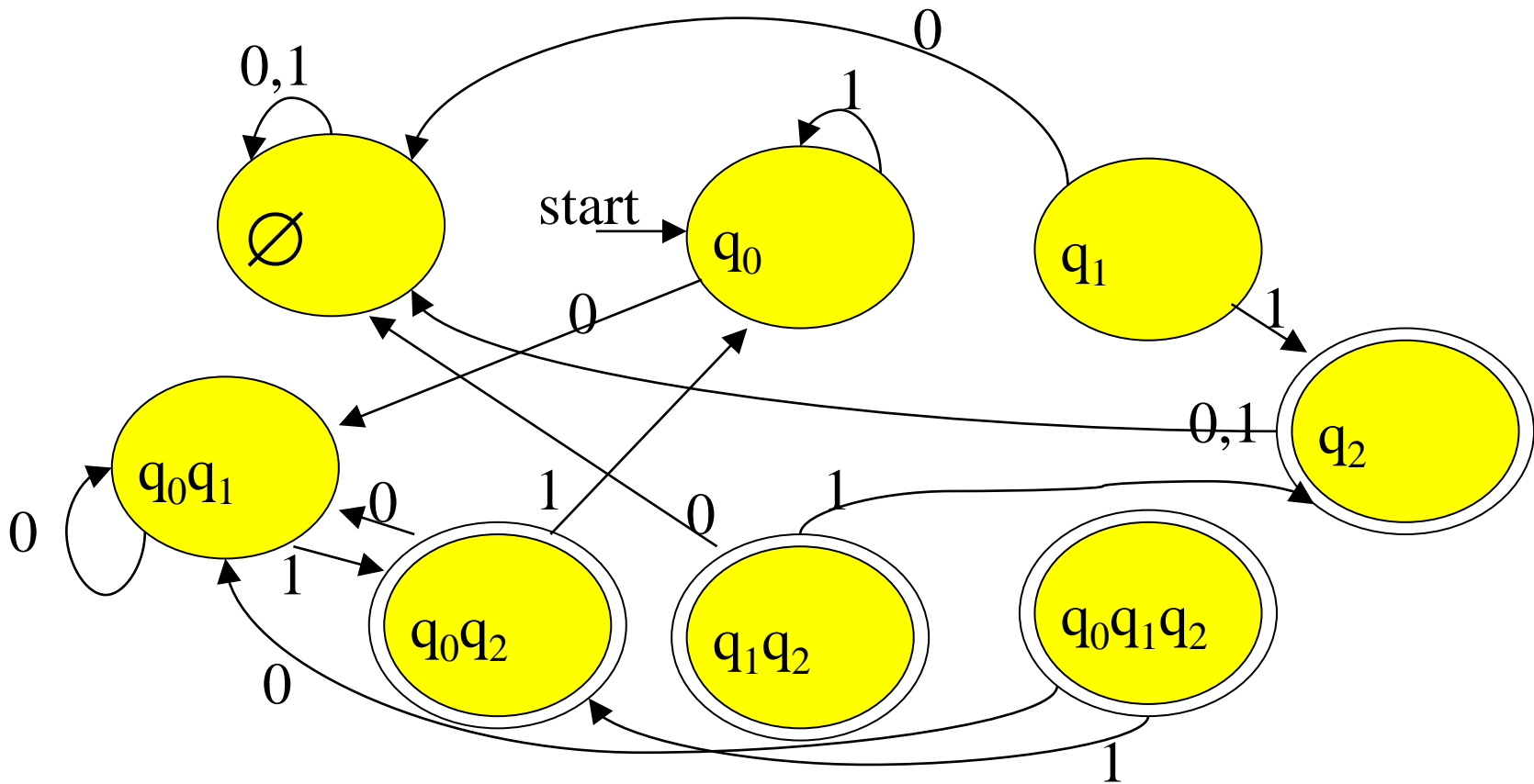
$$\delta(S, \sigma) = \bigcup_{q \in S} \Delta(q, \sigma)$$

