Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ένα ψηφιακό κανάλι πρέπει να έχει χωρητικότητα 25Mbps. Το ίδιο κανάλι έχει φάσμα μεταξύ 19 MHz και 24 MHz. Α)Ποιος είναι ο απαιτούμενος λόγος σήματος προς θόρυβο σε dB για να λειτουργήσει το κανάλι και ποια η φασματική απόδοση του καναλιού; Β)Εάν η φασματική απόδοση του παραπάνω καναλιού γίνει 2bit/sec/Hz και το εύρος ζώνης του καναλιού γίνει 8MHz ποια είναι η νέα τιμή της χωρητικότητας του καναλιού;

Α) Η εξίσωση Shannon-Hartley παρέχει την απαιτούμενη σχέση ανάμεσα στη χωρητικότητα του καναλιού, σε bps, το εύρος ζώνης και το λόγο σήματος προς θόρυβο ως εξής

$C = B\log_2(SNR+1)$ (1)

Το φάσμα θα είναι του καναλιού θα είναι :

$B = 24\text{MH}z - 19MHz = 5MHz = 5\times 10^6\, Hz$

Λύνοντας την (1) ως προς το SNR έχουμε:

$\frac{C}{B} = \log_2(SNR+1) \Rightarrow SNR = 2^{\frac{C}{B}} - 1 = 2^5 - 1 = 31$ (2)

Μετατρέποντας τη (2) σε dB έχουμε:

$SNR_{dB} = 10\log(SNR) = 10\log(31) = 14.91dB$

Η φασματική απόδοση του καναλιού θα είναι :

C/B=25Mbps/5MHz=5 bit/sec/Hz

Β) C=2 bit/sec/Hz X 8MHz=16 Mbps

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ένα DVD-audio έχει συχνότητα δειγματοληψίας τα 192KHz, παράγει στερεοφωνικό ήχο και έχει 24bit ανά δείγμα. A)Να βρεθεί ο ρυθμός δεδομένων που απαιτείται για τη μετάδοση ενός DVD-audio B) Εάν το διαθέσιμο εύρος ζώνης του καναλιού μετάδοσης είναι 4.6MHz να βρεθεί ο ελάχιστος απαιτούμενος λόγος σήματος προς θόρυβο σε dB.

A) $C = 192000 \delta\varepsilon\iota\gamma\mu\alpha\tau\alpha / \sec \times 24 bit / \delta\varepsilon\iota\gamma\mu\alpha \times 2 \kappa\alpha\nu\alpha\lambda\iota\alpha = 9.21 Mbps$

B) Η εξίσωση Shannon-Hartley παρέχει την απαιτούμενη σχέση ανάμεσα στη χωρητικότητα του καναλιού, σε bps, το εύρος ζώνης και το λόγο σήματος προς θόρυβο ως εξής

$C = B\log_2(SNR+1)$ (1)

Λύνοντας την (1) ως προς το SNR έχουμε:

$$\frac{C}{B} = \log_2(SNR+1) \Rightarrow SNR = 2^{\frac{C}{B}} - 1 = 2^{\frac{9.21}{4.6}} - 1 \square \quad 3 \quad (2)$$

Μετατρέποντας τη (2) σε dB έχουμε:

$$SNR_{dB} = 10\log(SNR) = 10\log(3) = 4.77 dB$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

