ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

ΠΑΠΑΡΡΙΖΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ, ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΣΑΜΑΡΑΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ, ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ
ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2009

Παράδειγμα 1. Η ΄΄Solution A.E΄΄ είναι μία εταιρία παραγωγής καλλυντικών. Το τμήμα Μάρκετινγκ της επιχείρησης μετά από σχετική έρευνα, αποφάσισε να εισάγει στην αγορά τρία νέα είδη καλλυντικών (Προϊόν 1, Προϊόν 2, Προϊόν 3) και πιστεύει ότι θα πουλήσει όλες τις ποσότητες που θα παράγει σε τιμή πώλησης ανά μονάδα προϊόντος, 19 χ.μ. (χρηματικές μονάδες) για το Προϊόν 1, 95 χ.μ. για το Προϊόν 2 και 160 χ.μ. για το Προϊόν 3.

Για την παραγωγή μιας μονάδας του Προϊόντος 1 απαιτούνται δύο ώρες εργασίας. Για την παραγωγή μιας μονάδας του Προϊόντος 2 απαιτείται μία ώρα εργασίας και δύο μονάδες από το Προϊόν 1. Για την παραγωγή μιας μονάδας του Προϊόντος 3 απαιτούνται, τρεις ώρες εργασίας και τέσσερις μονάδες από το Προϊόν 2. Είναι αυτονόητο ότι οι μονάδες του Προϊόντος 1 οι οποίες χρησιμοποιούνται για την παραγωγή του Προϊόντος 2 δεν μπορούν να πουληθούν. Επίσης οι μονάδες του Προϊόντος 2, οι οποίες χρησιμοποιούνται για την παραγωγή του Προϊόντος 3, δεν μπορούν να πουληθούν. Προσδιορίστηκε ότι ο συνολικός διαθέσιμος χρόνος παραγωγής ισούται με 95 εργατοώρες.

Η Διοίκηση της Επιχείρησης έχει θέσει τους εξής περιορισμούς. Η μέγιστη ποσότητα του προϊόντος 1, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή των άλλων Προϊόντων (δηλαδή σαν πρώτη ύλη), είναι 50 μονάδες. Για το Προϊόν 2 είναι 36 μονάδες.

Στόχος της εταιρίας είναι να προσδιορίσει τις ποσότητες που πρέπει να παράγει από κάθε προϊόν ώστε να μεγιστοποιήσει τα συνολικά έσοδά της.

Λύση. Για την επίτευξη του στόχου της Επιχείρησης πρέπει να προσδιορίσουμε τις ποσότητες που πρέπει να παραχθούν από κάθε προϊόν λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς που επιβάλλονται από τα δεδομένα του προβλήματος. Μερικά από τα δεδομένα αυτά συνοψίζονται στον παρακάτω Πίνακα 1.3.4. Για να μοντελοποιήσουμε τις λειτουργίες της ΄΄Solution΄΄ χρειαζόμαστε τα ακόλουθα στοιχεία

- Τον αριθμό των παραγόμενων μονάδων από κάθε ένα προϊόν
- Τον αριθμό των μονάδων από κάθε προϊόν που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή των άλλων προϊόντων
- Τον αριθμό των μονάδων που απομένουν για πώληση από κάθε προϊόν
- Το σύνολο των ωρών εργασίας που χρησιμοποιούνται και
- Τα συνολικά έσοδα

	Προϊόν 1	Προϊόν 2	Προϊόν 3
Ώρες Εργασίας (εργατοώρες)	2	1	3
Τιμή Πώλησης / μονάδα (χ.μ)	19	95	160
Ελάχιστες ποσότητες για παραγωγή άλλων Προϊόντων	50	36	0
Συνολικός Διαθέσιμος Χρόνος	95 εργατοώρες		

Πίνακας 1.3.4. Συνοπτική παρουσίαση δεδομένων

Έστω x_i, $i = 1, 2, 3$, η ποσότητα του προϊόντος i που παράγεται και K_i, $i = 1, 2, 3$, οι μονάδες του προϊόντος i, που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή άλλων προϊόντων και οι οποίες βάσει των δεδομένων του προβλήματος δεν μπορούν να πουληθούν. Επομένως οι μονάδες P_i του προϊόντος i που μπορούν να πουληθούν είναι

$$P_i = x_i - K_i, \qquad i = 1, 2, 3$$

Εάν πολλαπλασιάσουμε τις νέες ποσότητες P_i με την τιμή πώλησης ανά μονάδα θα προκύψουν τα συνολικά έσοδα των πωλήσεων. Επομένως η αντικειμενική συνάρτηση που πρέπει να μεγιστοποιηθεί είναι

$$\begin{aligned} z &= 19P_1 + 95P_2 + 160P_3 \\ &= 19(x_1 - K_1) + 95(x_2 - K_2) + 160(x_3 - K_3) \\ &= 19x_1 - 19K_1 + 95x_2 - 95K_2 + 160x_3 - 160K_3 \end{aligned}$$

