Ασκήσεις (1)

Άσκηση 1

Να κατασκευάσετε τον πίνακα αληθείας του λογικού τύπου

$$(p \wedge q) \vee \neg(p \rightarrow q)$$

Λύση

Ο πίνακας αληθείας θα έχει τέσσερις γραμμές γιατί υπάρχουν 2^2 περιπτώσεις να συνδυαστούν οι τιμές αληθείας των μεταβλητών p, q.

στήλη	1	2	3	4	5	6
	p	q	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$(p \wedge q) \vee \neg(p \rightarrow q)$
	1	1	1	1	0	1
	1	0	0	0	1	1
	0	1	0	1	0	0
	0	0	0	1	0	0

Οι τιμές στις στήλες 3 και 4 προσδιορίζονται από τις τιμές στις στήλες 1 και 2. Οι τιμές στη στήλη 5 προσδιορίζονται από τις τιμές στη στήλη 4. Οι τιμές στη στήλη 6 προσδιορίζονται από τις τιμές στις στήλες 3 και 5. Η έκτη στήλη περιέχει τις τιμές αληθείας της σύνθετης πρότασης με τύπο $(p \wedge q) \vee \neg(p \rightarrow q)$.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έναν απλοποιημένο πίνακα αληθείας, με την ίδια διαδικασία σκέψης, γράφοντας τις τιμές κάτω από τα σύμβολα των πράξεων, ως εξής:

	p	q	$(p \wedge q)$	$\vee$	$\neg$	$(p \rightarrow q)$
	1	1	1	1	0	1
	1	0	0	1	1	0
	0	1	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	1
βήμα	1	1	2	4	3	2

Οι τιμές σε κάθε βήμα προσδιορίζονται από τις τιμές σε προηγούμενα βήματα. Παραδείγματος χάριν, οι τιμές στο τρίτο βήμα προσδιορίστηκαν από τις τιμές που περιέχει η τελευταία στήλη. Οι τιμές στο τέταρτο βήμα προσδιορίστηκαν από τις τιμές που περιέχονται στην τρίτη και πέμπτη στήλη. Η στήλη που δημιουργήθηκε στο τελευταίο βήμα μας δίνει τις τιμές αληθείας του λογικού τύπου. ■

Άσκηση 2

Έστω ο λογικός τύπος

$$(p \rightarrow q) \wedge [(q \wedge \sim r) \rightarrow (p \vee r)]$$

Να γίνει ο πίνακας αληθείας του.

Λύση

Ο πίνακας αληθείας θα έχει οκτώ γραμμές, γιατί υπάρχουν 2^3 περιπτώσεις να συνδυαστούν οι τιμές αληθείας των (τριών) μεταβλητών p, q και r:

	p	q	r	$(p \to q)$	$\wedge$	$[(q \wedge \neg r)$		$\to$	$(p \vee r)]$
	1	1	1	1	1	0	0	1	1
	1	1	0	1	1	1	1	1	1
	1	0	1	0	0	0	0	1	1
	1	0	0	0	0	0	1	1	1
	0	1	1	1	1	0	0	1	1
	0	1	0	1	0	1	1	0	0
	0	0	1	1	1	0	0	1	1
	0	0	0	1	1	0	1	1	0
βήμα	1	1	1	2	5	3	2	4	2

■

Άσκηση 3

Να κατασκευάσετε τον πίνακα αληθείας του λογικού τύπου

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (r \leftrightarrow s)$$

Λύση

Σχηματίζουμε τον πίνακα αληθείας, κατά τα γνωστά:

p	q	r	s	$p \leftrightarrow q$	$r \leftrightarrow s$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (r \leftrightarrow s)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1

■

Άσκηση 4

Εξετάστε αν ο λ.τ.

$$((\neg p \wedge q) \wedge (q \wedge r)) \wedge \neg q$$

είναι ταυτολογία ή αντίφαση.

