Ασκήσεις (4)

Άσκηση 1

Έστω,

$$\Omega = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\},\ \ n \in \mathbb{N}$$

ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και

$$P(x_k) = \frac{x}{2^{k-1}},\ \ 1 \le k \le n$$

η συνάρτηση πιθανότητας. Να βρεθεί ποιος πρέπει να είναι ο πραγματικός αριθμός x.

Λύση

Πρέπει αρχικά να είναι $0 < P(x_k) \le 1$, ή $0 < \frac{x}{2^{k-1}} \le 1$, δηλ. $0 < x \le 2^{k-1}$, $1 \le k \le n$. Επίσης πρέπει

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x}{2^{k-1}} = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{2x}{2^k} = 1 \Leftrightarrow 2x\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2x}.$$

Το άθροισμα που εμφανίζεται στην τελευταία εξίσωση είναι το άθροισμα των n πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου (a_n) με πρώτο όρο $a_1 = ½$ και λόγο $\lambda = ½$, οπότε έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{2^n - 1}{2^n}.$$

Τελικά παίρνουμε την εξίσωση

$$2x = \frac{2^n}{2^n - 1} \Leftrightarrow x = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}.$$

■

Άσκηση 2

Αν $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 40\}$ είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και A, B δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενά του τέτοια, ώστε

$$\frac{1}{P(A)} + \frac{1}{P(B)} = 4.$$

i) δείξτε ότι, $P(B) \le 1 - P(A)$

ii) δείξτε ότι, $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$

iii) βρείτε το πλήθος των ενδεχομένων που είναι ισοπίθανα με το A.

Λύση

i)

Τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα, οπότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ και συνεπώς

$$P(A \cup B) \le 1 \Rightarrow P(A) + P(B) \le 1 \Rightarrow P(B) \le 1 - P(A).$$

ii)

Από την $\frac{1}{P(A)}+\frac{1}{P(B)}=4$ βρίσκουμε ότι

$$P(B)=\frac{P(A)}{4P(A)-1}\geq 0 \Rightarrow 4P(A)-1\geq 0$$

και από την $P(B) \leq 1 - P(A)$ προκύπτει ότι

$$\frac{P(A)}{4P(A)-1}\leq 1-P(A) \Rightarrow P(A)\leq \left(4P(A)-1\right)\left(1-P(A)\right)$$

$$\Rightarrow P(A)\leq 4P(A)-4\left(P(A)\right)^2-1+P(A)$$

$$\Rightarrow 0\leq 4P(A)-4\left(P(A)\right)^2-1$$

$$\Rightarrow \left(2P(A)-1\right)^2\leq 0$$

$$\Rightarrow 2P(A)-1=0 \Rightarrow P(A)=\frac{1}{2}$$

Επίσης από την

$$P(B)=\frac{P(A)}{4P(A)-1}$$

βρίσκουμε ότι $P(B)=\frac{1}{2}$.

iii)

Έστω X ένα υποσύνολο του Ω με n στοιχεία, δηλ. ένα ενδεχόμενο του π.τ. που αποτελείται από n αποτελέσματα του π.τ. Επειδή τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, με πιθανότητα το καθένα 1/40, αν είναι $P(X) = P(A) = ½$, τότε θα είναι

$$P(X)=\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{n}{40}=\frac{1}{2}\Rightarrow n=20\,,$$

δηλαδή το X θα έχει 20 στοιχεία. Το πλήθος τώρα των υποσυνόλων του Ω που έχουν πληθικό αριθμό 20, είναι

$$\binom{40}{20}=\frac{40!}{20!20!}=\frac{20!21\cdot 22\cdot\ldots\cdot 40}{20!20!}=\frac{21\cdot 22\cdot\ldots\cdot 40}{20!}.$$ ■