Για να παραχθεί μία μονάδα του Προϊόντος 2 χρειάζονται δύο μονάδες από το Προϊόν 1. Επομένως έχουμε

$$K_1 = 2x_2$$

Σκεπτόμενοι παρόμοια βρίσκουμε ότι $K_2 = 4x_3$ και $K_3 = 0$. Επομένως η αντικειμενική συνάρτηση γράφεται

$$\begin{aligned} z &= 19x_1 - 19(2x_2) + 95x_2 - 95(4x_3) + 160x_3 \\ &= 19x_1 + 57x_2 + 65x_3 \end{aligned}$$

Οι μεταβλητές απόφασης πρέπει να ικανοποιούν τους παρακάτω τεχνολογικούς περιορισμούς

1. Σχετικά με τον διαθέσιμο χρόνο. Οι εργατοώρες που απαιτούνται για το σύνολο των παραγόμενων μονάδων και των τριών προϊόντων δεν θα πρέπει να ξεπερνούν τον διαθέσιμο χρόνο, ο οποίος ισούται με 95 εργατοώρες. Άρα ισχύει η ανισότητα

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 95 \qquad \text{(Περιορισμός 1)}$$

2. Οι ποσότητες του Προϊόντος 1 που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή του Προϊόντος 2 δεν θα πρέπει να ξεπερνούν το όριο των 50 μονάδων. Άρα

$$2x_2 \leq 50 \qquad \text{(Περιορισμός 2)}$$

3. Οι ποσότητες Προϊόντος 2 που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή του Προϊόντος 3 δεν θα πρέπει να ξεπερνούν το όριο των 36 μονάδων. Άρα

$$4x_3 \leq 36 \qquad \text{(Περιορισμός 3)}$$

4. Όλες οι μεταβλητές απόφασης ικανοποιούν τους φυσικούς περιορισμούς. Από τις ανισότητες $P_i \geq 0$ παίρνουμε

$$P_i = x_i - K_{i,} \geq 0, \qquad i = 1, 2, 3$$

Επειδή είναι $K_1 = 2x_{2,}$ $K_2 = 4x_3$ και $K_3 = 0$, έχουμε

$$\begin{array}{lllllll} P_1 & = & x_1 & - & 2x_2 & \geq & 0 \qquad \text{(Περιορισμός 4)} \\ P_2 & = & x_2 & - & 4x_3 & \geq & 0 \qquad \text{(Περιορισμός 5)} \\ P_3 & = & x_3 & \geq & 0 & & \end{array}$$

Επομένως το τελικό μοντέλο του γραμμικού προβλήματος είναι

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \max & 19x_1 & + & 57x_2 & - & 65x_3 & & \\ \text{μ.π.} & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 95 \\ & & & 2x_2 & & & \leq & 50 \\ & & & & & 4x_3 & \leq & 36 \\ & x_1 & - & 2x_2 & & & \geq & 0 \\ & & & x_2 & - & 4x_3 & \geq & 0 \\ & \multicolumn{7}{l}{x_j \geq 0, (j = 1, 2, 3)} \end{array}$$

♣

Στα παραδείγματα που ακολουθούν παρουσιάζονται ακόμα μερικές αντιπροσωπευτικές εφαρμογές του Γραμμικού Προγραμματισμού.

Παράδειγμα 2. *Πρόβλημα ενέργειας και προστασίας περιβάλλοντος.* Το μικρό κράτος *Μικρούλι,* φτωχό σε πηγές ενέργειας, σχεδιάζει ένα πρόγραμμα ενέργειας για τον επόμενο χρόνο. Το υπουργείο ενέργειας, που είναι υπεύθυνο για το πρόγραμμα, συγκέντρωσε στοιχεία, από τα οποία υπολόγισε τα δεδομένα του Πίνακα 1.3.5 σχετικά με τις δυνατότητες παραγωγής και το κόστος για κάθε πρώτη ύλη. Το κάρβουνο, το φυσικό αέριο και το πετρέλαιο δεν χρησιμοποιούνται εξ ολοκλήρου για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας, αλλά το υπουργείο για περισσότερη ευκολία μετέτρεψε τις ποσότητες αυτές σε ισοδύναμη ηλεκτρική δύναμη.

