Ασκήσεις (2)

Άσκηση 1

Δείξτε ότι: i) $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$

ii) $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

Λύση

i)

Έστω $x \in A \cup (B \cap \Gamma)$.
Τότε $x \in A$ ή $x \in (B \cap \Gamma)$.
Οπότε $x \in A$ ή ($x \in B$ και $x \in \Gamma$).
Συνεπώς ($x \in A$ ή $x \in$ B) και ($x \in A$ ή $x \in \Gamma$)
Όταν $x \in A$ ή $x \in B$, τότε $x \in (A \cup B)$ και όταν $x \in A$ ή $x \in \Gamma$, τότε $x \in (A \cup \Gamma)$.
Οπότε $x \in (A \cup B)$ και $x \in (A \cup \Gamma)$.
Επομένως $x \in (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$.
Άρα $A \cup (B \cap \Gamma) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$. (1)

Έστω τώρα $x \in (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$.
Τότε $x \in (A \cup B)$ και $x \in (A \cup \Gamma)$.
Οπότε ($x \in A$ ή $x \in B$) και ($x \in A$ ή $x \in \Gamma$).
Συνεπώς $x \in A$ ή ($x \in B$ και $x \in \Gamma$).
Όταν $x \in B$ και $x \in \Gamma$ τότε $x \in (B \cap \Gamma)$, οπότε $x \in A$ ή $x \in (B \cap \Gamma)$.
Άρα $x \in A \cup (B \cap \Gamma)$.
Επομένως $(A \cup B) \cap (A \cup \Gamma) \subseteq A \cup (B \cap \Gamma)$. (2)
Από (1) και (2) συνεπάγεται ότι $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$.

ii)

Έστω $x \in A \cap (B \cup \Gamma)$.
Τότε $x \in A$ και $x \in (B \cup \Gamma)$.
Οπότε $x \in A$ και ($x \in B$ ή $x \in \Gamma$).
Συνεπώς ($x \in A$ και $x \in$ B) ή ($x \in A$ και $x \in \Gamma$)
Όταν $x \in A$ και $x \in B$, τότε $x \in (A \cap B)$ ή όταν $x \in A$ και $x \in \Gamma$, τότε $x \in (A \cap \Gamma)$.
Οπότε $x \in (A \cap B)$ ή $x \in (A \cap \Gamma)$.
Επομένως $x \in (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$.
Άρα $A \cup (B \cap \Gamma) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$. (3)

Έστω τώρα $x \in (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$.
Τότε $x \in (A \cap B)$ ή $x \in (A \cap \Gamma)$.
Οπότε ($x \in A$ και $x \in B$) ή ($x \in A$ και $x \in \Gamma$).
Συνεπώς $x \in A$ και ($x \in B$ ή $x \in \Gamma$).
Όταν $x \in B$ ή $x \in \Gamma$ τότε $x \in (B \cup \Gamma)$, οπότε $x \in A$ και $x \in (B \cup \Gamma)$.
Άρα $x \in A \cap (B \cup \Gamma)$.
Επομένως $(A \cap B) \cup (A \cap \Gamma) \subseteq A \cap (B \cup \Gamma)$. (4)
Από (3) και (4) συνεπάγεται ότι $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$.

Παρατήρηση: Μπορούμε να εργαστούμε και με πίνακα αληθείας, όπως κάναμε στο Παράδειγμα 3.2 των Σημειώσεων. Έτσι,

i)

$A \cup (B \cap \Gamma) = \{x : (x \in A) \vee (x \in (B \cap \Gamma))\}$

$= \{x : (x \in A) \vee ((x \in B) \wedge (x \in \Gamma))\}$

$(A \cup B) \cap (A \cup \Gamma) = \{x : (x \in (A \cup B)) \wedge (x \in (A \cup \Gamma))\}$

$= \{x : ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge ((x \in A) \vee (x \in \Gamma))\}$

Για τις προτάσεις τώρα, $p := (x \in A)$, $q := (x \in B)$ και $r := (x \in \Gamma)$, μπορούμε να βρούμε έναν πίνακα αληθείας προκειμένου να δείξουμε τη λογική ισοδυναμία των σύνθετων προτάσεων $R := p \vee (q \wedge r)$ και $S = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (βλ. Πίνακα 1.1). Συνεπώς, τα κατηγορήματα που ορίζουν τα σύνολα $A \cup (B \cap \Gamma)$ και $(A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$ είναι ισοδύναμα. Επομένως, $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$.