Άσκηση 3

Έστω ο δειγματικός χώρος,

$$\Omega = \{n, n+1, n+2, \ldots, 2n-1, 2n\}\,,\ \ n\in\mathbb{N}$$

και οι πιθανότητες,

$$P(k+n) = 1998\cdot P(k+n-1)\,,\ \ k = 1, 2, \ldots, n$$

Δείξτε ότι,

$$P(n) = \frac{1997}{1998^{n+1}-1}.$$

Λύση

Από τη σχέση $P(n + k) = 1998\cdot P(n + k - 1)$ προκύπτει ότι η ακολουθία τιμών $P(n)$, $P(n + 1)$, $P(n + 2)$, …, $P(n + n)$ είναι μια γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο $a_0 = P(n)$ και λόγο $\lambda = 1998$, οπότε μπορούμε να γράψουμε τον τυχαίο όρο της $a_k = \lambda^k a_0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, ή

$$P(n + k) = 1998^k \cdot P(n),\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Από τον νόμο των πιθανοτήτων όμως έχουμε

$$P(n) + P(n + 1) + \ldots + P(n + n) = 1 \Rightarrow$$

$$P(n) + 1998 \cdot P(n) + 1998^2 \cdot P(n) + \ldots + 1998^n \cdot P(n) = 1 \Rightarrow$$

$$(1 + 1998 + 1998^2 + \ldots + 1998^n) \cdot P(n) = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1998^{n+1} - 1}{1998 - 1} P(n) = 1 \Rightarrow$$

$$P(n) = \frac{1997}{1998^{n+1} - 1}.$$

■

Άσκηση 4

Ένα κουτί περιέχει 10 άσπρα, 4 μαύρα και 2 κόκκινα σφαιρίδια. Αν πάρουμε τυχαία δύο, να βρεθεί η πιθανότητα ώστε,

i) και τα δύο να είναι άσπρα
ii) και τα δύο να είναι κόκκινα
iii) ένα τουλάχιστο να είναι άσπρο
iv) το πολύ ένα να είναι άσπρο
v) ακριβώς ένα να είναι άσπρο
vi) κανένα κόκκινο
vii) κανένα άσπρο

Λύση

i)

Επειδή οι τριάδες που σχηματίζονται δεν είναι διατεταγμένες ο δειγματικός χώρος έχει πληθικό αριθμό

$$|\Omega| = \binom{16}{2} = \frac{16!}{2!14!} = 120.$$

Επειδή το ενδεχόμενο A: «και τα δύο είναι άσπρα» είναι το σύνολο των δυάδων που επιλέγονται από 10, συνεπάγεται ότι

$$|A| = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10.9.8!}{2!8!} = 45$$

Άρα,

$$P(A) = \frac{45}{120} = \frac{3}{8}.$$

ii)

Με τον ίδιο τρόπο διαπιστώνουμε ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου B: «και τα δύο είναι κόκκινα», είναι

$$P(B) = \binom{2}{2} \Big/ \binom{16}{2} = 1/120.$$

iii)

Αν Γ είναι το ενδεχόμενο «ένα τουλάχιστον είναι άσπρο», επειδή ένα τουλάχιστον άσπρο σημαίνει ένα άσπρο ή δύο άσπρα, έχουμε

$$|\Gamma| = \binom{10}{1}\binom{6}{1} + \binom{10}{2}\binom{6}{0} = 10\cdot 6 + \frac{10!}{2!8!}\cdot 1 = 60 + \frac{10.9.8!}{2!8!} = 60 + 45 = 105$$

και

$$P(\Gamma) = \frac{105}{120} = \frac{7}{8}.$$

iv)

Αν Δ είναι το ενδεχόμενο «το πολύ ένα είναι άσπρο», επειδή το πολύ ένα άσπρο σημαίνει κανένα άσπρο ή ένα άσπρο, έχουμε

$$|\Delta| = \binom{10}{0}\cdot\binom{6}{2} + \binom{10}{1}\cdot\binom{6}{1} = 1\cdot\frac{6!}{2!4!} + 10\cdot 6 = \frac{4!5\cdot 6}{2\cdot 4!} + 60 = 15 + 60 = 75$$