Πηγές ενέργειας	Δυνατότητα παραγωγής (MWH)	Κόστος μονάδας
Κάρβουνο	55000	5.0
Φυσικό αέριο	25000	6.0
Πυρηνική ενέργεια	35000	8.5
Υδροηλεκτρική ενέργεια	34000	4.5
Πετρέλαιο	45000	6.5

Πίνακας 1.3.5. Δεδομένα δυνατότητας παραγωγής και κόστους

Η χώρα χρειάζεται 98000 MWH ενέργειας για δική της χρήση αλλά επιθυμεί να παράγει και 26000 MWH για εξαγωγή. Το κοινοβούλιο όμως για οικονομία των πηγών ενέργειας και για προστασία του περιβάλλοντος πέρασε στη νομοθεσία τους παρακάτω περιορισμούς

1) Η ηλεκτρική ενέργεια που παράγεται από την πυρηνική δεν πρέπει να ξεπερνά το 25% της συνολικής ενέργειας που παράγει η χώρα.
2) Τουλάχιστον 85% της καρβουνοενέργειας πρέπει να παραχθεί.
3) Τα αέρια και όλα τα απόβλητα δεν πρέπει να ξεπερνούν τα όρια που αναφέρονται στον Πίνακα 1.3.6.
4) Η ενέργεια από φυσικό αέριο πρέπει να είναι τουλάχιστον τα 55% της ενέργειας που παράγεται από πετρέλαιο.

Ατμοσφαιρικά απόβλητα	Όρια (σε grams)
Διοξείδιο του θείου	63000
Μονοξείδιο του άνθρακα	58000
Σκόνη	32000
Στερεά σωματίδια	28000

Πίνακας 1.3.6. Όρια μόλυνσης

Η ΕΠΠ (Εταιρεία Προστασίας Περιβάλλοντος) για τις ποσότητες των ατμοσφαιρικών αποβλήτων κάθε πηγής ενέργειας δίνει τα στοιχεία που περιέχονται συγκεντρωμένα στον Πίνακα 1.3.7

Πηγή ενέργειας	Διοξείδιο του θείου	Μονοξείδιο του άνθρακα	Σκόνη	Στερεά σωματίδια
Κάρβουνο	1,3	1,3	0,8	0,5
Φυσ. Αέριο	0,3	0,6	-	-
Πυρ. Ενέργεια	0,4	0,4	0,5	0,6
Υδρ. Ενέργεια	-	-	-	-
Πετρέλαιο	0,5	0,9	0,6	0,2

Πίνακας 1.3.7. Ατμοσφαιρικά απόβλητα των πηγών ενέργειας σε grams/MWH

Σχηματίστε το γραμμικό πρόβλημα που θα δώσει στο υπουργείο ενέργειας το πρόγραμμα παραγωγής ενέργειας που ελαχιστοποιεί το κόστος ενώ ταυτόχρονα ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς.

Λύση. Συμβολίζουμε με x_j (j = 1, 2, 3, 4, 5) τον αριθμό MWH ενέργειας που παράγονται από κάρβουνο, φυσικό αέριο, πυρηνική ενέργεια, υδροηλεκτρική ενέργεια και πετρέλαιο αντίστοιχα.

Ζητείται η ελαχιστοποίηση του κόστους. Οι συντελεστές κόστους δίνονται στον Πίνακα 1.3.5 (τελευταία στήλη). Επομένως, η αντικειμενική συνάρτηση είναι

$$5.0x_1 + 6.0x_2 + 8.5x_3 + 4.5x_4 + 6.5x_5$$

Η χώρα χρειάζεται 98000 MWH για δικές της ανάγκες και 26000 για εξαγωγή, δηλαδή, συνολικά 124000 MWH. Επομένως, ο περιορισμός ικανοποίησης της ζήτησης είναι