Πίνακας 1.1

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$R := p \vee (q \wedge r)$	$S := (p \vee q) \wedge (q \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

ii)

Εργαζόμαστε παρόμοια. ■

Άσκηση 2

Δείξτε ότι $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

Λύση

Έχουμε διαδοχικά

$(A - B) \cup (B - A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$ (ορισμός της διαφοράς συνόλων)

$= ((A \cap B^c) \cup B)) \cap ((A \cap B^c) \cup A^c))$ (επιμεριστικός νόμος)

$= ((A \cup B) \cap (B^c \cup B)) \cap ((A \cup A^c) \cap (B^c \cup A^c))$ (επιμεριστικός νόμος)

$= ((A \cup B) \cap U) \cap (U \cap (B^c \cup A^c))$ (νόμοι συμπληρώματος)

$= (A \cup B) \cap (B^c \cup A^c)$ (νόμοι συμπληρώματος)

$= (A \cup B) \cap (B \cap A)^c$ (νόμος De Morgan)

$= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$ (αντιμεταθετικός νόμος)

$= (A \cup B) - (A \cap B)$ (ορισμός της διαφοράς συνόλων)

Παρατήρηση: Μπορούμε να εργαστούμε και με τρόπους παρόμοιους με αυτούς της Άσκησης 1. ■

Άσκηση 3

Αν $|U| = 692$, $|A| = 300$, $|B| = 230$, $|\Gamma| = 370$, $|A \cap B| = 150$, $|A \cap \Gamma| = 180$, $|B \cap \Gamma| = 90$, $|A \cap B^c \cap \Gamma^c| = 10$, όπου $|X|$ είναι ο πληθικός αριθμός του συνόλου X, βρείτε ότι

i) $|A \cap B \cap \Gamma| = 40$

ii) $|A^c \cap B \cap \Gamma^c| = 30$

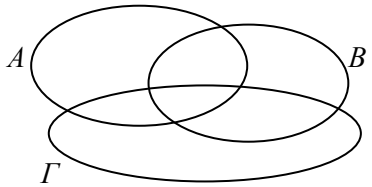
iii) $|A^c \cap B^c \cap \Gamma^c| = 172$

iv) $|(A \cap B) \cup (A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)| = 340$

Λύση

i)

Από το διάγραμμα του Venn προκύπτει ότι



$|A| = |A \cap B^c \cap \Gamma^c| + |B \cap A| + |A \cap \Gamma| - |A \cap B \cap \Gamma|$, οπότε

$|A \cap B \cap \Gamma| = |A \cap B^c \cap \Gamma^c| + |B \cap A| + |A \cap \Gamma| - |A|$

$= 10 + 150 + 180 - 300 = 40.$

ii)

Από το διάγραμμα του Venn προκύπτει ότι

$|B| = |A^c \cap B \cap \Gamma^c| + |B \cap \Gamma| + |B \cap A| - |A \cap B \cap \Gamma|$, οπότε

$|A^c \cap B \cap \Gamma^c| = |B| + |A \cap B \cap \Gamma| - |B \cap \Gamma| - |B \cap A| = 230 + 40 - 150 - 90 = 30.$

iii)

Είναι $|A \cup B \cup \Gamma| = |A| + |B| + |\Gamma| - |A \cap B| - |B \cap \Gamma| - |A \cap \Gamma| + |A \cap B \cap \Gamma|$

$= 300 + 230 + 370 - 150 - 90 - 180 + 40 = 520.$

Επομένως

$|A^c \cap B^c \cap \Gamma^c| = |U| - |A \cup B \cup \Gamma| = 692 - 520 = 172.$

iv)