και

$$P(\Delta) = \frac{75}{120} = \frac{5}{8}.$$

v)

Αν E είναι το ενδεχόμενο «ακριβώς ένα είναι άσπρο», έχουμε

$$|E| = \binom{10}{1}\cdot\binom{6}{1} = 10\cdot 6 = 60$$

και

$$P(E) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}.$$

vi)

Αν Z είναι το ενδεχόμενο «κανένα κόκκινο», έχουμε

$$|Z| = \binom{14}{2}\cdot\binom{2}{0} = \frac{14!}{2!12!}\cdot 1 = \frac{12!13\cdot 14}{2\cdot 12!} = 13\cdot 7 = 91$$

και

$$P(Z) = \frac{91}{120}.$$

vii)

H είναι το ενδεχόμενο «κανένα άσπρο», έχουμε

$$|H| = \binom{10}{0}\cdot\binom{6}{2} = 1\cdot\frac{6!}{2!4!} = \frac{4!5\cdot 6}{2\cdot 4!} = 15$$

και

$$P(H) = \frac{15}{120} = \frac{1}{8}.$$

■

Άσκηση 5

Αν A και B είναι δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα, δείξτε ότι

i) A^c και B^c είναι ανεξάρτητα

ii) $P(A \cup B) = 1 - P(A^c)\cdot P(B^c)$.

Λύση

i)

Επειδή τα A και B είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα, θα είναι

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \qquad (1)$$

Επίσης, από τους νόμους του De Morgan έχουμε ότι

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c \qquad (2)$$

Από τις (1), (2) και γνωστές ιδιότητες των πιθανοτήτων προκύπτει ότι

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \qquad (3)$$

Από την άλλη μεριά, έχουμε

$$P(A^c)P(B^c) = [1 - P(A)][1 - P(B)] = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \qquad (4)$$

Τελικά από τις (3), (4) προκύπτει ότι

$$P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(A^c)$$

που σημαίνει ότι τα ενδεχόμενα A^c και B^c είναι ανεξάρτητα.

ii)

Είναι, με βάση και το (i),

$$P(A \cup B) = 1 - P((A \cup B)^c) = 1 - P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A^c)P(A^c). \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 6

Έχει διαπιστωθεί ότι κατά την παραγωγή ενός προϊόντος προκαλούνται ελαττώματα ενός είδους με πιθανότητα 1/10 και ενός δεύτερου είδους με πιθανότητα 5/100. Να βρεθεί η πιθανότητα ώστε ένα προϊόν της παραγωγής,

i) δεν έχει κανένα από τα δύο είδη ελαττωμάτων
ii) είναι ελαττωματικό
iii) έχει ένα μόνο ελάττωμα αν είναι γνωστό ότι είναι ελαττωματικό.

Λύση

Θεωρούμε τα (ανεξάρτητα) ενδεχόμενα
A = «έχει ελάττωμα του πρώτου είδους»
B = «έχει ελάττωμα του δεύτερου είδους»

i) Για το ενδεχόμενο Γ = «δεν έχει κανένα από τα δύο είδη ελαττωμάτων», είναι

$$\Gamma = A^c \cap B^c \Rightarrow P(\Gamma) = P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c)$$

(αφού και τα A^c, B^c είναι ανεξάρτητα, βλ. και Άσκ. 5)

$$\Rightarrow P(\Gamma) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = (1 - 1/10)(1 - 5/100) = (9/10)(95/100) = 855/1000$$

$$\Rightarrow P(\Gamma) = 0.855.$$

ii) Το ενδεχόμενο E = «είναι ελαττωματικό» σημαίνει ότι έχει τουλάχιστο ένα από τα δύο είδη ελαττώματος, άρα

$$E = A \cup B = \Gamma^c$$

$$\Rightarrow P(E) = P(\Gamma^c) = 1 - P(\Gamma) = 1 - 0.855 = 0.145.$$

iii) Θεωρούμε το ενδεχόμενο Δ = «έχει ένα μόνο ελάττωμα», για το οποίο είναι

$$\Delta = (A - B) \cup (B - A)$$

$$\Rightarrow P(\Delta) = P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{10} + \frac{5}{100} - 2\frac{1}{10}\cdot\frac{5}{100} = \frac{14}{100}$$

