Ασκήσεις (5)

Άσκηση 1

Γράψτε το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών και σχεδιάστε τον γράφο μιας σχέσης από το σύνολο $A = \{1, 2, 3\}$ στο σύνολο $B = \{a, b, c, d\}$ της οποίας ο πίνακας είναι

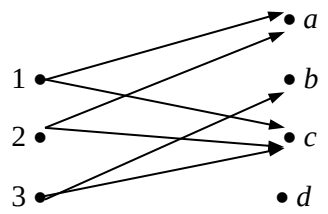
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Λύση

Το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών είναι

$$\{(1, a), (1, c), (2, a), (2, c), (3, b), (3, c)\}$$

και ο γράφος της σχέσης είναι ο ακόλουθος



Άσκηση 2

Για κάθε μία από τις ακόλουθες σχέσεις στο $\mathbb{N}$, γράψτε τα διατεταγμένα ζεύγη που ανήκουν στη σχέση.

$\mathcal{R} = \{(x, y) : 2x + y = 9\}$

$\mathcal{S} = \{(x, y) : x + y < 7\}$

$\mathcal{T} = \{(x, y) : y = x^2\}$.

Λύση

Το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών για κάθε μια σχέση, είναι

$\mathcal{R} = \{(1, 7), (2, 5), (3, 3), (4, 1)\}$

$\mathcal{S} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1)\}$

$\mathcal{T} = \{(n, n^2) : n \in \mathbb{N}\}$.

Άσκηση 3

Έστω $\mathcal{R}$ η σχέση στο σύνολο $\{1, 2, 3, 4\}$ που δίνεται από την $a \mathcal{R} b$, αν και μόνο αν $a + 2b$ είναι περιττός. Αναπαραστήστε τη σχέση $\mathcal{R}$ με κάθε έναν από τους ακόλουθους τρόπους:

(α) ως ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών

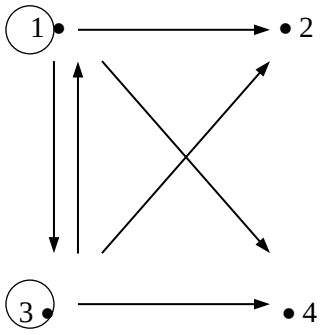
(β) ως έναν γράφο
(γ) ως έναν πίνακα.

Λύση

(α) Η σχέση $\mathcal{R}$ ως σύνολο διατεταγμένων ζευγών είναι

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$$

(β) Η σχέση $\mathcal{R}$ ως γράφος αναπαρίσταται ως εξής



(γ) Ο πίνακας που αντιστοιχεί στη σχέση $\mathcal{R}$ είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 4

Κάθε μια από τις παρακάτω ορίζει μια σχέση στο σύνολο $\mathbb{Z}$. Σε κάθε περίπτωση, προσδιορίστε αν η σχέση είναι ανακλαστική, συμμετρική ή μεταβατική.

(α) $x + y$ είναι περιττός
(β) $x + y$ είναι άρτιος
(γ) xy είναι περιττός
(δ) $x + xy$ είναι άρτιος.

Λύση

(α) Η σχέση είναι συμμετρική διότι $x + y = y + x$, οπότε αν $x + y$ είναι περιττός τότε και $y + x$ είναι περιττός.
Δεν είναι ανακλαστική διότι $x + x$ είναι πάντα άρτιος.
Δεν είναι μεταβατική διότι, για παράδειγμα, $1 + 4$ και $4 + 3$ είναι και οι δύο περιττοί αλλά $1 + 3$ δεν είναι περιττός.

(β) Η σχέση είναι ανακλαστική διότι για κάθε x, $x + x = 2x$ είναι άρτιος.
Είναι συμμετρική διότι $x + y = y + x$, οπότε αν $x + y$ είναι άρτιος τότε και $y + x$ είναι άρτιος.
Είναι μεταβατική διότι αν $x + y$ και $y + z$ είναι άρτιοι τότε οι x, y και z είναι όλοι είτε άρτιοι είτε περιττοί και σε κάθε περίπτωση ο $x + z$ είναι άρτιος.

(γ) Η σχέση είναι συμμετρική διότι $xy = yx$.
Είναι επίσης μεταβατική διότι αν xy και yz είναι περιττοί τότε οι x, y και z είναι όλοι περιττοί, οπότε ο xz είναι περιττός.
Δεν είναι ανακλαστική διότι, για παράδειγμα, $2\cdot 2 = 4$ δεν είναι περιττός.