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 124000$$

Η ποσότητα ενέργειας x_3, που παράγεται από πυρηνικές πηγές, δεν πρέπει να ξεπερνά το 25% της ολικής ενέργειας. Άρα πρέπει να ισχύει η ανισότητα

$$x_3 \leq 0.25\ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

που ισοδύναμα γράφεται

$$x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 0$$

Η ενέργεια από κάρβουνο πρέπει να είναι τουλάχιστον τα 85% της ολικής ενέργειας που μπορεί να παραχθεί από κάρβουνο, δηλαδή είναι

$$x_1 \geq (0.85)(55000) = 46750$$

Οι περιορισμοί της ΕΠΠ πρέπει να ικανοποιηθούν. Η συνολική ποσότητα διοξειδίου του θείου προκύπτει από τον Πίνακα 1.3.7 ότι είναι

$$1.3x_1 + 0.3x_2 + 0.4x_3 + 0.5x_5$$

και δεν πρέπει να υπερβαίνει τα 63000 mgr, δες Πίνακα 1.3.6. Άρα είναι

$$1.3x_1 + 0.3x_2 + 0.4x_3 + 0.5x_5 \leq 63000$$

Παρόμοια, για το μονοξείδιο του θείου, τη σκόνη και τα στερεά σωματίδια έχουμε τους περιορισμούς

$$\begin{array}{lllllllll}
1.3x_1 & + & 0.6x_2 & + & 0.4x_3 & + & 0.9x_5 & \leq & 58000 \\
0.8x_1 & & & + & 0.5x_3 & + & 0.6x_5 & \leq & 32000 \\
0.5x_1 & & & + & 0.6x_3 & + & 0.2x_5 & \leq & 28000
\end{array}$$

Η ενέργεια από φυσικό αέριο είναι τουλάχιστον τα 55% της ενέργειας από πετρέλαιο δηλαδή είναι $x_2 \geq 0.55\ x_5$ ή ισοδύναμα

$$x_2 - 0.55x_5 \geq 0$$

Τελευταία έχουμε τους περιορισμούς ορίων της παραγωγής. Οι μεταβλητές είναι μη αρνητικές ποσότητες και δεν υπερβαίνουν τα αντίστοιχα όρια μέγιστης παραγωγής που δίνονται στον Πίνακα 1.3.5. Άρα, ισχύουν οι ανισότητες

$$0 \le x_1 \le 55000,\ \ 0 \le x_2 \le 25000,\ \ 0 \le x_3 \le 35000,\ \ 0 \le x_4 \le 34000,\ \ 0 \le x_5 \le 45000$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω προκύπτει ότι το γραμμικό πρόβλημα είναι

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\min & 5.0x_1 & + & 6x_2 & + & 8.5x_3 & + & 4.5x_4 & + & 6.5x_5 & & \\
\mu.\pi. & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \ge & 124000 \\
 & x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \ge & 0 \\
 & 1.3x_1 & + & 0.3x_2 & + & 0.4x_3 & + & & & 0.5x_5 & \le & 63000 \\
 & 1.3x_1 & + & 0.6x_2 & + & 0.4x_3 & + & & & 0.9x_5 & \le & 58000 \\
 & 0.8x_1 & + & & & 0.5x_3 & + & & & 0.6x_5 & \le & 32000 \\
 & 0.5x_1 & + & & & 0.6x_3 & + & & & 0.2x_5 & \le & 28000 \\
 & & & x_2 & - & & & & & 0.55x_5 & \ge & 0
\end{array}$$

$$46750 \le x_1 \le 55000,\ \ 0 \le x_2 \le 25000,\ \ 0 \le x_3 \le 35000,\ \ 0 \le x_4 \le 34000,\ \ 0 \le x_5 \le 45000$$

Επομένως, το κράτος Μικρούλι πρέπει να λύσει ένα αρκετά μεγάλο γραμμικό πρόβλημα. ♣

Στα παραδείγματα που ακολουθούν παρουσιάζονται ακόμα μερικές αντιπροσωπευτικές εφαρμογές του Γραμμικού Προγραμματισμού.

Παράδειγμα 3. *Πρόβλημα διοίκησης προσωπικού* Μια εταιρεία διανομής γαλακτοκομικών προϊόντων χρειάζεται διαφορετικό αριθμό υπαλλήλων που θα απασχολούνται με πλήρες ωράριο για κάθε μέρα της εβδομάδας. Ο αριθμός των υπαλλήλων για κάθε μέρα δίνεται στον Πίνακα 1.3.8.