οπότε η πιθανότητα να έχει ένα μόνο ελάττωμα αν είναι γνωστό ότι είναι ελαττωματικό, είναι

$$P(\Delta \mid E) = \frac{P(\Delta \cap E)}{P(E)} = \frac{P(\Delta)}{P(E)} \qquad (\text{είναι } \Delta \subseteq E)$$

$$= \frac{14/100}{145/1000} = \frac{28}{29}.$$

■

Άσκηση 7

Τρεις παίκτες Α, Β, Γ κατά σειρά, ρίχνουν ένα ζάρι. Ο Α θα κερδίσει αν φέρει 5 ή 6, ο Β θα κερδίσει αν φέρει άρτιο αριθμό και ο Γ θα κερδίσει αν φέρει περιττό αριθμό. Να βρεθεί η πιθανότητα ώστε

i) ο Α τελικώς θα κερδίσει
ii) ο Β τελικώς θα κερδίσει
iii) ο Α θα ρίξει το ζάρι τρεις τουλάχιστον φορές.

Λύση

i) απ. = 2/5

ii) απ. = 2/5

iii) απ. = 1/36

■

Άσκηση 8

Τρεις παίκτες Α, Β, Γ κατά σειρά ρίχνουν ένα νόμισμα. Κερδίζει ο παίκτης που πρώτος θα φέρει κορώνα. Να βρεθεί η πιθανότητα ώστε τελικά,

i) ο Α κερδίζει
ii) ο Β κερδίζει
iii) ο Γ κερδίζει

Λύση

Έστω τα ενδεχόμενα A: «ο Α φέρνει κορώνα», B: «ο Β φέρνει κορώνα» και Γ: «ο Γ φέρνει κορώνα». Τότε

i)

$$P(\text{«ο Α κερδίζει»}) = P(A) + P(A^c \cap B^c \cap \Gamma^c \cap A) + P(A^c \cap B^c \cap \Gamma^c \cap A^c \cap B^c \cap \Gamma^c \cap A) + \ldots$$

$$= P(A) + P(A^c)P(B^c)P(\Gamma^c)P(A) + P(A^c)P(B^c)P(\Gamma^c)P(A^c)P(B^c)P(\Gamma^c)P(A) + \ldots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \ldots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\lambda^3 + \frac{1}{2}\cdot\lambda^6 + \ldots = \frac{1}{2}\left(1 + a + a^2 + \ldots\right) \qquad \{\text{όπου } a = \lambda^3 = (1/2)^3 = 1/8\}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-a} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{7} = \frac{4}{7}.$$

ii)

P(«ο Β κερδίζει») =

$$= P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c \cap \Gamma^c \cap A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c \cap \Gamma^c \cap A^c \cap B^c \cap \Gamma^c \cap A^c \cap B) + \ldots$$

$$= P(A^c)P(B) + P(A^c)P(B^c)P(\Gamma^c)P(A^c)P(B) + P(A^c)P(B^c)P(\Gamma^c)P(A^c)P(B^c)P(\Gamma^c)P(A^c)P(B) + \ldots$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \ldots$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\lambda^3 + \frac{1}{4}\cdot\lambda^6 + \ldots = \frac{1}{4}\left(1 + a + a^2 + \ldots\right) \qquad \{\text{όπου } a = \lambda^3 = (1/2)^3 = 1/8\}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-a} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{8}{7} = \frac{2}{7}.$$

iii)

P(«ο Γ κερδίζει») = $1 - [P(A) + P(B)] = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$.