Παράδειγμα μετατροπής ΜΠΑ σε ΝΠΑ – Βήμα 3

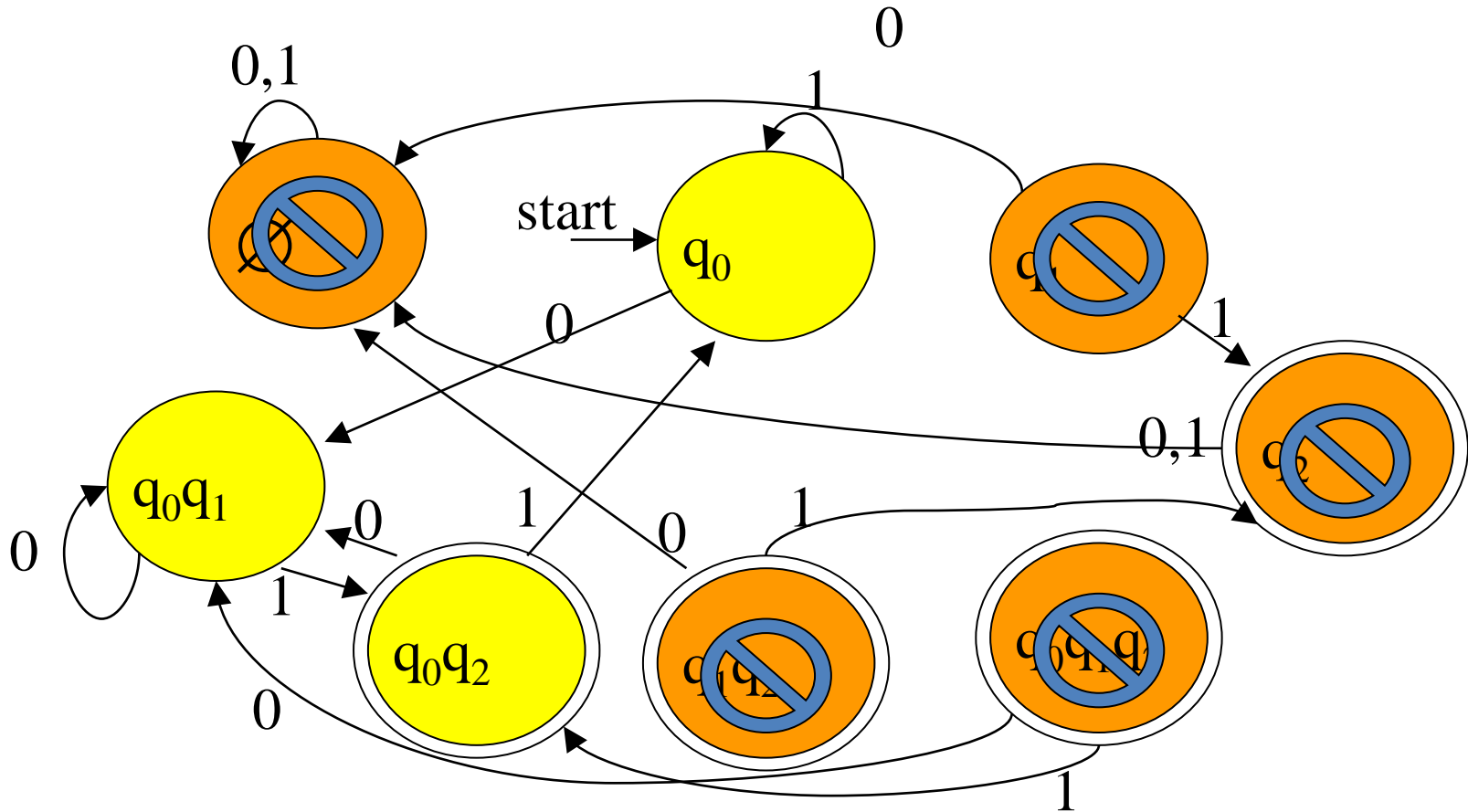


Κατάσταση S	$\delta(S,0)$	$\delta(S,1)$
\emptyset	\emptyset	\emptyset
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	\emptyset	$\{q_2\}$
$\{q_2\}$	\emptyset	\emptyset
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1, q_2\}$	\emptyset	$\{q_2\}$
$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

Παράδειγμα μετατροπής ΜΠΑ σε ΝΠΑ – Βήμα 3

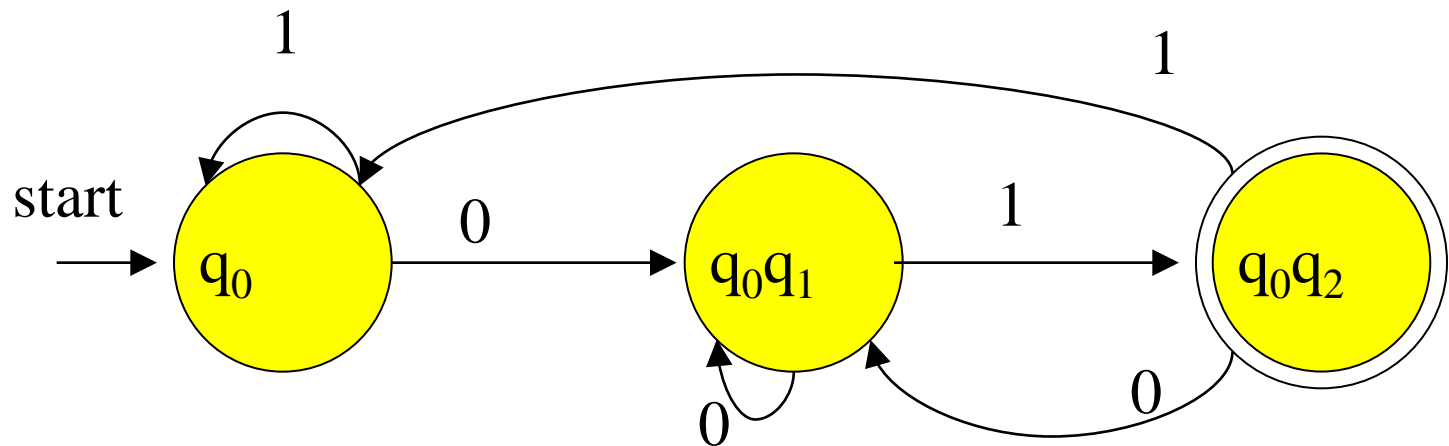


Παράδειγμα μετατροπής ΜΠΑ σε ΝΠΑ – Βήμα 3

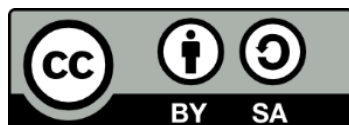


Παράδειγμα μετατροπής ΜΠΑ σε ΝΠΑ – Βήμα 3

- ...όπως στη διαφάνεια 46.



Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

