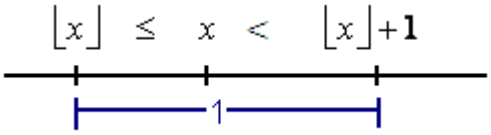
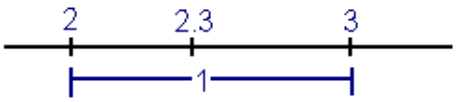
Ακέραιο Μέρος:

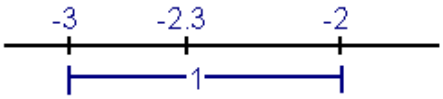


$\lfloor x \rfloor$ = (κάτω) ακέραιο μέρος του πραγματικού αριθμού x := ο μεγαλύτερος μοναδικός ακέραιος που δεν υπερβαίνει τον αριθμό x.

Παράδειγμα:



$\lfloor 2.3 \rfloor = 2$



$\lfloor -2.3 \rfloor = -3$

Παρατηρήσεις:

- Αν $x \in \mathbb{R}^*$, $\lfloor x \rfloor \neq \lfloor -x \rfloor$
- $\lfloor x \rfloor = n$, αν και μόνον αν $n \le x < n+1, n \in \mathbb{Z}$
- $x = \lfloor x \rfloor + \varepsilon = n + \varepsilon$, $0 \le \varepsilon < 1$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$

($\Longrightarrow$ δύο αποδεικτικές μέθοδοι)

Παράδειγμα 1: *Να δειχθεί ότι* $\lfloor n \rfloor = \left\lfloor n + \frac{1}{2} \right\rfloor$, $n \in \mathbb{Z}$.

Λύση:

Έχουμε:

✓ $\lfloor n \rfloor = n$, γιατί $n \in \mathbb{Z}$ (1)

✓ $n \le n + \frac{1}{2} < n+1$ (προφανές) $\Rightarrow \left\lfloor n + \frac{1}{2} \right\rfloor = n$ (2)

Από τις (1) και (2) $\Rightarrow \lfloor n \rfloor = \left\lfloor n + \frac{1}{2} \right\rfloor$.

Παράδειγμα 2: *Αν* $x \in \mathbb{R}$ *και* $m \in \mathbb{Z}$, *να δειχθεί ότι* $\lfloor x+m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$.

Παρατήρηση:

Γενικά αν $x, y \in \mathbb{R}$ *τότε* $\lfloor x+y \rfloor \neq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.

Το παράδειγμα 2 μας λέει πότε μπορούμε να έχουμε το =.

Λύση:

Έστω $\lfloor x \rfloor = n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Έτσι, $n \le x < n+1 \Rightarrow (n+m) \le x+m < (n+m)+1$

$\Rightarrow \lfloor x+m \rfloor = n+m$ (1)

και $\lfloor x \rfloor + m = n+m$ (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\lfloor x+m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$.

Παράδειγμα 3: *Αν* $x \in \mathbb{R}$ *, τότε να δειχθεί ότι* $2\lfloor x \rfloor \le \lfloor 2x \rfloor \le 2\lfloor x \rfloor + 1$.

Λύση:

Είναι, $x = \lfloor x \rfloor + \varepsilon$, $0 \le \varepsilon < 1 \Rightarrow$

$2x = 2\lfloor x \rfloor + 2\varepsilon$

- Αν $0 \le \varepsilon < \frac{1}{2}$, τότε $0 \le 2\varepsilon < 1$ οπότε $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor < 2\lfloor x \rfloor + 1$
- Αν $\frac{1}{2} \le \varepsilon < 1$, τότε $1 \le 2\varepsilon < 2$ οπότε $2\lfloor x \rfloor < \lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1$.