Λύση

Κατασκευάζουμε τον πίνακα αληθείας του λ.τ.:

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge q$	$q \wedge r$	$((\neg p \wedge q) \wedge (q \wedge r))$	$((\neg p \wedge q) \wedge (q \wedge r)) \wedge \neg q$
1	1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0

Αφού όλες οι τιμές αληθείας του λ.τ. είναι *ψευδής* (0), πρόκειται για μια αντίφαση. ■

Άσκηση 5

Χρησιμοποιώντας πίνακα αληθείας εξετάστε ποιοι από τους παρακάτω λ.τ. είναι ταυτολογίες:

(α) $\neg(p \wedge (\neg p))$

(β) $p \rightarrow (\neg p)$

(γ) $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

Λύση

Οι πίνακες αληθείας δίνονται στους παρακάτω πίνακες:

Πίνακας 1

p	$\neg p$	$p \wedge (\neg p)$	$\neg(p \wedge (\neg p))$	$p \rightarrow \neg p$
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1

Πίνακας 2

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Επομένως, οι (α) και (γ) είναι ταυτολογίες. ■

Άσκηση 6

Να εξετάσετε αν οι λογικοί τύποι

$$(((\neg p) \vee q) \wedge (p \vee (\neg r)) \wedge ((\neg p) \vee (\neg q)) \quad \text{και} \quad \neg(p \vee r)$$

είναι ισοδύναμοι.

Λύση

Σχηματίζουμε τον πίνακα αληθείας και για τους δύο λ.τ.

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$\neg p \vee q$	$p \vee \neg r$	$(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg r)$	$\neg p \vee \neg q$	$(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q)$	$\neg(p \vee r)$
1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Διαπιστώνοντας ότι οι δύο τελευταίες στήλες είναι ίδιες, συμπεραίνουμε την ισοδυναμία των δεδομένων λ.τ. ■

Άσκηση 7

Δείξτε ότι ο λ.τ. $(p \to q) \to r$, είναι λογικά ισοδύναμος με τον λ.τ. $((\neg p) \to r) \wedge (q \to r)$.

Λύση

Κατασκευάζουμε τον πίνακα με τις τιμές αληθείας των μεταβλητών και των λ.τ.

p	q	r	$p \to q$	$(\neg p) \to r$	$q \to r$	$(p \to q) \to r$	$((\neg p) \to r) \wedge (q \to r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0

Αφού οι δύο τελευταίες στήλες ταυτίζονται, ο λ.τ. $(p \to q) \to r$ είναι λογικά ισοδύναμος με τον λ.τ. $((\neg p) \to r) \wedge (q \to r)$. ■

Άσκηση 8

Δείξτε ότι οι λογικοί τύποι

$$((p \wedge (\neg q)) \vee (p \wedge q)) \wedge q \quad \text{και} \quad p \wedge q$$

είναι ισοδύναμοι.

Λύση

Είναι

$((p \wedge (\neg q)) \vee (p \wedge q)) \wedge q$	$\Leftrightarrow$	{από επιμεριστικό νόμο}
$(p \wedge ((\neg q) \vee q)) \wedge q$	$\Leftrightarrow$	{από αντιμεταθετικό νόμο}
$(p \wedge (q \vee (\neg q))) \wedge q$	$\Leftrightarrow$	{από νόμο άρνησης}
$(p \wedge t) \wedge q$	$\Leftrightarrow$	{από νόμο άρνησης}
$p \wedge q$		{από νόμο ταυτότητας}. ■

Άσκηση 9

Δείξτε, χωρίς τη χρήση πινάκων αληθείας, τη λογική ισοδυναμία

$$[(p \vee q) \vee (p \vee s)] \Leftrightarrow (p \vee q) \vee s$$

Λύση

Έχουμε διαδοχικά

$(p \vee q) \vee (p \vee s) \Leftrightarrow [(p \vee q) \vee p] \vee s$	{από προσεταιριστικό νόμο}
$\Leftrightarrow [p \vee (q \vee p)] \vee s$	{από προσεταιριστικό νόμο}
$\Leftrightarrow [p \vee (p \vee q)] \vee s$	{από αντιμεταθετικό νόμο}
$\Leftrightarrow [(p \vee p) \vee q)] \vee s$	{από προσεταιριστικό νόμο}
$\Leftrightarrow (p \vee q) \vee s$	{από νόμο ουδετερότητας} ■

Άσκηση 10

Δείξτε ότι οι λογικοί τύποι

$$p \leftrightarrow q \quad \text{και} \quad (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

είναι λογικά ισοδύναμοι.