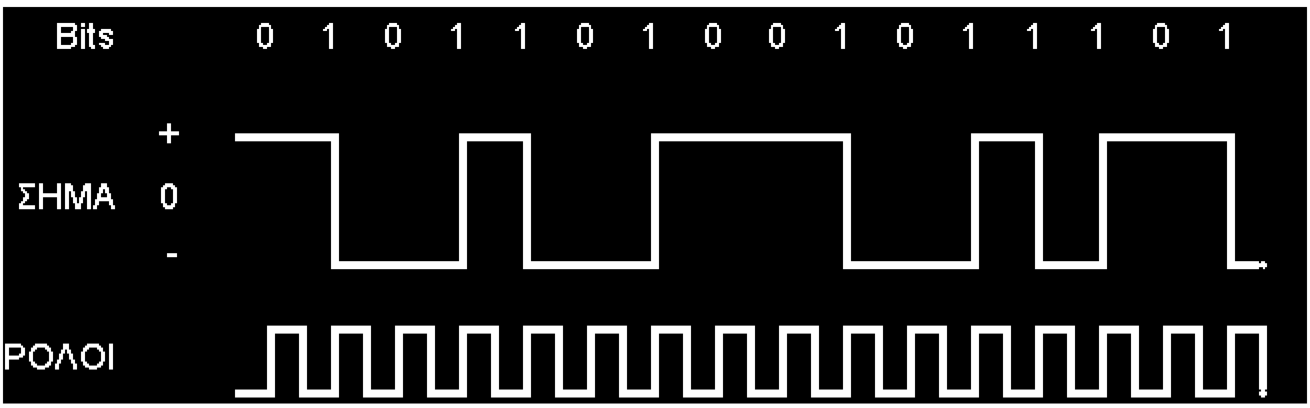
Για τα δυαδικά σήματα

α) 0101101001011101

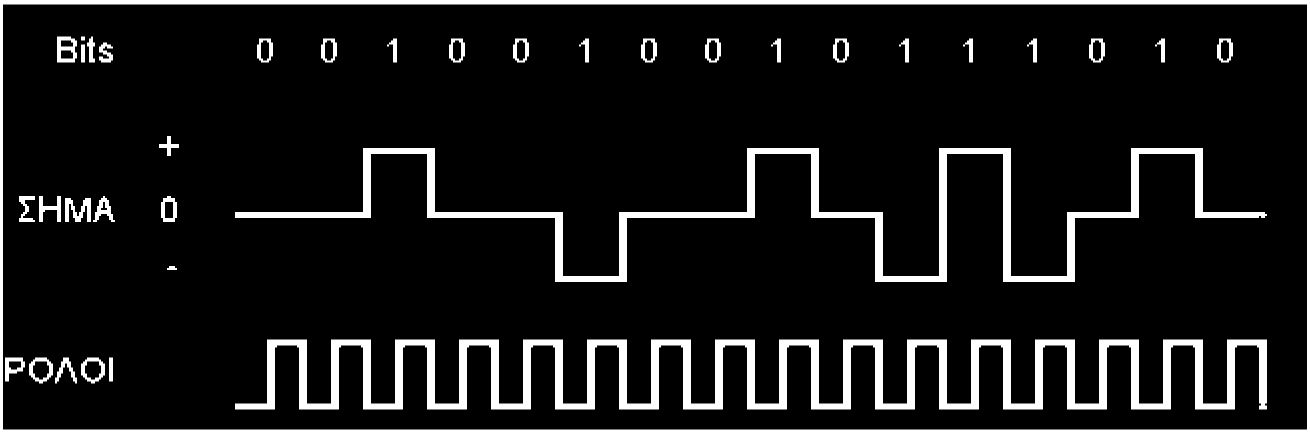
β) 0010010010111010

να δοθούν οι κωδικοποιημένες μορφές τους σύμφωνα με α) τον κώδικα NRZI β) τον κώδικα AMI

α)



β)



ΑΣΚΗΣΗ 4

Σήμα εισόδου με φάσμα 5.5 KHz απαιτούμενη δυναμική περιοχή 54 dB, μέγιστη τάση εξόδου δέκτη ±0,511 V. Υπολογίστε τη συχνότητα δειγματοληψίας, τη περίοδο δειγματοληψίας, το αριθμό bit του κώδικα, τη διακριτότητα και το σφάλμα κβαντισμού σε ένα σύστημα PCM.

Με το θεώρημα δειγματοληψίας καθορίζουμε την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας ως 2 x 5.5KHz=11KHz. Αρα θα έχουμε 11000δείγματα/sec.

Η περίοδος δειγματοληψίας θα είναι 1/11KHz=0.09msec

Για να βρούμε τον αριθμό των bit του κώδικα πρώτα πρέπει να προσδιορίσουμε την απόλυτη τιμή της δυναμικής περιοχής.

