# Ασκήσεις (3)

## Άσκηση 1

i) Δείξτε ότι η ακολουθία 0, 1, 3, 7, …, $2^n - 1$, …, $n \in \mathbb{N}$, ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$\alpha_n = 2\alpha_{n-1} + 1, \ \forall n \geq 1.$$

ii) Δείξτε ότι η ακολουθία 2, 3, 4, 5, …, $2 + n$, …, $n \in \mathbb{N}$, ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$\alpha_n = 2\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}, \ \forall n \geq 2.$$

*Λύση*

i)

Είναι

$$\alpha_n = 2^n - 1$$

και

$$\alpha_{n-1} = 2^{n-1} - 1$$

οπότε

$$2\alpha_{n-1} + 1 = 2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 2 + 1 = 2^n - 1 = \alpha_n.$$

ii)

Είναι

$$\alpha_n = 2 + n$$

και

$$\alpha_{n-1} = 2 + n - 1 = 1 + n, \ \alpha_{n-2} = 2 + n - 2 = n$$

οπότε

$$2\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2} = 2(1 + n) - n = 2 + 2n - n = 2 + n = \alpha_n.$$

■

## Άσκηση 2

Η ακολουθία Fibonacci είναι μια ακολουθία που ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}, \ \forall n \geq 2.$$

i) Εξηγείστε γιατί είναι

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \alpha_{n-1}, \ \forall n \geq 1.$$

ii) Γράψτε τη σχέση που εκφράζει τον $\alpha_{n+2}$ συναρτήσει των $\alpha_{n+1}$ και $\alpha_n$.
iii) Γράψτε τη σχέση που εκφράζει τον $\alpha_{n+3}$ συναρτήσει των $\alpha_{n+2}$ και $\alpha_{n+1}$.
iv) Βρείτε τον τύπο για τον γενικό όρο $a_n$ αν είναι $a_0 = 0$ και $a_1 = 1$.

*Λύση*

i)

Αναθέτοντας στη μεταβλητή $n$ την τιμή $n + 1$ η δεδομένη αναδρομική σχέση γίνεται

$$\alpha_{n+1} = \alpha_{n+1-1} + \alpha_{n+1-2}, \ n + 1 \geq 2$$

ή

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \alpha_{n-1}, \ n \geq 1.$$

ii)

Αναθέτοντας στη μεταβλητή $n$ την τιμή $n + 2$ η δεδομένη αναδρομική σχέση γίνεται

$$\alpha_{n+2} = \alpha_{n+2-1} + \alpha_{n+2-2},\ n + 1 \geq 2$$

ή

$$\alpha_{n+1} = \alpha_{n+1} + \alpha_n,\ n \geq 1.$$

iii)

Παρόμοια αναθέτοντας στη μεταβλητή $n$ την τιμή $n + 3$ η δεδομένη αναδρομική σχέση γίνεται

$$\alpha_{n+3} = \alpha_{n+3-1} + \alpha_{n+3-2},\ n + 3 \geq 2$$

ή

$$\alpha_{n+3} = \alpha_{n+2} + \alpha_{n+1},\ n \geq -1.$$

iv)

Πρέπει να λύσουμε την αναδρομική εξίσωση $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}$ με αρχικές συνθήκες $a_0 = 0$ και $a_1 = 1$. Η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση είναι

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$$

με χαρακτηριστική εξίσωση

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης βρίσκουμε ότι είναι $\rho_1 = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ και $\rho_2 = \left(1-\sqrt{5}\right)/2$, οπότε η γενική λύση της ομογενούς αναδρομικής εξίσωσης είναι της μορφής

$$a_n = c_1 \cdot \rho_1^n + c_2 \cdot \rho_2^n.$$

Για να προσδιορίσουμε τις σταθερές $c_1$ και $c_2$ χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες και έχουμε

$$a_0 = 0 = c_1 + c_2$$

$$a_1 = 1 = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Λύνοντας το σύστημα αυτό βρίσκουμε

$$c_1 = 1/\sqrt{5},\ c_2 = -1/\sqrt{5}.$$

Συνεπώς, ο τύπος της ακολουθίας Fibonacci είναι

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \qquad \blacksquare$$

## Άσκηση 3

Βρείτε τον τύπο για τον γενικό όρο $a_n$ της ακολουθίας $(a_n)$ της οποίας ο αναδρομικός ορισμός είναι

$$\begin{cases} a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + 4a_{n-2} - 8a_{n-3} + 3, \ \forall n \geq 3 \end{cases}$$