Λύση

Έχουμε διαδοχικά (η αιτιολόγηση αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη)

$$\begin{aligned}
p \leftrightarrow q &\Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \\
&\Leftrightarrow [(\neg p \vee q) \wedge \neg q] \vee [(\neg p \vee q) \wedge p] \\
&\Leftrightarrow [(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg q)] \vee [(\neg p \wedge p) \vee (q \wedge p)] \\
&\Leftrightarrow [(\neg p \wedge \neg q) \vee c] \vee [c \vee (q \wedge p)] \\
&\Leftrightarrow [(\neg p \wedge \neg q) \vee c] \vee [(q \wedge p) \vee c]
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q).$$

Μπορούμε να εργαστούμε φυσικά και με πίνακες αληθείας:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge \neg q$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
1	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1

Από την τρίτη και την τελευταία στήλη συμπεραίνουμε ότι οι δεδομένοι λ.τ. είναι λογικά ισοδύναμοι. ■

Άσκηση 11

Δείξτε, χωρίς τη χρήση πινάκων αληθείας, ότι ο λ.τ.

$$(\neg p \vee q) \vee (p \wedge \neg q)$$

είναι ταυτολογία.

Λύση

Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
(\neg p \vee q) \vee (p \wedge \neg q) &\Leftrightarrow \neg p \vee [q \vee (p \wedge \neg q)] && \{\text{από προσεταιριστικό νόμο}\}\\
&\Leftrightarrow \neg p \vee [(q \vee p) \wedge (q \vee \neg q)] && \{\text{από επιμεριστικό νόμο}\}\\
&\Leftrightarrow \neg p \vee [(q \vee p) \wedge t] && \{\text{από νόμο άρνησης}\}\\
&\Leftrightarrow \neg p \vee (q \vee p) && \{\text{από νόμο ταυτότητας}\}\\
&\Leftrightarrow \neg p \vee (p \vee q) && \{\text{από αντιμεταθετικό νόμο}\}\\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \vee q && \{\text{από προσεταιριστικό νόμο}\}\\
&\Leftrightarrow t \vee q && \{\text{από νόμο άρνησης}\}\\
&\Leftrightarrow t && \{\text{από νόμο καθολικού φράγματος}\}
\end{aligned}$$

■

Άσκηση 12

Δείξτε ότι αν x είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος, ώστε να είναι $x^2 = 2$, τότε ο x δεν είναι ρητός.

Λύση

Έστω ότι ο x είναι ρητός, δηλ. $x = m/n$, όπου m και n ακέραιοι με $n \neq 0$ και τέτοιοι ώστε να μην έχουν κοινούς παράγοντες. Αφού $x^2 = 2$, έχουμε $(m/n)^2 = 2$. Άρα, $m^2 = 2n^2$. Αυτό όμως συνεπάγεται ότι m^2 είναι άρτιος. Επομένως, με βάση γνωστή άσκηση της θεωρίας αριθμών (βλ. προηγούμενη άσκηση) ο m είναι άρτιος. Συνεπώς, $m = 2p$, όπου p ακέραιος. Αντικαθιστώντας στην ισότητα $m^2 = 2n^2$ παίρνουμε $n^2 = 2p^2$. Τότε όμως, ο n είναι επίσης άρτιος. Έτσι έχουμε δείξει

ότι οι m και n έχουν κοινό παράγοντα (το 2) το οποίο αντιφάσκει με την αρχική μας υπόθεση ότι οι m και n δεν έχουν κοινούς παράγοντες. ■

Άσκηση 13

Δείξτε ότι ο ακέραιος n είναι περιττός, αν και μόνο αν ο n^2 είναι περιττός.

Λύση

($\rightarrow$) Έστω ότι ο ακέραιος n είναι περιττός. Τότε $n = 2k + 1$, όπου $k \in \mathbb{Z}$. Επομένως

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2m + 1, \text{ όπου } m \in \mathbb{Z}.$$

Άρα, ο n^2 είναι περιττός.

($\leftarrow$) Έστω τώρα ότι ο n^2 είναι περιττός. Με αντιθετοαντιστροφή, αν ο n είναι άρτιος μπορούμε να γράψουμε $n = 2k$, όπου $k \in \mathbb{Z}$. Τότε

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2m, \text{ όπου } m \in \mathbb{Z}\ .$$

Επομένως, ο n^2 είναι άρτιος. Άρα, αν ο n^2 είναι περιττός, τότε ο n είναι περιττός. ■

Άσκηση 14

i) Δείξτε ότι η πρόταση

$$P \rightarrow (Q \vee R)$$

είναι λογικά ισοδύναμη με την πρόταση

$$P \wedge (\neg Q) \rightarrow R$$

ii) Διατυπώστε τη μέθοδο απόδειξης που απορρέει από την παραπάνω ισοδυναμία.