Η δυναμική περιοχή εκφρασμένη σε dB δίνεται από τη σχέση :

$$\Delta\Pi_{dB} = 20\log(\frac{V_{\max}}{V_{\min}}) \qquad (1)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές στην (1) έχουμε:

$$54db = 20\log(\frac{V_{\max}}{V_{\min}}) \rightarrow \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \Delta\Pi = 501.2$$

Η σχέση που καθορίζει την δυναμική περιοχή με τον αριθμό των bit είναι:

$\Delta\Pi = 2^{v} - 1$ (2)

Λύνοντας την (2) ως προς ν έχουμε τελικά:

$$\nu = \log(\Delta\Pi + 1) / \log 2 = 8,9$$

Διαλέγουμε τον αμέσως μεγαλύτερο ακέραιο ν=9. Χρειάζεται ακόμα ένα bit για τον καθορισμό του πρόσημου. Συνεπώς ο κώδικας θα είναι 10-bit και η δυναμική περιοχή που επιτύχαμε είναι:

$$\Delta\Pi_{dB} = 20\log(\Delta\Pi) = 20\log(2^9 - 1) = 20\log 511 = 54.16dB.$$

Για να προσδιορίσουμε τη διακριτότητα διαιρούμε τη μέγιστη τιμή της στάθμης εξόδου με το αριθμό των βημάτων κβαντισμού.

Διακριτότητα= $= \frac{V_{\max}}{\Delta\Pi} = \frac{V_{\max}}{2^\nu - 1} = \frac{0,511}{2^9 - 1}$

Άρα το σφάλμα κβαντισμού δεν μπορεί να είναι μικρότερο από το μισό του βήματος κβαντισμού, άρα μικρότερο των 0.5mV.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Ποιο είναι το εύρος ζώνης (“bandwidth”) του σήματος ομιλίας? Ποιος είναι ο ελάχιστος ρυθμός μετάδοσης σε bits per second, όταν το κάθε σύμβολο ομιλίας κωδικοποιείται σε 32 επίπεδα (PCM κωδικοποίηση)?... όταν κωδικοποιείται σε 64 επίπεδα?

Έχει αποδειχτεί πειραματικά πως 4 KHz είναι αρκετά για την μετάδοση του σήματος φωνής. Για ένα σήμα (πχ. φωνή) με εύρος βασικής ζώνης 4 KHz απαιτούνται τουλάχιστον 8 KHz συχνότητα δειγματοληψίας:

$$f_s\left(\frac{symbols}{sec}\right) \geq 8\ KHz \Rightarrow R \geq 8000\ \frac{symbols}{sec}$$

$$PCM32\ \cdot\ \log_2 32\ bits/symbol\ = 5\ \frac{bits}{symbol} \Rightarrow\ R \geq 40.000\ bps$$

$$PCM64\ \cdot\ \log_2 64\ bits/symbol\ = 6\ \frac{bits}{symbol} \Rightarrow\ R \geq 48.000\ bps$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Ένα CD έχει συχνότητα δειγματοληψίας 44KHz. Αυτό σημαίνει ότι η υψηλότερη συχνότητα που μπορεί να υπάρχει στο CD είναι:

Α) 44KHz

Β) 66MHz

Γ) 22KHz

Δ) 44MHz

ΑΣΚΗΣΗ 7

Ποιο εύρος ζώνης μπορεί να "κουβαλήσει" περισσότερη πληροφορία: Από 1 MHz-4 kHz έως 1 MHz +4 kHz ή από 1 GHz-4 kHz έως 1 GHz +4 kHz ?

Και οι δύο συχνοτικές περιοχές έχουν εύρος 8 KHz, συνεπώς η ροή πληροφορίας είναι η ίδια, σύφωνα ε το θεώρημα χωρητικότητας του Shannon.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Υπάρχει πλεονέκτημα στην χρησιμοποίηση ζώνης υψηλότερων συχνοτήτων για ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα?

Σε υψηλότερες συχνότητες, το διαθέσιμο εύρος ζώνης μεγαλώνει, δίνοντας την δυνατότητα για ταχύτερες επικοινωνίες.