Είναι $|(A \cap B) \cup (A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)| = |A \cap B| + |B \cap \Gamma| + |A \cap \Gamma| - 2|A \cap B \cap \Gamma|$

$= 150 + 90 + 180 - 2 \cdot 40 = 340.$ ■

Άσκηση 4

i) Τι μπορούμε να πούμε για τα μη κενά σύνολα A και B αν $A \times B = B \times A$;

ii) Τα μη κενά σύνολα A, B και Γ ικανοποιούν την $A \times B = A \times \Gamma$. Έπεται αναγκαία ότι $B = \Gamma$; Εξηγήστε την απάντησή σας.

Λύση

i)

Τα στοιχεία του $A \times B$ είναι της μορφής (a, b) όπου $a \in A$ και $b \in B$. Αν τώρα, $A \times B = B \times A$ τότε $(a, b) \in B \times A$. Επομένως, $a \in B$ και $b \in A$. Το μόνο συμπέρασμα που μπορούμε να πούμε είναι ότι $A = B$.

ii)

Τα στοιχεία του $A \times \Gamma$ είναι της μορφής (a, c) όπου $a \in A$ και $c \in \Gamma$. Αν τώρα, $A \times B = A \times \Gamma$ τότε $(a, c) \in A \times B$ και έτσι $c \in B$. Επομένως, $\Gamma \subseteq B$. Αντιστρέφοντας τους ρόλους των B και Γ στο παραπάνω επιχείρημα παίρνουμε ότι $B \subseteq \Gamma$. Συνεπώς, $B = \Gamma$. ■

Άσκηση 5

Αποδείξτε τις ακόλουθες ταυτότητες για οποιαδήποτε σύνολα A, B και Γ:

i) $A \times (B \cap \Gamma) = (A \times B) \cap (A \times \Gamma)$

ii) $(A \cup B) \times \Gamma = (A \times \Gamma) \cup (B \times \Gamma)$

Λύση

i)

Έστω $x \in A \times (B \cap \Gamma)$.
Τότε $x = (a, t)$ όπου $a \in A$ και $t \in B \cap \Gamma$.
Επομένως, $x \in A \times B$ και $x \in A \times \Gamma$.
Με άλλα λόγια, $x \in (A \times B) \cap (A \times \Gamma)$.
Αυτό αποδεικνύει το γεγονός ότι $A \times (B \cap \Gamma) \subseteq (A \times B) \cap (A \times \Gamma)$.

Αντιστρόφως, αν $x \in (A \times B) \cap (A \times \Gamma)$ τότε $x \in A \times B$ και $x \in A \times \Gamma$.
Οπότε, $x = (a, t)$ όπου $a \in A$, και $t \in B$ και $t \in \Gamma$.
Επομένως, $x = (a, t)$ όπου $a \in A$, και $t \in B \cap \Gamma$.
Με άλλα λόγια, $x \in A \times (B \cap \Gamma)$.
Αυτό αποδεικνύει το γεγονός ότι $(A \times B) \cap (A \times \Gamma) \subseteq A \times (B \cap \Gamma)$.

Επομένως, $A \times (B \cap \Gamma) = (A \times B) \cap (A \times \Gamma)$.

ii)

Έστω $x \in (A \cup B) \times \Gamma$.
Τότε $x = (s, c)$ όπου $s \in A \cup B$ και $c \in \Gamma$.
Είτε $s \in A$, οπότε $x \in A \times \Gamma$, ή $s \in B$, οπότε $x \in B \times \Gamma$.
Επομένως, $x \in A \times \Gamma$ ή $x \in B \times \Gamma$.
Με άλλα λόγια, $x \in (A \times \Gamma) \cup (B \times \Gamma)$.
Αυτό αποδεικνύει το γεγονός ότι $A \times (B \cap \Gamma) \subseteq (A \times \Gamma) \cup (B \times \Gamma)$.