Λύση

i) Κατασκευάζουμε τον πίνακα αληθείας των δύο προτάσεων:

P	Q	R	$\neg Q$	$Q \vee R$	$P \wedge (\neg Q)$	$P \rightarrow (Q \vee R)$	$P \wedge (\neg Q) \rightarrow R$
1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	0	1	1

Η ισοδυναμία αποδεικνύεται από τις δύο τελευταίες στήλες που είναι ταυτόσημες.

ii) Για να δείξουμε την αλήθεια μιας πρότασης της μορφής ‘‘*αν P τότε Q ή R*’’ (με βάση την παραπάνω ισοδυναμία) *υποθέτουμε ότι μαζί με την P ισχύει η ¬Q και δείχνουμε ότι ισχύει η R.* Μπορούμε να καταλάβουμε την ισχύ της μεθόδου αυτής και με το εξής επιχείρημα: Η πρόταση Q είναι αληθής ή ψευδής. Αν η Q είναι αληθής τότε η $Q \vee R$ είναι αληθής και η $P \to (Q \vee R)$ είναι αληθής ανεξάρτητα από τις τιμές αληθείας των P και R. Επομένως έχουμε να δείξουμε την αλήθεια της συνεπαγωγής μόνον όταν είναι η Q ψευδής. Συνεπώς η μέθοδος απόδειξης συνίσταται στο να υποθέσουμε ότι είναι αληθής η P και η $\neg Q$ και χρησιμοποιώντας αυτές να δείξουμε ότι η R είναι αληθής. ■

Άσκηση 15

Έστω a, b θετικοί ακέραιοι. Δείξτε ότι αν $a^3 + b^3$ είναι περιττός τότε ο a είναι περιττός ή ο b είναι περιττός.

Λύση

Εργαζόμαστε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της Άσκησης 17 (ii). Υποθέτουμε λοιπόν ότι, ο $a^3 + b^3$ είναι περιττός και ότι ο a δεν είναι περιττός, δηλ. ότι ο a είναι άρτιος. Άρα ο a^3 θα είναι άρτιος. Επομένως ο $a^3 + b^3 - a^3 = b^3$ θα είναι περιττός. Αφού τώρα ο b^3 είναι περιττός θα είναι και ο b περιττός διότι αν ήταν άρτιος, τότε $b = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ και ο $b^3 = (2k)^3 = 2(4k^3) = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$, θα ήταν άρτιος, άτοπο. ■

Άσκηση 16

Δείξτε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με επαγωγή στο n:

(α) $1+5+9+\cdots+(4n-3) = n(2n-1)$, για κάθε $n \geq 1$.

(β) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, για κάθε $n \geq 1$.

(γ) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$, για κάθε $n \geq 1$.

(δ) Ο ακέραιος $(n^3 - n)$ διαιρείται με το 3, για κάθε $n \geq 1$.

(ε) $1(1!) + 2(2!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1$, για κάθε $n \geq 1$.

(στ) $n! \geq 2^{n-1}$, για κάθε $n \geq 1$.

Λύση

(α) Έστω $P(n)$ το κατηγόρημα $1+5+9+\cdots+(4n-3) = n(2n-1)$.

Όταν $n = 1$, το πρώτο μέλος ισούται με 1 και $n(2n-1) = 1$. Άρα, $P(1)$ αληθής.

Υποθέτουμε τώρα ότι $P(k)$ αληθής για κάποιο $k \geq 1$. Δείχνουμε στη συνέχεια ότι $P(k+1)$ πρέπει να είναι αληθής.

$$\begin{aligned}
1+5+9+\cdots+[(4k+1)-3] &= 1+5+9+\cdots+(4k-3)+(4k+1) \\
&= k(2k-1)+(4k+1) \\
&= 2k^2+3k+1 \\
&= (k+1)(2k+1) \\
&= (k+1)[2(k+1)-1]
\end{aligned}$$

Άρα, $P(n)$ αληθής για κάθε $n \geq 1$.