Ημέρα	Αριθμός υπαλλήλων με πλήρες ωράριο
1 = ΔΕΥΤΕΡΑ	20
2 = ΤΡΙΤΗ	22
3 = ΤΕΤΑΡΤΗ	17
4 = ΠΕΜΠΤΗ	19
5 = ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ	25
6 = ΣΑΒΒΑΤΟ	18
7 = ΚΥΡΙΑΚΗ	13

Πίνακας 1.3.8. Αριθμός υπαλλήλων για κάθε μέρα της εβδομάδας

Η σύμβαση εργασίας των υπαλλήλων προβλέπει ότι κάθε υπάλληλος που εργάζεται με πλήρες ωράριο για 5 συνεχείς ημέρες πρέπει να έχει 2 ημέρες αργία. Π.χ. αν κάποιος εργάζεται από Δευτέρα μέχρι και Παρασκευή έχει αργία το Σαββατοκύριακο. Η εταιρεία επιθυμεί να καλύπτει τις ανάγκες της σε προσωπικό χρησιμοποιώντας υπαλλήλους που θα εργάζονται μόνον με πλήρες ωράριο. Να διαμορφωθεί ένα μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού που θα βοηθήσει την εταιρεία να ελαχιστοποιήσει τον αριθμό των υπαλλήλων που απαιτούνται.

Λύση. Το κλειδί στην επιτυχία βρίσκεται στη σωστή επιλογή των μεταβλητών απόφασης. Είναι αρκετό για την εταιρεία να γνωρίζει όχι πόσοι υπάλληλοι εργάζονται κάθε ημέρα αλλά πόσοι ξεκινούν να εργάζονται κάθε ημέρα της εβδομάδας (ύστερα από τις αργίες τους). Ορίζουμε

x_i = αριθμός υπαλλήλων που ξεκινούν εργασία την ημέρα i.

Η αντιστοιχία των τιμών του δείκτη i και των ημερών της εβδομάδας δίνονται στον Πίνακα 1.3.8, π.χ., x_1 είναι ο αριθμός των υπαλλήλων που ξεκινούν να εργάζονται την Δευτέρα.

Για κάθε μέρα ισχύει ένας περιορισμός. Ας εξετάσουμε τον περιορισμό της Δευτέρας. Τη Δευτέρα θα εργάζονται όλοι οι υπάλληλοι εκτός από αυτούς που ξεκίνησαν εργασία την Τρίτη και την Τετάρτη, δηλαδή θα εργάζονται

$$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

υπάλληλοι. Επειδή τη Δευτέρα η εταιρεία χρειάζεται 20 υπαλλήλους ισχύει ο περιορισμός

$$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 20$$

Η αντικειμενική συνάρτηση είναι το άθροισμα των μεταβλητών x_i, $i = 1, 2, \ldots, 7$. Οι μεταβλητές απόφασης συμβολίζουν ανθρώπους. Επομένως είναι αδιανόητο να μη παίρνουν ακέραιες τιμές. Από τα παραπάνω, προκύπτει ότι το προς επίλυση πρόβλημα είναι

$$\begin{array}{llcccccccccccccc}
\min z & = & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & & \\
\mu.\pi. & & x_1 & & & & & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & \geq & 20 \\
 & & x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & \geq & 22 \\
 & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & + & x_6 & + & x_7 & \geq & 17 \\
 & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & & & + & x_7 & \geq & 19 \\
 & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & & & & & \geq & 25 \\
 & & & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & & & \geq & 18 \\
 & & & & & & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & \geq & 13 \\
\end{array}$$

$$x_j \geq 0 \text{ και ακέραιες } (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$$

Πρόκειται, δηλαδή, για ένα καθαρό ακέραιο γραμμικό πρόβλημα. ♣

Παράδειγμα 4. *Πρόβλημα μάρκετινγκ* Μία επιχείρηση πρόκειται να εισάγει ένα νέο προϊόν στην αγορά. Για τη διαφήμιση του προϊόντος επιλέγει να χρησιμοποιήσει ως διαφημιστικά μέσα τηλεόραση, ραδιόφωνο, εφημερίδες, περιοδικά και τέλος προβολή στα web sites του internet. Το κόστος διαφήμισης ανά παρουσίαση στα πέντε αυτά διαφημιστικά μέσα και οι δείκτες ακροαματικότητας παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.3.9. Ο δείκτης ακροαματικότητας είναι ο μέσος όρος των ατόμων που βλέπουν τη διαφήμιση.