Αντιστρόφως, αν $x \in (A \times \Gamma) \cup (B \times \Gamma)$ τότε $x \in A \times \Gamma$ ή $x \in B \times \Gamma$.
Οπότε, $x = (s, c)$ όπου s ανήκει στο A ή στο B, και $c \in \Gamma$.
Επομένως, $x = (s, c)$ όπου $s \in A \cup B$ και $c \in \Gamma$.
Με άλλα λόγια, $x \in (A \cup B) \times \Gamma$.
Αυτό αποδεικνύει το γεγονός ότι $(A \times \Gamma) \cup (B \times \Gamma) \subseteq (A \cup B) \times \Gamma$.
Επομένως, $A \times (B \cap \Gamma) = (A \times \Gamma) \cup (B \times \Gamma)$. ■

Άσκηση 6

Έχουμε 9 μπάλες αριθμημένες από το 1 ως το 9 και 3 κουτιά Α, Β, Γ. Το κουτί Α χωράει 4 μπάλες, το Β 3 και το Γ 2. Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε τις μπάλες στα κουτιά;

Λύση

Ξεκινώντας από το κουτί Α, οι δυνατοί τρόποι να το γεμίσουμε, είναι όσα τα υποσύνολα με 4 στοιχεία από τα 9 $\rightarrow \binom{9}{4}$.

Για το Β, οι δυνατοί τρόποι είναι όσα τα υποσύνολα με 3 στοιχεία από τα υπόλοιπα 5 (= 9 – 4) $\rightarrow \binom{5}{3}$.

Στο κουτί Γ, οι δυνατοί τρόποι είναι όσα τα υποσύνολα με 2 στοιχεία από τα υπόλοιπα 2 (= 9 – 4 – 3) $\rightarrow \binom{2}{2}$.

Άρα το πλήθος των τρόπων είναι :

$$\binom{9}{4}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2}=\frac{9!}{4!5!}\cdot\frac{5!}{3!2!}\cdot\frac{2!}{2!0!}\frac{9!}{4!3!2!}=1260\,. \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 7

Έχουμε 6 μπάλες αριθμημένες και θέλουμε να τις μοιράσουμε εξίσου σε τρία κουτιά Α, Β, Γ. Με πόσους τρόπους μπορούμε;

Λύση

Οι δυνατοί τρόποι είναι, όπως και στην προηγούμενη άσκηση

$$\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}=\frac{6!}{2!2!2!}=90.$$

Παρατήρηση. Στην άσκηση αυτή, δύο διαφορετικές διατεταγμένες διαμερίσεις που αποτελούνται από τα ίδια υποσύνολα, είναι:

$$\begin{array}{ccc} A & B & \Gamma \\ \{1,2\} & \{3,4\} & \{5,6\} \\ \{3,4\} & \{1,2\} & \{5,6\} \end{array}$$

Έτσι αν τα κουτιά δεν τα έχουμε ονοματίσει, τότε οι δύο παραπάνω διαμερίσεις δίνουν έναν τρόπο και το πλήθος των τρόπων θα είναι,

$$\frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}}{3!}=\frac{90}{6}=15. \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 8

Θέλουμε να χωρίσουμε 10 φοιτητές σε τρεις ομάδες με 3, 3 και 4 φοιτητές σε κάθε ομάδα αντίστοιχα. Με πόσους τρόπους μπορούμε;

Λύση

Το πλήθος των ομάδων, σύμφωνα και με όσα είπαμε στις δύο προηγούμενες ασκήσεις, θα είναι,

$$\frac{\binom{10}{3}\cdot\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{4}}{2!}=\frac{10!}{3!3!4!2!}=2100.$$

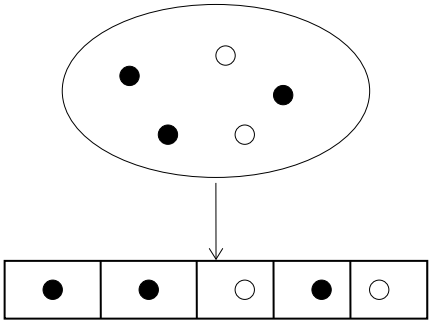
■

Άσκηση 9

Έχουμε 3 κόκκινα και 2 άσπρα μπαλάκια και θέλουμε να τα τοποθετήσουμε σε 5 θήκες που είναι σε σειρά. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτή η τοποθέτηση;