Παρατήρηση: Στην παραπάνω λύση χρησιμοποιήσαμε τον τύπο αθροίσματος των άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο το 1 και λόγο a, με $|a| < 1$,

$$1 + a + a^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a}. \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 9

Από μια τράπουλα 52 χαρτιών επιλέγουμε τυχαία 5 χαρτιά. Ποια είναι η πιθανότητα,

i) να υπάρχουν 3 άσσοι;
ii) να υπάρχουν 2 βαλέδες;
iii) να είναι 2 ντάμες και 3 άσσοι;

Λύση

i) Οι δυνατές περιπτώσεις είναι $\binom{52}{5}$ γιατί από 52 χαρτιά επιλέγουμε 5 και δεν μας ενδιαφέρει η σειρά.

Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι $\binom{4}{3}\cdot\binom{48}{2}$ γιατί από τους τέσσερις άσσους επιλέγουμε τρεις και τα υπόλοιπα δύο χαρτιά τα επιλέγουμε από τα άλλα 48 χαρτιά της τράπουλας. Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(3\ \text{άσσοι}) = \binom{4}{3}\cdot\binom{48}{2}\Big/\binom{52}{5}.$$

ii) Παρόμοια, η πιθανότητα να υπάρχουν 2 βαλέδες, είναι

$$P(2\ \text{βαλέδες}) = \binom{4}{2}\cdot\binom{48}{3}\Big/\binom{52}{5}.$$

iii) Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι $\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{44}{0}=\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{3}$ γιατί από τις τέσσερις ντάμες επιλέγουμε δύο, από τους τέσσερις άσσους επιλέγουμε 3 και από τα υπόλοιπα 44 χαρτιά της τράπουλας επιλέγουμε 0. Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(2\ \text{ντάμες και 3 άσσοι}) = \binom{4}{2}\cdot\binom{4}{3}\Big/\binom{52}{5}.$$ ■

Άσκηση 10

Από μια κάλπη που περιέχει 20 φακέλους επιλέγουμε τυχαία έναν αριθμό φακέλων. Ποια είναι η πιθανότητα ο αριθμός των φακέλων να είναι άρτιος;

Λύση

Τα απλά ενδεχόμενα είναι:

1. Να επιλέξουμε έναν φάκελο από τους είκοσι, που μπορεί να γίνει κατά $\binom{20}{1}$ τρόπους
2. Να επιλέξουμε δύο φακέλους από τους είκοσι, που μπορεί να γίνει κατά $\binom{20}{2}$ τρόπους

…….

20. Να επιλέξουμε είκοσι φακέλους από τους είκοσι, που μπορεί να γίνει κατά $\binom{20}{20}$ τρόπους.

Συνεπώς το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων είναι

$$\binom{20}{1}+\binom{20}{2}+\cdots+\binom{20}{20}=\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}-\binom{20}{0}=\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}1^{20-k}\cdot 1^k-1=(1+1)^{20}-1=2^{20}-1.$$

Τα ευνοϊκά ενδεχόμενα είναι

1. Να επιλέξουμε δύο φακέλους από τους είκοσι, που μπορεί να γίνει κατά $\binom{20}{2}$ τρόπους
2. Να επιλέξουμε τέσσερις φακέλους από τους είκοσι, που μπορεί να γίνει κατά $\binom{20}{4}$ τρόπους

……

10. Να επιλέξουμε είκοσι φακέλους από τους είκοσι, που μπορεί να γίνει κατά $\binom{20}{20}$ τρόπους

Συνεπώς το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων είναι

$$\binom{20}{2}+\binom{20}{4}+\cdots+\binom{20}{20}=2^{19}-\binom{20}{0}=2^{19}-1$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι:

$$\binom{20}{0}+\binom{20}{2}+\binom{20}{4}+\cdots+\binom{20}{20}=\binom{20}{1}+\binom{20}{3}+\binom{20}{5}+\cdots+\binom{20}{19}=\frac{2^{20}}{2}=2^{19}.$$

Πράγματι, από τον τύπο του διωνύμου του Newton

$$(a+b)^{20}=\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}a^{20-k}b^{k}$$