ΑΣΚΗΣΗ 9

Ποιο είναι το εύρος ζώνης του ηλεκτρομαγνητικού σήματος της αστραπής? Ποιο είναι το πρακτικό αντίκτυπο της παραπάνω τιμής για ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα? Περιγράψτε τα είδη θορύβου σε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα. Τι είναι ο θόρυβος ενδοδιαμόρφωσης?

Αστραπή = στιγμιαίο ηλεκτρομαγνητικό σήμα = σήμα άπειρου εύρου ζώνης

Αυτό σημαίνει πως η αστραπή αποτελεί θόρυβο για οποιοδήποτε δέκτη!

- Θερμικός θόρυβος (εξαιτίας θερμικής ενέργειας στα πάσης φύσεως ηλεκτρόνια)
- Θόρυβος ενδοδιαμόρφωσης (εξαιτίας μη γραμμικότητας ενισχυτών, πομποδεκτών κλπ).
- Θόρυβος συνακρόασης… ("παρεμβολές")
- Κρουστικός θόρυβος (πχ. μια αστραπή)

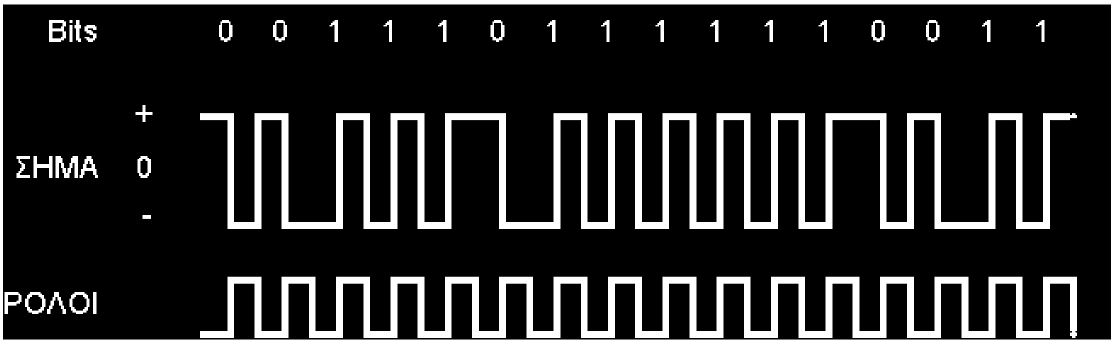
Διαβάστε τα είδη θορύβου από το (compus.uom.gr)

Ο θόρυβος ενδοδιαμόρφωσης είναι ο θόρυβος που δημιουργεί το ίδιο το τηλεπικοινωνιακό σύστημα, λόγω μη γραμμικότητας. Πχ. ένας ενισχυτής με απόκριση $y_1(t) = Ax(t) + B(x(t))^2$ αντί για $y_2(t) = Ax(t)$. Πχ. αν η είσοδος είναι $x(t) = \cos 2\pi f_0 t$ στο σύστημα με έξοδο $y_1(t)$, τότε παράγονται στην έξοδο συχνότητες που δεν υπήρχαν στην είσοδο (πχ. $2f_0$ *ή* $\emptyset$).

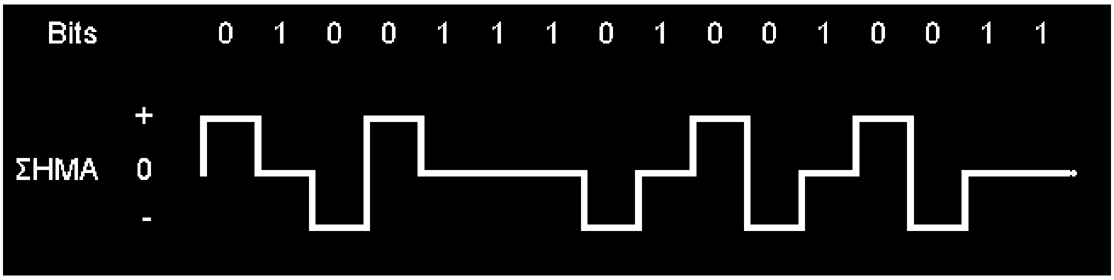
ΑΣΚΗΣΗ 10

Δίνονται τα παρακάτω κωδικοποιημένα σήματα α) με τον κώδικα Manchester και β) με τον κώδικα Pseudoternary. Να βρεθεί η ακολουθία των bits που κωδικοποιεί αυτό το σήμα.