Λύση

Μια τυχαία τοποθέτηση είναι αυτή του σχήματος,



Οι δυνατοί τρόποι τοποθέτησης των τριών κόκκινων στις πέντε θήκες είναι, $\binom{5}{3}=\frac{5!}{2!3!}=10$ και αυτοί είναι όλοι οι τρόποι, γιατί κάθε φορά θα τοποθετούμε τις υπόλοιπες δύο άσπρες κατά μοναδικό τρόπο (αφού $\binom{2}{2}=1$). Χρήσιμο είναι να παρατηρήσουμε ότι, επειδή $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήξουμε αν τοποθετήσουμε πρώτα τις δύο άσπρες και μετά τις υπόλοιπες τρεις κόκκινες:

$$\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!3!}\cdot 1=\binom{5}{3}=10.$$

■

Άσκηση 10

Πόσους επταψήφιους αριθμούς είναι δυνατό να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας δυο φορές το ψηφίο 3, τρεις φορές το 5 και δυο φορές το 8;

Λύση

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, το πλήθος των αριθμών αυτών είναι,

$$\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2}=\frac{7!}{2!5!}\cdot\frac{5!}{3!2!}\cdot\frac{2!}{2!0!}=\frac{7!}{2!3!2!}=210.$$

■

Άσκηση 11

Ρίχνουμε ένα νόμισμα πέντε φορές διαδοχικά. Πόσες είναι οι περιπτώσεις όπου εμφανίζονται τρεις το πολύ κορώνες;

Λύση

Είναι,

περιπτώσεις με 0 κορώνες: $\binom{5}{0}\cdot\binom{5}{5}=1$ (ΓΓΓΓΓ)

" " 1 " $\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{4}=5$ (ΚΓΓΓΓ)

" " 2 " $\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{3}=10$ (ΚΚΓΓΓ)

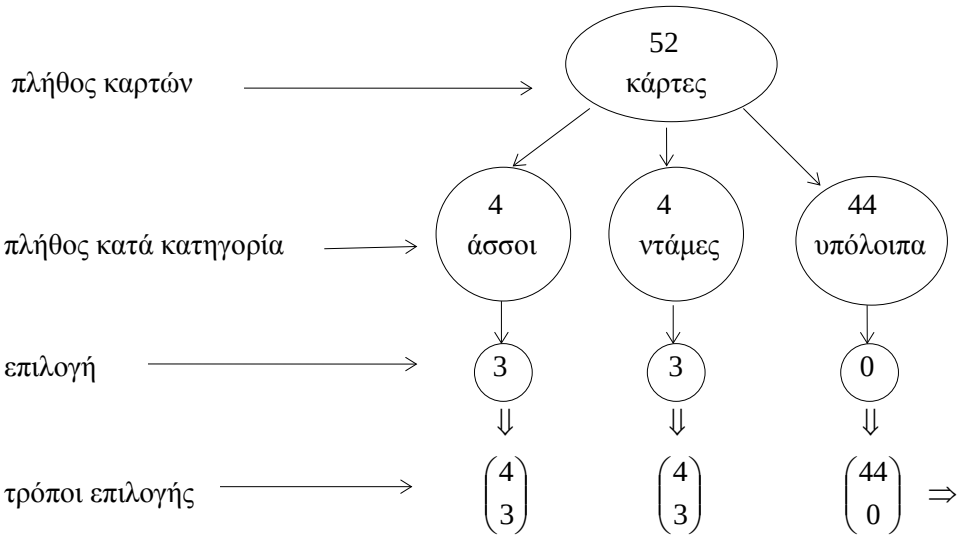
" " 3 " $\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2}=10$ (ΚΚΚΓΓ)

Άρα οι δυνατές περιπτώσεις είναι 26. ■

Άσκηση 12

Από μια τράπουλα (με 52 κάρτες) επιλέγουμε τυχαία 6 κάρτες. Πόσες περιπτώσεις υπάρχουν αυτές να αποτελούνται από 3 άσσους και 3 ντάμες;