για $a = 1$, $b = -1$, έχουμε

$$0=\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}(-1)^{k}=\binom{20}{0}-\binom{20}{1}+\binom{20}{2}-\binom{20}{3}+\cdots-\binom{20}{19}+\binom{20}{20}\Rightarrow$$

$$\binom{20}{0}+\binom{20}{2}+\binom{20}{4}+\cdots+\binom{20}{20}=\binom{20}{1}+\binom{20}{3}+\binom{20}{5}+\cdots+\binom{20}{19}.$$

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P=\frac{2^{19}-1}{2^{20}-1}.$$ ■

Άσκηση 11

Σε μια οικογένεια με τρία παιδιά υπάρχει ένα τουλάχιστον αγόρι. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι όλα αγόρια;

Λύση

Αν με *α* συμβολίσουμε το αγόρι και με *κ* το κορίτσι, ο δειγματικός χώρος θα είναι

$$\Omega = \{ααα, αακ, ακκ, κκκ\}.$$

Αν τώρα A είναι το ενδεχόμενο «όλα είναι *α*», δηλ. $A = \{ααα\}$, και B το ενδεχόμενο «ένα τουλάχιστον *α*», δηλ. $B = \{ααα, αακ, ακκ\}$, ζητάμε την πιθανότητα $P(A/B)$ για την οποία έχουμε

$$P(A/B)=\frac{|A\cap B|}{|B|}=\frac{1}{3}.$$ ■

Άσκηση 12

Από μια τράπουλα με 52 χαρτιά επιλέγουμε τυχαία ένα χαρτί και μετά ένα δεύτερο,

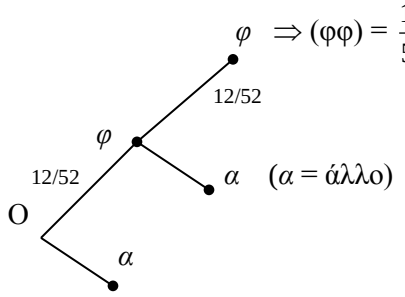
i) με επανατοποθέτηση

ii) χωρίς επανατοποθέτηση.

Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξουμε δύο φιγούρες;

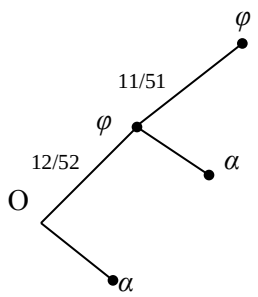
Λύση

α) με επανατοποθέτηση, έχουμε



$\Rightarrow (φφ) = \frac{12}{52}\cdot\frac{12}{52}=\frac{3}{13}\cdot\frac{3}{13}=\frac{3^2}{13^2}$, διότι υπάρχουν και στις δύο επιλογές 12 $φ$ ($φ$ = φιγούρα)

β) με επανατοποθέτηση, έχουμε



$\Rightarrow P(\varphi\varphi) = \frac{12}{52}\cdot\frac{11}{51} = \frac{12\cdot 11}{52\cdot 51} = \frac{11}{13\cdot 17}$, διότι υπάρχουν 12 φ στα 52 κατά την 1η επιλογή και 11 φ στα 51 κατά τη 2η επιλογή.

■

Άσκηση 13

Στο σύνολο των φοιτητών ενός πανεπιστημίου, το 30% είναι πρωτοετείς, το 25% δευτεροετείς, το 25% τριτοετείς και το 20% τεταρτοετείς. Το 50% των πρωτοετών, το 30% των δευτεροετών το 10% των τριτοετών και το 2% των τεταρτοετών διδάσκονται μαθηματικά. Ποια είναι η πιθανότητα ένας φοιτητής να διδάσκεται μαθηματικά;