(β) Έστω $P(n)$ το κατηγόρημα $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Επειδή $1^2 = 1$ και $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6}(1)(2)(3) = 1$ όταν $n = 1$, έπεται ότι $P(1)$ αληθής.

Υποθέτουμε τώρα ότι $P(k)$ αληθής για κάποιο $k \geq 1$. Δείχνουμε στη συνέχεια ότι $P(k+1)$ πρέπει να είναι αληθής.

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \cdots + (k+1)^2 &= 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 \\
&= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\
&= \frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)] \\
&= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6) \\
&= \frac{1}{6}(k+1)(2k+3)(k+2) \\
&= \frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1].
\end{aligned}$$

Άρα, $P(n)$ αληθής για κάθε $n \geq 1$.

(γ) Έστω $P(n)$ το κατηγόρημα $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

Όταν $n = 1$, το πρώτο μέλος ισούται με $\frac{1}{3}$ και $\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{3}$. Άρα, $P(1)$ αληθής.

Υποθέτουμε τώρα ότι $P(k)$ αληθής για κάποιο $k \geq 1$. Δείχνουμε στη συνέχεια ότι $P(k+1)$ πρέπει να είναι αληθής.

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{[2(k+1)-1][2(k+1)+1]} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}$$

Άρα, $P(n)$ αληθής για κάθε $n \geq 1$.

(δ) Έστω $P(n)$ το κατηγόρημα ‘‘ο ακέραιος $(n^3 - n)$ διαιρείται με το 3’’.
Αφού $n^3 - n = 0$ όταν $n = 1$, και το 0 διαιρείται με το 3, έχουμε ότι $P(1)$ αληθής.
Υποθέτουμε τώρα ότι $P(k)$ αληθής για κάποιο $k \geq 1$.
Τότε,

$$\begin{aligned}
(k+1)^3 - (k+1) &= k^3 + 3k^2 + 2k \\
&= (k^3 - k) + 3k^2 + 3k
\end{aligned}$$

Αφού ο $(k^3 - k)$ διαιρείται με το 3, ο $(k^3 - k) + 3k^2 + 3k$ διαιρείται επίσης με το 3. Με άλλα λόγια, ο ακέραιος $[(k+1)^3 - (k+1)]$ διαιρείται με το 3. Επομένως $P(k+1)$ είναι επίσης αληθής και από την μαθηματική επαγωγή έχουμε ότι $P(n)$ αληθής για κάθε $n \geq 1$.

(ε) Έστω $P(n)$ το κατηγόρημα $1(1!) + 2(2!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1$.
Όταν $n = 1$, το πρώτο μέλος ισούται με 1 και $(n+1)! - 1 = 1$. Άρα, $P(1)$ αληθής.
Υποθέτουμε τώρα ότι $P(k)$ αληθής για κάποιο $k \geq 1$. Δείχνουμε στη συνέχεια ότι η $P(k+1)$ πρέπει να είναι αληθής.

$$1(1!) + 2(2!) + \cdots + (k + 1)((k + 1)!) = 1(1!) + 2(2!) + \cdots + k(k!) + (k + 1)((k + 1)!)$$

$$= (k + 1)! - 1 + (k + 1)((k + 1)!) = (k + 2)((k + 1)!) - 1 = (k + 2)! - 1$$

Επομένως $P(k + 1)$ είναι επίσης αληθής και από την μαθηματική επαγωγή έχουμε ότι $P(n)$ αληθής για κάθε $n \geq 1$.

(στ) Έστω $P(n)$ το κατηγόρημα $n! \geq 2^{n-1}$.

Όταν $n = 1$, έχουμε $1! = 1$ και $2^{1-1} = 1$. Άρα, $P(1)$ αληθής.
Υποθέτουμε τώρα ότι $P(k)$ αληθής για κάποιο $k \geq 1$. Δηλαδή υποθέτουμε ότι $k! \geq 2^{k-1}$. Τότε

$$(k+1)! = (k+1)k! \geq (k+1)2^{k-1}.$$

Αλλά, $k + 1 \geq 2$ για $k \geq 1$, οπότε

$$(k+1)! \geq 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k.$$

Επομένως $P(k + 1)$ είναι επίσης αληθής και από την μαθηματική επαγωγή έχουμε ότι $P(n)$ αληθής για κάθε $n \geq 1$. ■

Άσκηση 17

Μια ακολουθία ακεραίων $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, ορίζεται από τις

$x_1 = 1$ και $x_{k+1} = \dfrac{x_k}{x_k + 2}$, για $k \geq 1$.