α)



β)



ΑΣΚΗΣΗ 11

Υποθέστε ότι μια ψηφιοποιημένη εικόνα TV πρόκειται να μεταδοθεί από ένα πομπό που χρησιμοποιεί ένα πίνακα στοιχείων εικόνας (pixels) 480 x 500, όπου κάθε pixel μπορεί να πάρει μια από 32 τιμές έντασης. Υποθέστε ότι στέλνονται 35 εικόνες ανά δευτερόλεπτο (το σύστημα αυτό είναι κοντά στην πραγματικότητα της ψηφιακής τηλεόρασης). Ποιος είναι ο ρυθμός R (bps) του πομπού?

Βοήθεια: θεωρήστε την εικόνα σαν ένα πίνακα από 480 οριζόντιες γραμμές (με 500 σύμβολα η καθεμιά). Η αποστολή της εικόνας απαιτεί αποστολή όλων των γραμμών

D. 35 x (480 x 500) $\cdot \log_2 32 \cdot \frac{εικόνες}{sec} \cdot \frac{pixels}{εικόνες} \cdot \frac{bits}{pixels}$ = R = 42 Mbps.

ΑΣΚΗΣΗ 12

Ποιο είναι το ελάχιστο εύρος ζώνης που απαιτείται για να υποστηρισθεί μια ακολουθία δεδομένων ρυθμού 256 kbps χρησιμοποιώντας

(α) διπολική σηματοδοσία βασικής ζώνης τεσσάρων επιπέδων

(β) πολική σηματοδοσία βασικής ζώνης τεσσάρων επιπέδων

(γ) BPSK

(δ) QPSK

ε) 64-QAM

Η σηματοδοσία 4 επιπέδων δίνει 2 bits/symbol => 128000 symbols/sec => 64 kHz ελάχιστο εύρος σήματος βασικής ζώνης (ελάχιστο bandwidth = 0.5 baud rate για σήματα βασικής ζώνης, baud rate = symbols/sec).

Για BPSK, απαιτείται ένα φέρον και συνεπώς, σήμα διέλευσης ζώνης με εύρος ζώνης διπλάσιο από αυτό που απαιτείται για σήμα βασικής ζώνης (ελάχιστο bandwidth = baud rate για σήματα ζώνης διέλευσης, baud rate = symbols/sec).

Δηλ. 256 kbps = 256 ksymbols/sec => 256 kHz, εύρος ζώνης σήματος διέλευσης.

Για QPSK, ισχύει 2 bits/sec/Hz (ή 2bits/channel usage ή 2bits/2D), συνεπώς, 256/2 = 128 kHz. Ομοίως δουλεύουμε και για το 64-QAM (ή 6 bits/2D)=> 42,6 kHz.

Τα παραπάνω προϋποθέτουν ιδανικούς παλμούς βασικής ζώνης (a=0). Πρακτικά, χρησιμοποιούνται μη-ιδανικοί παλμοί για κάθε σύμβολο, αυξάνοντας το χρησιμοποιούμενο bandwidth, κατά a+1, όπου a είναι ο συντελεστής του παλμού (πχ. raised cosine ή Gaussian pulse) για κάθε σύμβολο (0≤a≤ 1).