Λύση

Έστω το ενδεχόμενο M: «ο φοιτητής διδάσκεται μαθηματικά» και A_1, A_2, A_3, A_4 τα ενδεχόμενα ο φοιτητής να είναι πρωτοετής, δευτεροετής, τριτοετής και τεταρτοετής, αντίστοιχα. Θεωρώντας τη συλλογή των A_1, A_2, A_3, A_4 ως μια διαμέριση του δ. χ. και το M ένα ενδεχόμενο του π.τ. έχουμε

$$P(M) = P(A_1)\cdot P(M/A_1) + P(A_2)\cdot P(M/A_2) + P(A_3)\cdot P(M/A_3) + P(A_4)\cdot P(M/A_4)$$

$$= 0.3\cdot 0.5 + 0.25\cdot 0.3 + 0.25\cdot 0.1 + 0.2\cdot 0.02 = 0.254.$$

Παρατήρηση. Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το αντίστοιχο δενδρόγραμμα. ■

Άσκηση 14

Το 5% ενός πληθυσμού έχει προσβληθεί από μια ασθένεια. Το τεστ ελέγχου που χρησιμοποιείται είναι κατά 95% ακριβές (δηλ. στο 95% αυτών που έχουν προσβληθεί το τεστ είναι θετικό και στο 95% αυτών που δεν έχουν προσβληθεί το τεστ είναι αρνητικό). Αν το τεστ ενός ατόμου δείχνει θετικό, ποια είναι η πιθανότητα να έχει προσβληθεί από την ασθένεια;

Λύση

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα,

T = «το τεστ είναι θετικό»
N = «το τεστ είναι αρνητικό»
D = «έχει προσβληθεί από την ασθένεια»
H = «δεν έχει προσβληθεί από την ασθένεια»

Θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα $P(D \mid T)$ ένα άτομο να έχει προσβληθεί από την ασθένεια με δεδομένο ότι το τεστ είναι θετικό. Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε,

$$\begin{aligned} P(T \mid D) &= 0.95, & P(N \mid D) &= 0.05, \\ P(T \mid H) &= 0.05, & P(N \mid H) &= 0.95, \\ P(D) &= 0.05, & P(H) &= 0.95. \end{aligned}$$

Έτσι, από τον κανόνα του Bayes, προκύπτει ότι η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$
\begin{aligned}
P(D \mid T) &= \frac{P(T \mid D)P(D)}{P(T \mid H)P(H) + P(T \mid D)P(D)} \\
&= \frac{(0.95)(0.05)}{(0.05)(0.95) + (0.95)(0.05)} \\
&= \frac{0.0475}{0.0475 + 0.0475} = \frac{0.0475}{0.095} = 0.5.
\end{aligned}
$$

■

Άσκηση 15

Ο παίκτης Α ρίχνει δύο ζάρια και ζητά από τον παίκτη Β να μαντέψει (χωρίς να βλέπει το αποτέλεσμα)

i) την ένδειξη ενός εκ των δύο ζαριών (οποιουδήποτε). Ποια είναι η πιθανότητα επιτυχίας του Β;

ii) την ένδειξη ενός εκ των δύο ζαριών (οποιουδήποτε) αφού του ανακοινώσει το άθροισμα των ενδείξεων που έχουν φέρει τα δύο ζάρια. Πώς μπορεί ο Β να μεγιστοποιήσει την πιθανότητα επιτυχίας;

Λύση

i) Ο δειγματικός χώρος του π.τ είναι

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\} \times \{1, 2, \ldots, 6\}$$

όπου για κάθε $(s, t) \in \Omega$, το s αναπαριστά την ένδειξη του 1ου και το t την ένδειξη του 2ου ζαριού.

Για $k = 1, 2, \ldots, 6$, θεωρούμε τα ενδεχόμενα

A_k : «η ένδειξη του 1ου ζαριού είναι k»,
B_k : «η ένδειξη του 2ου ζαριού είναι k» και
$\Gamma_k = A_k \cup B_k$: «η ένδειξη οποιουδήποτε από τα δύο ζάρια είναι k».