(δ) Η σχέση είναι ανακλαστική διότι $x + x^2 = x(1 + x)$ είναι το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων, ένας εκ των οποίων πρέπει να είναι άρτιος, οπότε το $x + x^2$ είναι πάντα άρτιος.
Είναι μεταβατική διότι, αν $x + xy$ είναι άρτιος και $y + yz$ είναι άρτιος, τότε είτε x άρτιος (οπότε σ' αυτή την περίπτωση $x + xz$ είναι αυτομάτως άρτιος) είτε x περιττός (οπότε σ' αυτή την περίπτωση οι x, y και z είναι όλοι περιττοί και έτσι, πάλι, $x + xz$ είναι άρτιος). Επομένως $x + xz$ είναι επίσης άρτιος.
Δεν είναι συμμετρική διότι, για παράδειγμα, $2 + 2\cdot 3 = 8$ είναι άρτιος, αλλά $3 + 3\cdot 2 = 9$ δεν είναι άρτιος.

Άσκηση 5

Για κάθε μια από τις ακόλουθες σχέσεις στο σύνολο $\{x : x \in \mathbb{Z} \text{ και } 1 \le x \le 12\}$ γράψτε τα διατεταγμένα ζεύγη που ανήκουν στη σχέση.

(α) $\mathcal{R} = \{(x, y) : xy = 9\}$

(β) $\mathcal{S} = \{(x, y) : 2x = 3y\}$

(γ) μεταβατική θήκη της $\mathcal{R}$

(δ) μεταβατική θήκη της $\mathcal{S}$.

Λύση

(α) $\mathcal{R} = \{(1, 9), (3, 3), (9, 1)\}$

(β) $\mathcal{S} = \{(3, 2), (6, 4), (9, 6), (12, 8)\}$

(γ) Η μεταβατική θήκη της $\mathcal{R}$ είναι $\mathcal{R} \cup \{(1, 1), (9, 9)\}$.

(δ) Η μεταβατική θήκη της $\mathcal{S}$ είναι $\mathcal{S} \cup \{(9, 4)\}$.

Άσκηση 6

Κάθε μία από τις ακόλουθες ορίζει μια σχέση στο δοσμένο σύνολο. Σε κάθε περίπτωση, περιγράψτε με λόγια ποια θα πρέπει να είναι η μεταβατική θήκη.

(α) *"ο a είναι ένα χρόνο μικρότερος από τον b"*, στο σύνολο των ανθρώπων.

(β) $a = 2b$, στο σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών.

(γ) $a < b$, στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

(δ) ο *a είναι υιός του b*, στο σύνολο των αρένων.

Λύση

(α) *"ο a είναι μερικά χρόνια μικρότερος από τον b"*.

(β) $a = 2^n b$ για κάποιο φυσικό αριθμό n.
(γ) $a < b$, αφού η δεδομένη σχέση είναι μεταβατική.
(δ) ο *a είναι αρσενικός απόγονος του b*.

Άσκηση 7

Προσδιορίστε κάθε μία από τις θήκες που είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική, της σχέσης $\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (a, d), (b, d), (c, a), (d, a)\}$ στο σύνολο $\{a, b, c, d\}$. Έχει νόημα να ψάξουμε για την αντισυμμετρική θήκη;

Λύση

Η ανακλαστική θήκη είναι $\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (a, d), (b, d), (c, a), (d, a), (d, d)\}$.

Η συμμετρική θήκη είναι $\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (a, d), (b, d), (c, a), (d, a), (d, b)\}$.

Για τη μεταβατική θήκη, προσθέτουμε το (b, a) (χρησιμοποιώντας τα (b, d) και (d, a)), το (c, d) (χρησιμοποιώντας τα (c, a) και (a, d)) και το (d, d) (εξαιτίας των (d, a) και (a, d)). Μετά προσθέτουμε το (b, c) (χρησιμοποιώντας το νέο (b, a) και το παλιό (a, c)).
Επομένως, η μεταβατική θήκη είναι $\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (a, d), (b, d), (c, a), (d, a), (b, a), (c, d), (d, c), (d, d), (b, c)\}$.

Αν μια σχέση δεν είναι αντισυμμετρική περιέχει ζεύγη της μορφής (x, y) και (y, x) όπου $x \neq y$. Η προσθήκη ζευγών δεν θα επιφέρει αλλαγή και συνεπώς δεν υπάρχει κάτι σαν αντισυμμετρική θήκη.