Λύση



$$\Rightarrow \mathrm{N} = \binom{4}{3}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{44}{0} = \frac{4!}{3!1!}\cdot\frac{4!}{3!1!}\cdot\frac{44!}{0!44!} = \frac{3!4}{3!}\cdot\frac{3!4}{3!}\cdot 1 = 4\cdot 4 = 16.$$ ■

Άσκηση 13

Από ένα σύνολο A με $|A| = n$ επιλέγουμε ένα μέχρι το πολύ k στοιχεία ($k \le n$) και από ένα δεύτερο σύνολο B με $|B| = m$ επιλέγουμε t ακριβώς στοιχεία ($t \le m$). Με πόσους τρόπους μπορούμε να κάνουμε αυτή την επιλογή;

Λύση

Μπορούμε να κάνουμε τις εξής επιλογές:

1 από το Α και t από το Β ⟶ $\binom{n}{1}\cdot\binom{m}{t}$ τρόποι

2 " " " " t " " " $\longrightarrow$ $\binom{n}{2}\cdot\binom{m}{t}$ "

… …

k " " " " t " " " $\longrightarrow$ $\binom{n}{k}\cdot\binom{m}{t}$ "

Συνολικά είναι, $\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{k}\right]\cdot\binom{m}{t}$ τρόποι.

Ειδικά αν $k = n$ τότε οι τρόποι θα είναι,

$$\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}\right]\cdot\binom{m}{t}=\left[2^n-\binom{n}{0}\right]\cdot\binom{m}{t}=\left(2^n-1\right)\cdot\binom{m}{t}.$$ ■

Άσκηση 14

Πόσους επταψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε αν πάρουμε δύο ψηφία από τα {1, 3, 5, 7}, τρία από τα {2, 5, 9}, ένα από τα {4, 8} και ένα από τα {6} χωρίς να έχουμε επανάληψη ψηφίων;

Λύση

Το ζητούμενο πλήθος θα είναι:

$$\binom{3}{2}\cdot\binom{3}{3}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1}\cdot 7!=\frac{3!}{2!1!}\cdot\frac{3!}{3!0!}\cdot\frac{2!}{1!1!}\cdot\frac{1!}{1!0!}\cdot 7!=3\cdot 2\cdot 7!$$ ■

Άσκηση 15

Πόσες λέξεις με πέντε γράμματα μπορούμε να σχηματίσουμε, χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικά φωνήεντα και τρία διαφορετικά σύμφωνα;

Λύση

Το ζητούμενο πλήθος των λέξεων είναι,

$$\binom{7}{2}\cdot\binom{17}{3}\cdot 5!$$

γιατί το ελληνικό αλφάβητο έχει 7 φωνήεντα (από τα οποία επιλέγουμε τα 2) και 17 σύμφωνα (από τα οποία επιλέγουμε τα 3). ■

Άσκηση 16

Θέλουμε να βάλουμε σε σειρά τρεις μαθητές της Α τάξης, δύο της Β και τέσσερις της Γ, έτσι ώστε οι μαθητές της ίδιας τάξης να είναι μαζί. Με πόσους τρόπους μπορούμε;

Λύση

Οι διατάξεις κατά τάξη είναι:

ΑΑΑΒΒΓΓΓΓ, ΑΑΑΓΓΓΓΒΒ, ΒΒΑΑΑΓΓΓΓ, ΒΒΓΓΓΓΑΑΑ, ΓΓΓΓΑΑΑΒΒ, ΓΓΓΓΒΒΑΑΑ

δηλαδή το πλήθος τους είναι 3! (όσες οι μεταθέσεις των Α, Β, Γ) και σε κάθε μια απ' αυτές αντιστοιχούν 3! μεταθέσεις των μαθητών της Α τάξης, 2! μεταθέσεις των μαθητών της Β τάξης και 4! μεταθέσεις των μαθητών της Γ τάξης. Άρα το πλήθος των τρόπων είναι

$$3!3!2!4! \cdot = 1728.$$

■

Άσκηση 17

Να βρεθεί το πλήθος των τρόπων με τους οποίους k μη διακεκριμένα αντικείμενα μπορούν να τοποθετηθούν σε n υποδοχές, με τον περιορισμό ότι,

i) καμία υποδοχή δεν θα μείνει κενή ($k \geq n$)

ii) μία υποδοχή θα μείνει κενή ($k \geq n - 1$)