ΑΣΚΗΣΗ 13

Υποθέστε ότι δεδομένα αποθηκεύονται σε δισκέτες 1,4 Mbyte που ζυγίζουν 30 gr η κάθε μια. Υποθέστε ότι ένα αεροπλάνο μεταφέρει 104 κιλά από τέτοιες δισκέτες με μια ταχύτητα 1000km/h σε μία απόσταση 5000km. Ποιος είναι ο ρυθμός μετάδοσης (bps) του συστήματος;

Θα βρούμε πρώτα την ποσότητα πληροφορίας που περιέχεται σε μια δισκέτα

1,4MB=1,4X1024KB=1,4X1024X1024bytes=1468006,4 bytes=11744051 bits

Στο αεροπλάνο υπάρχουν 104000gr δισκέτες άρα 104000/30=3466.66 δισκέτες

Ο αριθμός των δισκετών πρέπει να είναι ακέραιος άρα στρογγυλεύοντας το παραπάνω αποτέλεσμα θα

Είναι 3466 δισκέτες με χωρητικότητα 8388608bits η κάθε μία άρα συνολικά έχουμε:

11744051bitsX3466=40704880766 bits

Το αεροπλάνο θα φτάσει σε χρόνο t=s/u=5000km/1000km/h=5h=5X3600sec=18000sec

Άρα ο ρυθμός δεδομένων του συστήματος θα είναι:

R=40704880766 bits/18000sec=2261382.2bps=2.26Mbps

ΑΣΚΗΣΗ 14

Ένας πελάτης ζητεί μία μικροκυματική ραδιοζεύξη για να παρέχει ρυθμό δετάδοσης πληροφορίας 2 Mpbs σε ένα εύρος 400 kHz. Ο ελάχιστος λόγος σήματος προς θόρυβο στο κανάλι είναι 30 dB. Μπορεί το κανάλι να υποστηρίξει την απαιτούμενη χωρητικότητα, και εάν συμβαίνει αυτό, πόσες καταστάσεις συμβόλων θα απαιτούνται;

ΛΥΣΗ

Θεωρώντας τα 400 KHz ως το εύρος βασικής ζώνης, πρέπει να ισχύει (για $10\log_{10} S/N = 30 \Rightarrow S/N = 1000$),

$R < B\log(1 + S/N) = 400000\log_2(1 + 1000) \approx 3{,}9Mbps$

Η ζητούμενη ταχύτητα R είναι 2 Mbps, συνεπώς μια τέτοια ταχύτητα είναι εφικτή (R<C). Ο ρυθμός συμβόλων (baud rate), πρέπει να είναι 800 ksymbols/sec και επομένως απαιτείται πάνω από 2 bits/symbol. Για 3 bits/sample=> 8 επίπεδα.

Θεωρώντας ότι τα 400 kHz είναι εύρος ζώνης διέλευσης (πχ. καταλαμβάνεται ζώνη από f έως f+400 kHz), τότε το ισοδύναμο baud rate πρέπει να είναι 400 ksymbols/sec και επομένως απαιτούνται 5 bits/symbol έτσι ώστε να επιτευχθεί ταχύτητα 2 Mbps. Για 5 bits/symbol => 32 επίπεδα.

ΑΣΚΗΣΗ 15

Σκεφτείτε μια σειρά στοιχείων μμετάδοσης στην οποία η είσοδος έχει ένα επίπεδο ισχύος 8mW, το πρώτο στοιχείο είναι μια γραμμή μετάδοσης με απώλεια 29dB, το δεύτερο στοιχείο είναι ένας ενισχυτής με απολαβή 70 dB και το τρίτο στοιχείο είναι μια γραμμή μετάδοσης με απώλεια 25 dB. Να υπολογίσετε την ισχύ εξόδου P2.

Το decibel είναι μια μέτρηση του λόγου μεταξύ δύο επιπέδων του σήματος

$$N_{dB} = 10\log\frac{P_2}{P_1}$$

$P_1 = \text{επίπεδο ισχύς εισόδου}$

$P_2 = \text{επίπεδο ισχύς εξόδου}$

Το καθαρό κέρδος ή η απώλεια είναι 70-29-25=16 dB

Συνεπώς

$$16 = 10\log\frac{P_2}{8}$$

$$P_2 = 318.5\,\text{mW}$$

ΑΣΚΗΣΗ 16

Περιγράψτε όλες τις μεταβλητές που συνδέει το θεώρημα χωρητικότητας καναλιού του Shannon, μαζί με τις μονάδες μέτρησής τους.