Άσκηση 8

Για κάθε μια από τις παρακάτω σχέσεις ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ στο δοσμένο σύνολο A, περιγράψτε τη διαμέριση στην οποία η σχέση διαμερίζει το σύνολο

(α) $A = \mathbb{Z}$· η $\mathcal{R}$ δίνεται από την, $x\mathcal{R}y$, αν και μόνο αν $x - y$ είναι άρτιος.

(β) A είναι το σύνολο των ανθρώπων· η $\mathcal{R}$ δίνεται από την, $x\mathcal{R}y$, αν και μόνο αν ο x είναι του ίδιου φύλλου με τον y.

(γ) $A = \mathbb{R}^2$· η $\mathcal{R}$ δίνεται από την, $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$, αν και μόνο αν $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

Λύση

(α) Επειδή $x - y$ είναι άρτιος σημαίνει ότι το 2 διαιρεί τη διαφορά $x - y$, υπάρχουν δύο κλάσεις ισοδυναμίας, το σύνολο των αρτίων και το σύνολο των περιττών ακεραίων.

(β) Υπάρχουν δύο κλάσεις ισοδυναμίας, το σύνολο των αρένων και το σύνολο των θήλεων.

(γ) Κάθε κλάση ισοδυναμίας είναι το σύνολο των σημείων κύκλου με κέντρο το σημείο (0, 0).

Άσκηση 9

Μια σχέση $\mathcal{R}$ στο $\mathbb{Z}$ δίνεται από την $x\mathcal{R}y$, αν και μόνο αν $x^2 - y^2$ διαιρείται με το 3. Δείξτε ότι η $\mathcal{R}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας και προσδιορίστε την αντίστοιχη διαμέριση του $\mathbb{Z}$ σε διακεκριμένες κλάσεις ισοδυναμίας.

Λύση

Επειδή $x^2 - x^2 = 0$, που διαιρείται με το 3, η σχέση $\mathcal{R}$ είναι ανακλαστική.
Αν $x^2 - y^2$ διαιρείται με το 3 τότε $y^2 - x^2 = -(x^2 - y^2)$ είναι το αντίθετο ενός πολλαπλάσιου του 3 και συνεπώς διαιρείται με το 3. Επομένως η σχέση $\mathcal{R}$ είναι συμμετρική.

Αν $x^2 - y^2$ και $y^2 - z^2$ διαιρούνται με το 3 τότε $x^2 - z^2 = (x^2 - y^2) + (y^2 - z^2)$ είναι το άθροισμα δύο πολλαπλάσιων του 3 και συνεπώς διαιρείται με το 3. Επομένως η σχέση $\mathcal{R}$ είναι μεταβατική.

Η κλάση ισοδυναμίας του 0 είναι $E_0 = \{n : n^2$ διαιρείται με το $3\}$. Επειδή το n^2 διαιρείται με το 3, αν και μόνο αν το n διαιρείται με το 3, $E_0 = \{0, \pm 3, \pm 6, \ldots\}$.

Η κλάση ισοδυναμίας του 1 είναι $E_1 = \{n : n^2 - 1$ διαιρείται με το $3\}$. Τώρα, $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$ έτσι ώστε ένα από τα $n - 1$ και $n + 1$ διαιρείται με το 3. Επομένως, $n = 3m \pm 1$, $m \in \mathbb{Z}$ και συνεπώς $E_1 = \{\ldots, -2, -1, 1, 2, 4, 5, \ldots\}$.

Υπάρχουν δύο κλάσεις ισοδυναμίας E_0 και E_1.

Άσκηση 10

Έστω Π το σύνολο των πινάκων της μορφής $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{Z}$. Να δείξετε ότι

i) Το Π είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό στο σύνολο των 2×2 πινάκων.
ii) Ο πολλαπλασιασμός στο Π είναι αντιμεταθετικός.
iii) Για κάθε πίνακα $A \in \Pi$ υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας $A^{-1} \in \Pi$.

Λύση

i) το σύνολο Π είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό στο σύνολο Π_2 των 2×2 πινάκων. Πράγματι, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \beta + \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και επειδή $(\beta + \alpha) \in \mathbb{Z}$, το Π είναι κλειστό ως προς την πράξη $\cdot$ στο Π_2 (είναι $\Pi \subset \Pi_2$).

ii) Η πράξη του πολλαπλασιασμού είναι αντιμεταθετική στο Π γιατί,

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \beta + \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha + \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

iii) Υπάρχει το μοναδιαίο στοιχείο στο Π, γιατί για $\alpha = 0 \in \mathbb{Z}$, προκύπτει ότι ο γνωστός μας πίνακας

$$\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ανήκει στο Π.