*Λύση*

Η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση είναι

$$a_n - 2a_{n-1} - 4a_{n-2} + 8a_{n-3} - 3 = 0$$

με χαρακτηριστική εξίσωση

$$x^3 - 2x^2 - 2x + 8 = 0$$

Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι $\rho_1 = -2$ (απλή) και $\rho_2 = 2$ (διπλή), οπότε η γενική λύση της ομογενούς αναδρομικής εξίσωσης είναι της μορφής

$$a_n^H = A_1(-2)^n + A_2 2^n + A_3 n 2^n$$

και μια μερική λύση της μη ομογενούς αναδρομικής εξίσωσης είναι

$$a_n^P = A$$

γιατί το μη γραμμικό τμήμα της αναδρομικής σχέσης είναι, $f(n) = 3$. Αντικαθιστώντας τη μερική αυτή λύση στη μη ομογενή εξίσωση, προκύπτει

$$A = 2A + 4A - 8A + 3 \Leftrightarrow A = 1$$

Συνεπώς η γενική λύση είναι της μορφής

$$a_n = a_n^H + a_n^P = A_1(-2)^n + A_2 2^n + A_3 n 2^n + 1.$$

Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες, $a_0 = 0$ και $a_1 = a_2 = 1$, έχουμε

$$\begin{cases} a_0 = 0 = A_1 + A_2 + 1 \\ a_1 = 1 = -2A_1 + 2A_2 + 1 \\ a_2 = 4A_1 + 4A_2 + 8A_3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = -\dfrac{1}{4} \\ A_2 = -\dfrac{3}{4} \\ A_3 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Βρίσκουμε λοιπόν ότι ο τύπος της ακολουθίας είναι τελικά

$$a_n = -\frac{1}{4}(-2)^n - \frac{3}{4}2^n + \frac{1}{2}n2^n + 1.$$

■

## Άσκηση 4

Να βρεθεί ο γενικός όρος $a_n$ της ακολουθίας που ορίζεται αναδρομικά με τις

$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = -2, a_2 = -1 \\ a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}, \quad n \geq 3 \end{cases}$$

*Λύση*

Η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση είναι

$$a_n + 3a_{n-1} + 3a_{n-2} + a_{n-3} = 0$$

με χαρακτηριστική εξίσωση

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$$

Η εξίσωση αυτή έχει μια ρίζα $\rho_1 = -1$ (τριπλή), αφού $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$, οπότε η γενική λύση της αναδρομικής εξίσωσης είναι της μορφής

$$a_n = c_1(-1)^n + c_2 n(-1)^n + c_3 n^2(-1)^n$$

Για να προσδιορίσουμε τις σταθερές $c_1$, $c_2$ και $c_3$, χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες και έχουμε

$$a_0 = 1 = c_1$$

$$a_1 = -2 = -c_1 - c_2 - c_3$$

$$a_2 = -1 = c_1 + 2c_2 + 4c_3.$$

Λύνοντας το σύστημα αυτό βρίσκουμε

$$c_1 = 1,\ c_2 = 3,\ c_3 = -2.$$

Συνεπώς, η λύση της αναδρομικής σχέσης είναι η ακολουθία

$$a_n = \left(1 + 3n - 2n^2\right)(-1)^n.$$ ■

## Άσκηση 5

Να βρεθεί ο γενικός όρος $\alpha_n$ της ακολουθίας που ορίζεται αναδρομικά με τις

$$\begin{cases} a_0 = 2,\ a_1 = 5,\ a_2 = 15 \\ a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}, \quad n \geq 3 \end{cases}$$

*Λύση*

Η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση είναι

$$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$$

με χαρακτηριστική εξίσωση

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης βρίσκουμε εύκολα ότι είναι $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 2$ και $\rho_3 = 3$, οπότε η γενική λύση της ομογενούς αναδρομικής εξίσωσης είναι της μορφής

$$a_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot 2^n + c_3 \cdot 3^n.$$

Για να προσδιορίσουμε τις σταθερές $c_1$, $c_2$ και $c_3$, χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες και έχουμε

$$a_0 = 2 = c_1 + c_2 + c_3$$

$$a_1 = 5 = c_1 + 2c_2 + 3c_3$$

$$a_2 = 15 = c_1 + 4c_2 + 9c_3.$$

Λύνοντας το σύστημα αυτό βρίσκουμε

$$c_1 = 1,\ c_2 = -1,\ c_3 = 2.$$

Συνεπώς, η λύση της συγκεκριμένης αναδρομικής σχέσης είναι

$$a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n.$$ ■

## Άσκηση 6

Βρείτε τον τύπο για τον γενικό όρο $a_n$ της ακολουθίας $(a_n)$ της οποίας ο αναδρομικός ορισμός είναι

$$\begin{cases} a_0 = 1, \quad a_1 = 2 \\ a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n, \ \forall n \geq 2 \end{cases}$$

*Λύση*

Η δεδομένη αναδρομική σχέση είναι μη γραμμική και η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση είναι

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$$

με χαρακτηριστική εξίσωση

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι $\rho_1 = 2$ και $\rho_2 = 3$, οπότε η γενική λύση της ομογενούς αναδρομικής εξίσωσης είναι της μορφής

$$a_n^H = A_1 3^n + A_2 2^n$$

και μια μερική λύση της μη ομογενούς αναδρομικής εξίσωσης είναι

$$a_n^P = A \cdot 7^n$$

γιατί το μη γραμμικό τμήμα της αναδρομικής σχέσης είναι, $f(n) = 7^n$. Αντικαθιστώντας τη μερική αυτή λύση στη μη ομογενή εξίσωση, προκύπτει

$$A \cdot 7^n = 5A \cdot 7^{n-1} - 6A \cdot 7^{n-2} + 7^n \Leftrightarrow 49A = 35A - 6A + 49 \Leftrightarrow A = 49/20$$