Υπολογίστε τους x_2, x_3 και x_4. Δείξτε στη συνέχεια, ότι

$$x_n = \frac{1}{2^n - 1}, \text{ για κάθε } n \geq 1.$$

Λύση

Είναι

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1/3,\ x_3 = 1/7 \text{ και } x_4 = 1/15.$$

Έστω $P(n)$ το κατηγόρημα

$$x_n = \frac{1}{2^n - 1}$$

Αντικαθιστώντας $n = 1$, έχουμε $x_1 = 1$ που σημαίνει ότι $P(1)$ αληθής.
Υποθέτουμε ότι $P(k)$ αληθής για κάποιο $k \geq 1$. Τότε,

$$x_{k+1} = \frac{x_k}{x_k + 2} = \frac{1/(2^k - 1)}{1/(2^k - 1) + 2} = \frac{1}{1 + 2(2^k - 1)} = \frac{1}{2^{k+1} - 1}$$

Επομένως $P(k + 1)$ επίσης αληθής και από την μαθηματική επαγωγή έχουμε ότι $P(n)$ αληθής για κάθε $n \geq 1$. ■

Άσκηση 18

Μια ακολουθία ακεραίων $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, ορίζεται από τις

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2 \text{ και } x_{k+1} = 2x_k - x_{k-1}, \text{ για } k > 1.$$

Υπολογίστε τους x_3, x_4 και x_5. Μαντέψτε έναν γενικό τύπο για τον x_n και επαληθεύστε τον ισχυρισμό σας με επαγωγή στο n.

Λύση

Είναι

$x_3 = 2x_2 - x_1 = 3$
$x_4 = 2x_3 - x_2 = 4$
$x_5 = 2x_4 - x_3 = 5$

Ισχυριζόμαστε ότι $x_n = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θα αποδείξουμε την αλήθειά του με επαγωγή στο n.

Έστω $P(n)$ το κατηγόρημα $x_n = n$.
Αντικαθιστώντας $n = 1$, έχουμε $x_1 = 1$ που σημαίνει ότι $P(1)$ αληθής και αντικαθιστώντας $n = 2$, έχουμε $x_2 = 2$ που σημαίνει ότι $P(2)$ επίσης αληθής.
Υποθέτουμε ότι οι $P(k)$ και $P(k-1)$ είναι αληθείς για κάποιο $k \geq 1$. Τότε,

$$x_{k+1} = 2x_k - x_{k-1} = 2k - (k-1) = k + 1.$$

Άρα, $P(k+1)$ είναι επίσης αληθής και από την μαθηματική επαγωγή έχουμε ότι $P(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \geq 1$. ■

Άσκηση 19

Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο $n > 4$ ισχύει, $2^n > n^2 + n$.

Λύση

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Έστω $P(n)$ το κατηγόρημα, $2^n > n^2 + n$.

Βασικό βήμα. Η πρόταση $P(5)$ είναι αληθής, γιατί $2^5 = 32 > 5^2 + 5 = 30$.

Επαγωγικό βήμα. Υποθέτουμε ότι η $P(n)$ είναι αληθής, δηλαδή ότι $2^n > n^2 + n$. Θα δείξουμε ότι η $P(n+1)$ είναι αληθής, δηλαδή ότι $2^{n+1} > (n+1)^2 + n + 1$. Έχουμε

$$2^n > n^2 + n \;\Rightarrow\; 2\cdot 2^n > 2\cdot(n^2 + n) \;\Rightarrow\; 2^{n+1} > 2n^2 + 2n$$

οπότε αρκεί να δείξουμε ότι

$2n^2 + 2n > (n+1)^2 + n + 1$, ή

$2n(n+1) > (n+1)(n+2)$, ή

$2n > n + 2$, ή

$n > 2$, που ισχύει γιατί $n > 4$. ■

Άσκηση 20

Δείξτε ότι αν $a > -1$ τότε $(1+a)^n \geq 1 + na$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Λύση

Έστω $P(n)$ η προς απόδειξη σχέση.