Ανεξάρτητα από το ποια είναι η τιμή (ένδειξη) k που επιλέγει (μαντεύει) ο Β, η πιθανότητα να είναι αυτή η σωστή, είναι

$$P(\Gamma_k) = P(A_k \cup B_k) = P(A_k) + P(B_k) - P(A_k \cap B_k)$$

$$= 6/36 + 6/36 - 1/36 = 11/36$$

αφού,

$|\Omega| = 36$

$|A_k| = 6$, διότι $A_k = \{(k, x) : x = 1, 2, \ldots, 6\}$,

$|B_k| = 6$, διότι $B_k = \{(x, k) : x = 1, 2, \ldots, 6\}$, και

$|A_k \cap B_k| = 1$, διότι $A_k \cap B_k = \{(k, k)\}$,

ii) Είναι χρήσιμο να σχηματίσουμε τον πίνακα με τα δυνατά αθροίσματα των ενδείξεων:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Ας υποθέσουμε ότι ο παίκτης Α ανακοινώνει στον παίκτη Β ότι το άθροισμα των ενδείξεων είναι 4. Για να δούμε ποια είναι η καλύτερη στρατηγική από τη μεριά του Β, θεωρούμε το ενδεχόμενο

$$E_m : \text{«το άθροισμα των ενδείξεων είναι } m\text{»}, \text{ για } m = 2, 3, \ldots, 12$$

και τη δεσμευμένη κατανομή πιθανότητας με δεδομένο το E_4. Πρόκειται ουσιαστικά για την ομοιόμορφη κατανομή επί του συνόλου {(1, 3), (2, 2), (3, 1)}, όπου οι αριθμοί 1 και 3 εμφανίζονται σε δύο ζεύγη και ο αριθμός 2 μόνο σε ένα ζεύγος. Επομένως,

$$P(\Gamma_1 | E_4) = P(\Gamma_3 | E_4) = 2/3$$

ενώ

$$P(\Gamma_2 | E_4) = 1/3$$

και

$$P(\Gamma_4 | E_4) = P(\Gamma_5 | E_4) = P(\Gamma_6 | E_4) = 0.$$

Άρα, αν το άθροισμα είναι 4, το καλύτερο που έχει να κάνει ο Bob είναι να μαντέψει το 1 ή το 3, που θα είναι σωστό με πιθανότητα 2/3.

Παρόμοια, αν το άθροισμα είναι 5, τότε θεωρούμε τη δεσμευμένη κατανομή πιθανότητας με δεδομένο το E_5, που είναι ουσιαστικά η ομοιόμορφη κατανομή επί του συνόλου {(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)}. Σε αυτή την περίπτωση ο Bob θα πρέπει να επιλέξει έναν από τους αριθμούς k = 1, 2, 3, ή 4, με τον καθένα να είναι σωστός με πιθανότητα

$$P(\Gamma_k | E_5) = 2/4 = 1/2$$

Αν το άθροισμα είναι 6, τότε θεωρούμε τη δεσμευμένη κατανομή πιθανότητας με δεδομένο το E_6, που είναι ουσιαστικά η ομοιόμορφη κατανομή επί του συνόλου {(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)}. Σε αυτή την περίπτωση ο Bob θα πρέπει να επιλέξει έναν από τους αριθμούς k = 1, 2, 4, ή 5, με τον καθένα να είναι σωστός με πιθανότητα

$$P(\Gamma_k | E_5) = 2/5$$

Αν το άθροισμα είναι 7, τότε θεωρούμε τη δεσμευμένη κατανομή πιθανότητας με δεδομένο το E_7, που είναι ουσιαστικά η ομοιόμορφη κατανομή επί του συνόλου {(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)}. Σε αυτή την περίπτωση ο Bob θα πρέπει να επιλέξει έναν από τους αριθμούς k = 1, 2, 3, 4, 5, ή 6 με τον καθένα να είναι σωστός με πιθανότητα

$$P(\Gamma_k | E_5) = 2/6 = 1/3$$

Οι υπόλοιπες περιπτώσεις αντιμετωπίζονται με παρόμοια στρατηγική. ■