Για κάθε πίνακα $A \in \Pi$ υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας $A^{-1} \in \Pi$. Πράγματι, αν υπάρχει το αντίστροφο στοιχείο του $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και είναι το $A' = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ θα πρέπει,

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \alpha + x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \alpha + x = 0 \Leftrightarrow x = -\alpha$$

και επειδή $\forall \alpha \in \mathbb{Z}$ είναι $-\alpha \in \mathbb{Z}$, το αντίστροφο στοιχείο του A είναι ο πίνακας

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 11

Να εξετάσετε αν το σύνολο $P = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$, είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Να εξετάσετε επίσης αν

i) υπάρχει μοναδιαίο στοιχείο ως προς την πράξη αυτή στο P
ii) η πράξη αυτή είναι αντιμεταθετική στο P.

Λύση

Έστω οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$$

από το σύνολο P. Το γινόμενό τους θα είναι

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ bc+ad & -bd+ac \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix}$$

όπου $e = ac - bd$ και $f = ad + bc$. Άρα είναι πίνακας του συνόλου P και συνεπώς το σύνολο αυτό είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό πινάκων.

i) Παρατηρούμε ότι για $a = 1$ και $b = 0$, προκύπτει ο γνωστός 2×2 μοναδιαίος πίνακας

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως υπάρχει μοναδιαίο στοιχείο ως προς την πράξη αυτή στο P.

ii) Για να ελέγξουμε αν η πράξη αυτή είναι αντιμεταθετική στο σύνολο P, υπολογίζουμε τα γινόμενα

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ bc+ad & -bd+ac \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca-db & -da-cb \\ cb+da & -db+ca \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{bmatrix}$$

που είναι ίσα. Επομένως ο πολλαπλασιασμός πινάκων στο P είναι αντιμεταθετικός.

Άσκηση 12

Στο σύνολο $\mathbb{R}$ ορίζουμε την πράξη $*$ με τον ακόλουθο τρόπο

$$a * b = ab + a + b$$

i) Να εξετάσετε αν η πράξη αυτή είναι προσεταιριστική ή αντιμεταθετική.
ii) Να βρείτε ποια στοιχεία του $\mathbb{R}$ έχουν συμμετρικό στοιχείο ως προς την πράξη αυτή.

Λύση

i) Είναι

$$a*(b*c)=a*(bc+b+c)=a(bc+b+c)+a+bc+b+c=abc+ab+bc+ca+a+b+c$$

$$(a*b)*c=(ab+a+b)*c=(ab+a+b)c+ab+a+b+c=abc+ab+bc+ca+a+b+c$$

Επομένως πράξη αυτή είναι προσεταιριστική. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι είναι και αντιμεταθετική, αφού

$$a*b=ab+a+b=ba+b+a=b*a.$$

ii) Για να απαντήσουμε το ερώτημα για το συμμετρικό πρέπει να ξέρουμε το ουδέτερο στοιχείο της πράξης. Για να είναι το e ουδέτερο στοιχείο, πρέπει (λαμβάνοντας υπόψη ότι η πράξη είναι αντιμεταθετική)

$$a*e=a, \text{ για κάθε } a\in\mathbb{R}.$$

Έχουμε,

$$a*e=a \Leftrightarrow ae+a+e=a \Leftrightarrow (a+1)e=0. \qquad (1)$$

Η (1) αληθεύει αν $e=0$, για κάθε $a\in\mathbb{R}$. Επομένως το ουδέτερο στοιχείο της πράξης $*$ είναι το $e=0$.

Τώρα, για να έχει το $a\in\mathbb{R}$ συμμετρικό στοιχείο το $a'\in\mathbb{R}$, πρέπει

$$a*a'=e \Leftrightarrow aa'+a+a'=0 \Leftrightarrow (a+1)a'=-a \qquad (2)$$

Αν $a+1=0 \Leftrightarrow a=-1$, τότε η (2) είναι αδύνατη.

Αν $a+1\neq 0 \Leftrightarrow a\neq -1$, τότε (2) $\Leftrightarrow$ $a'=-\dfrac{a}{a+1}\in\mathbb{R}$.

Επομένως όλα τα $a\in\mathbb{R}$ εκτός από το $a=-1$ έχουν αντίστροφο (που δίνεται από τον τύπο $a'=-\dfrac{a}{a+1}$).