Συνεπώς η γενική λύση είναι της μορφής

$$a_n = a_n^H + a_n^P = A_1 3^n + A_2 2^n + (49/20) \cdot 7^n .$$

Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες, $a_0 = 1$ και $a_1 = 2$, έχουμε

$$\begin{cases} a_0 = 1 = A_1 + A_2 + 49/20 \\ a_1 = 2 = 3A_1 + 2A_2 + (49/20) \cdot 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = -\dfrac{49}{20} \\ A_2 = \dfrac{54}{5} \end{cases}$$

Βρίσκουμε λοιπόν ότι ο τύπος της ακολουθίας είναι τελικά

$$a_n = (54/5) \cdot 3^n - (49/20) \cdot 2^n + (49/20) \cdot 7^n .$$

■

## Άσκηση 7

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

δείξτε ότι

$$A^n = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} \end{bmatrix}, \quad \forall n \geq 2$$

όπου $(\alpha_n)$ είναι η ακολουθία Fibonacci (βλ. Άσκηση 2).

*Λύση*

Κατ' αρχήν, η ακολουθία Fibonacci είναι η

$$(a_n):\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n \geq 2 \end{cases}$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Έστω $P(n)$ η πρόταση

$$A^n = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_{n+1} \end{bmatrix}.$$

*Βασικό βήμα.* Η πρόταση $P(1)$ είναι αληθής, γιατί

$$A^1 = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_0 + a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = A.$$

*Επαγωγικό βήμα.* Υποθέτουμε ότι η $P(n)$ είναι αληθής, δηλαδή ότι

$$A^n = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Θα δείξουμε ότι η $P(n+1)$ είναι αληθής, δηλαδή ότι

$$A^{n+1} = \begin{bmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} \end{bmatrix}.$$

Έχουμε,

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_{n+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} + a_n \\ a_{n+1} & a_n + a_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} \end{bmatrix} \qquad \{\text{από τον ορισμό της ακολουθίας } (\alpha_n)\}.$$

■

## Άσκηση 8

Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{k=50}^{100} k^2$.

*Λύση*

Είναι

$$\sum_{k=50}^{100} k^2 = \sum_{k=1}^{100} k^2 - \sum_{k=1}^{49} k^2 = \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} - \frac{49 \cdot 50 \cdot 99}{6} = 297925$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον τύπο

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

■

## Άσκηση 9

Υπολογίστε το άθροισμα

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}$$

*Λύση*

Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}$$

οπότε,

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{3}}+$$

$$\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+$$

$$\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}+$$

$$\vdots$$

$$\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}=\frac{n}{2(n+2)}$$

■

## Άσκηση 10

Δείξτε ότι

$$\frac{2}{3}n^{3/2}+\frac{1}{3}\le\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\le\frac{2}{3}n^{3/2}+\sqrt{n}-\frac{2}{3}.$$

*Λύση*

Γνωρίζουμε ότι όταν ένα άθροισμα μπορεί να εκφραστεί ως $\sum_{k=m}^{n} f(k)$, όπου $f$ είναι μια *γνησίως αύξουσα* συνάρτηση, μπορούμε να την προσεγγίσουμε με τη γνωστή, από την ανάλυση, ανισότητα

$$\int_{m-1}^{n} f(x)\,dx\le\sum_{k=m}^{n} f(k)\le\int_{m}^{n+1} f(x)\,dx$$

Για $2\leftarrow m$ και $f(x)=\sqrt{x}$ έχουμε

$$\int_{1}^{n}\sqrt{x}\,dx\le\sum_{k=2}^{n}\sqrt{k}\ \Rightarrow\ \left.\frac{x^{3/2}}{3/2}\right|_{1}^{n}\le\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}-\sqrt{1}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\left(n^{3/2}-1\right)+1 \le \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3}n^{3/2}+\frac{1}{3} \le \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \qquad (1)$$

Για $1 \leftarrow m$, $n \leftarrow n-1$ και $f(x)=\sqrt{x}$ έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{k} \le \int_1^n \sqrt{x}dx \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}-\sqrt{n} \le \frac{2}{3}\left(n^{3/2}-1\right) \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \le \frac{2}{3}\left(n^{3/2}-1\right)+\sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \le \frac{2}{3}n^{3/2}+\sqrt{n}-\frac{2}{3} \qquad (2)$$

Από (1) και (2) έπεται ότι

$$\frac{2}{3}n^{3/2}+\frac{1}{3} \le \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \le \frac{2}{3}n^{3/2}+\sqrt{n}-\frac{2}{3}. \qquad \blacksquare$$