- Η $P(0)$ είναι αληθής γιατί για $n = 0$ η ανισότητα γίνεται $(1+a)^0 \geq 1 + 0a$, δηλαδή, $1 \geq 1$.
- Δείχνουμε ότι αν $P(n)$ αληθής τότε και $P(n+1)$ αληθής δηλαδή,

  αν $(1+a)^n \geq 1 + na$, τότε $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$.

Έχουμε

$(1 + a)^n \geq 1 + na \Rightarrow$ [είναι $1 + a > 0$]

$(1 + a)^n(1 + a) \geq (1 + na)(1 + a) \Rightarrow$

$(1 + a)^{n+1} \geq 1 + a + na + na^2 \Rightarrow$

$(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a + na^2 \Rightarrow$ [είναι $1 + (n + 1)a + na^2 > 1 + (n + 1)a$]

$(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a.$ ■

Άσκηση 21

Οι αρμονικοί αριθμοί H_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, ορίζονται από τη σχέση

$$H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}$$

Δείξτε ότι

$$\forall n \in \mathbb{N},\ H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}.$$

Λύση

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής στην απλή μορφή της. Έστω $P(n)$ το κατηγόρημα $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$.

Βασικό βήμα. Η πρόταση $P(0)$ είναι αληθής, γιατί $H_{2^0} = H_1 = 1 \geq 1 + \frac{0}{2}$.

Επαγωγικό βήμα. Υποθέτουμε ότι η $P(n)$ είναι αληθής, δηλαδή ότι $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$. Θα δείξουμε ότι η $P(n+1)$ είναι αληθής, δηλαδή ότι $H_{2^{n+1}} \geq 1 + \frac{n+1}{2}$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
H_{2^{n+1}} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n + 1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= H_{2^n} + \frac{1}{2^n + 1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\
&\geq \left(1 + \frac{n}{2}\right) + \frac{1}{2^n + 1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\
&\geq \left(1 + \frac{n}{2}\right) + 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \\
&\geq \left(1 + \frac{n}{2}\right) + \frac{1}{2} \\
&= 1 + \frac{n+1}{2}.
\end{aligned}$$

■

Άσκηση 22

Οι αρμονικοί αριθμοί H_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, ορίζονται από τη σχέση

$$H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}$$

Δείξτε ότι

$$\forall n \in \mathbb{N},\ H_{2^n} \le 1 + n\,.$$

Λύση

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής στην απλή μορφή της. Έστω $P(n)$ το κατηγόρημα $H_{2^n} \le 1 + n$.

Βασικό βήμα. Η πρόταση $P(0)$ είναι αληθής, γιατί $H_{2^0} = H_1 = 1 \le 1 + 0$.

Επαγωγικό βήμα. Υποθέτουμε ότι η $P(n)$ είναι αληθής, δηλαδή ότι $H_{2^n} \le 1 + n$. Θα δείξουμε ότι η $P(n+1)$ είναι αληθής, δηλαδή ότι $H_{2^{n+1}} \le 1 + (n+1)$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
H_{2^{n+1}} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n + 1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= H_{2^n} + \frac{1}{2^n + 1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\
&\le 1 + n + \frac{1}{2^n + 1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\
&\le 1 + n + 2^n \left(\frac{1}{2^n} \right) \\
&\le 1 + n + 1 \\
&= 1 + (n+1)\,.
\end{aligned}$$

■

Άσκηση 23

Δείξτε ότι, κάθε ακέραιος n μεγαλύτερος του 1 μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο πρώτων.

Λύση

Έστω $P(n)$ το κατηγόρημα, "Κάθε ακέραιος $n > 1$ μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο πρώτων".

1. Η $P(2)$ αληθής γιατί $2 = 2$.
2. Έστω ότι $P(k)$ αληθής για όλους τους θετικούς ακεραίους k με $k \le n$. Πρέπει να δείξουμε ότι $P(n + 1)$ αληθής.

$1^η$ περίπτωση: $n + 1$ πρώτος. Τότε $P(n + 1)$ προφανής.

$2^η$ περίπτωση: $n + 1$ σύνθετος. Τότε $n + 1 = a \cdot b$ με $2 \le a \le b < n + 1$, αλλά οι a και b από την υπόθεση μπορούν να γραφτούν ως γινόμενο πρώτων. ■