Λύση

i)

Για να βρούμε το ζητούμενο πλήθος, πρώτα τοποθετούμε ένα αντικείμενο σε κάθε υποδοχή, οπότε μας μένουν $k - n$ αντικείμενα. Ο αριθμός των τρόπων να διανεμηθούν αυτά στις n υποδοχές είναι,

$$\binom{n+(k-n)-1}{k-n} = \binom{k-1}{k-n} = \binom{k-1}{n-1}.$$

ii)

Για την περίπτωση τώρα της μίας άδειας υποδοχής, τοποθετούμε ($n - 1$) αντικείμενα σε $n - 1$ υποδοχές. Υπάρχουν n διαφορετικοί τρόποι για να γίνει αυτό, αφού καθορίζονται από την κενή υποδοχή, και μας μένουν $k - n + 1$ αντικείμενα. Αυτά είναι δυνατό να τοποθετηθούν στις $n - 1$ υποδοχές κατά

$$\binom{(n-1)+(k-n+1)-1}{k-n+1} = \binom{k-1}{n-2}$$

Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι τελικά,

$$n \cdot \binom{k-1}{n-2}.$$

■

Άσκηση 18

Να βρεθεί το άθροισμα των τετραψήφιων αριθμών που έχουν ψηφία διαφορετικά ανά δύο και σχηματίζονται με τα ψηφία 1, 3, 5, 7.

Λύση

Το πλήθος των τετραψήφιων αριθμών με τελευταίο ψηφίο το 1 είναι ίσο με το πλήθος των μεταθέσεων των 3, 5, 7, δηλ. 3!. Αν αυτοί προστεθούν θα δώσουν ως άθροισμα τελευταίων ψηφίων

$$1 \cdot 3!$$

Ομοίως, το πλήθος των τετραψήφιων αριθμών με ψηφίο δεκάδων το 1 θα είναι 3!, οπότε αν αυτοί προστεθούν θα δώσουν ως άθροισμα των ψηφίων των δεκάδων $10 \cdot 3!$ και παρόμοια για το άθροισμα των ψηφίων των εκατοντάδων και των χιλιάδων θα είναι $100 \cdot 3!$ και $1000 \cdot 3!$, αντίστοιχα.

Συνεπώς το άθροισμα όλων των τετραψήφιων αριθμών οι οποίοι έχουν ψηφίο μονάδων το 1, ψηφίο δεκάδων το 1, ψηφίο εκατοντάδων το 1 και ψηφίο χιλιάδων το 1, είναι

$$S_1 = 1\cdot 3! + 10\cdot 3! + 100\cdot 3! + 1000\cdot 3!$$

$$= (1 + 10 + 100 + 1000)\cdot 3!$$

$$= 1111\cdot 3!$$

Ανάλογα και για τα άλλα ψηφία θα είναι:

Για το 3, $S_3 = 3\cdot 3! + 3\cdot 10\cdot 3! + 3\cdot 100\cdot 3! + 3\cdot 1000\cdot 3!$

$$= (3 + 30 + 300 + 3000)\cdot 3!$$

$$= 3333\cdot 3!$$

Για το 5, $S_5 = 5555\cdot 3!$ και για το 7, $S_7 = 7777\cdot 3!$.

Επομένως το ζητούμενο άθροισμα θα είναι

$$S = S_1 + S_3 + S_5 + S_7 = 1111\cdot 3! + 3333\cdot 3! + 5555\cdot 3! + 7777\cdot 3!$$

$$= (1 + 3 + 5 + 7)\cdot 1111\cdot 3! = 106656.$$

■