	Τηλ.	Ραδ.	Εφημ.	Περιοδ.	Internet
Κόστος	200.000	20.000	110.000	130.000	10.000
Δείκτες Ακροαματικότητας	120	25	60	82	40

Πίνακας 1.3.9. Κόστος διαφημίσεων και δείκτες ακροαματικότητας

Η διοίκηση της επιχείρησης δεν μπορεί να διαθέσει για τη διαφήμιση πάνω από 8000000 δρχ. Ακολουθείται η εξής πολιτική. Ο αριθμός των διαφημίσεων που γίνονται στα έντυπα μέσα δεν πρέπει να υπερβαίνει το 30% αυτών που γίνονται στην τηλεόραση και το ραδιόφωνο. Έχει παρατηρηθεί ότι για να αποδώσει μία διαφήμιση απαιτούνται τουλάχιστον 15 επαναλήψεις στο ραδιόφωνο και 10 επαναλήψεις στην τηλεόραση. Επίσης οι διαφημίσεις στο Internet επειδή βρίσκονται σε πειραματικό στάδιο δεν πρέπει να ξεπερνούν τις 15.

Να προσδιοριστεί ο αριθμός των διαφημίσεων στα πέντε αυτά διαφημιστικά μέσα έτσι ώστε να μεγιστοποιείται η συνολική ακροαματικότητα.

Λύση. Οι μεταβλητές απόφασης του προβλήματος ορίζονται ως εξής

x_1 = αριθμός διαφημίσεων στην τηλεόραση
x_2 = αριθμός διαφημίσεων στο ραδιόφωνο
x_3 = αριθμός διαφημίσεων στις εφημερίδες
x_4 = αριθμός διαφημίσεων στα περιοδικά
x_5 = αριθμός διαφημίσεων στο Internet.

Σκοπός της επιχείρησης είναι η μεγιστοποίηση του μέσου όρου των ακροατών και θεατών που θα δουν όλες μαζί τις διαφημίσεις. Από τα στοιχεία του Πίνακα 1.3.9 προκύπτει ότι η αντικειμενική συνάρτηση που πρόκειται να μεγιστοποιηθεί είναι

$$120x_1 + 25x_2 + 60x_3 + 82x_4 + 40x_5$$

Εκτός από τους περιορισμούς μη αρνητικότητας υπάρχει ο περιορισμός των χρημάτων, ο οποίος προκύπτει εύκολα από τον Πίνακα 1.3.9 ότι είναι

$$200000x_1 + 20000x_2 + 110000x_3 + 130000x_4 + 120000x_5 \leq 8000000$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη του περιορισμού με 10000 προκύπτει ο ισοδύναμος και πιο απλός περιορισμός

$$20x_1 + 2x_2 + 11x_3 + 13x_4 + 12x_5 \leq 800$$

Ο αριθμός των διαφημίσεων στον τύπο δεν ξεπερνά το 30% των διαφημίσεων της τηλεόρασης και του ραδιοφώνου. Άρα, πρέπει να ισχύει η ανισότητα

$$x_3 + x_4 \leq 0.3(x_1 + x_2)$$

Ο περιορισμός αυτός μετά από μερικές πράξεις παίρνει τη μορφή

$$-0.3x_1 - 0.3x_2 + x_3 + x_4 \leq 0$$

Τέλος, υπάρχουν και οι περιορισμοί των ελάχιστων αριθμών διαφημίσεων στο ραδιόφωνο, την τηλεόραση και το internet, οι οποίοι αναλυτικά γράφονται ως εξής

$$x_1 \geq 10, \qquad x_2 \geq 15, \qquad x_5 \leq 15.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το πρόβλημα που πρέπει να επιλυθεί έχει την μορφή

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\max & 120x_1 & + & 25x_2 & + & 60x_3 & + & 82x_4 & + & 40x_5 & & \\
\text{μ.π.} & 20x_1 & + & 2x_2 & + & 11x_3 & + & 13x_4 & + & 12x_5 & \leq & 800 \\
 & -0.3x_1 & - & 0.3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & \leq & 0 \\
 & x_1 & & & & & & & & & \geq & 10 \\
 & & & x_2 & & & & & & & \geq & 15 \\
 & & & & & & & & & x_5 & \leq & 15 \\
\end{array}$$

$$x_j \geq 0, \ (j = 1, 2, 3, 4, 5)$$

Προσέξτε ότι οι περιορισμοί $x_1 \geq 0$ και $x_2 \geq 0$ είναι περιττοί. ♣