R ≤ $\mathrm{B}\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right) = B\log_2[1+\left(\frac{R}{B}\right)\left(\frac{E_b}{N_0}\right)]$

R: ρυθμός επικοινωνίας μεταξύ πομπών και δέκτη σε bps
B: το εύρος ζώνης του καναλιού, θεωρώντας κανάλι βασικής ζώνης σε Hz :
S: μέση ισχύς σε watt του σήματος στον δέκτη
N: // // θορύβου στον δέκτη
E_b: μέση ενέργεια ενός bitστον δέκτη, σε Joules
N_0: μέση πυκνότητα ισχύος θορύβου στον δέκτη, σε Watt/Hz

ΑΣΚΗΣΗ 17

Σας δίνετε ο λόγος ενέργειας bit E_b (Joule) προς πυκνότητα ισχύος θορύβου N_0 (Watt/Hz) (=Joule, αποδείξτε το), E_b/N_0 = -0.5 dB σε έναν δέκτη. Βρείτε ένα άνω όριο της φασματικής απόδοσης R/B (bps/Hz).

A) $\mathrm{R} \le \mathrm{B}\log_2[1+\left(\frac{R}{B}\right)\left(\frac{E_b}{N_0}\right)] => \frac{R}{B} \le \log_2[1+\left(\frac{R}{B}\right)\left(\frac{E_b}{N_0}\right)]$ (1)

$\frac{E_b}{N_0} = -0.5dB => -0.5 = 10\log_{10}\frac{E_b}{N_0} => 10^{-o.5/10} = \frac{E_b}{N_0} => \frac{E_b}{N_0} \approx 0.89$ (2)

(1) & (2) => $\frac{R}{B} \le \log_2\left[1+0.89\frac{R}{B}\right] = \frac{1}{\log_{10}2}\cdot\log_{10}\left(1+0.89\frac{R}{B}\right)$ =>

$$=> \frac{R}{B} \le 3.322\log_{10}(1+0.89\frac{R}{B})$$

Θέλουμε το άνω όριο για $\frac{R}{B}$. Προφανώς η παραπάνω ανισότητα/ισότητα ισχύει για $\frac{R}{B} = \emptyset$

$\frac{R}{B}$	$\le 3.322\log_{10}(1+0.89\frac{R}{B})$
0	*ΝΑΙ*
0.3	*ΝΑΙ*
0.5	*ΝΑΙ*
0.55	*ΝΑΙ*
0.6	*ΟΧΙ*

Συνεπώς κατά προσέγγιση,

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{B}} \le 0.55\frac{\mathrm{bps}}{\mathrm{Hz}}$$

Με χρήση υπολογιστή θα μπορούσα να βρω το άνω όριο με μεγαλύτερη ακρίβεια. Ξέρω πως υπάρχει άνω όριο καθώς το x μεγαλώνει πιο γρήγορα από το log(1+x) και συνεπώς αx≤log(1+βx) θα πάψει να ισχύει για αυξανόμενο x.

ΑΣΚΗΣΗ 18

Στην θεωρία μιλήσαμε για το όριο Shannon, την ελάχιστη σηματοθορυβική σχέση E_b/N_0 η οποία πρέπει να ικανοποιείται, ακόμη και όταν B-> +∞. Αποδείξτε ότι E_b/N_0 ≥ ln2, όταν B-> +∞. [Σημείωση: ln(x+1)≈x, όταν x->0, x>0]

Γνωρίζουμε από τις σημειώσεις του λογαρίθμου (compus.uom.gr) που σας δόθηκαν ότι ln(1+x)->x, όταν x→0⁺. Συνεπώς για $\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{B}} \to 0^+$ έχουμε

$$\frac{R}{B} \le \log_2(1+\frac{R}{B}\frac{E_b}{N_0}) = \frac{\ln(1+\frac{RE_b}{BN_0})}{ln2} \approx \frac{\frac{RE_b}{BN_0}}{ln2} => \boldsymbol{ln2} \le \frac{\boldsymbol{E_b}}{\boldsymbol{N_0}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 19

Σύμφωνα με αυτά που γνωρίζουμε για τις σειρές Fourier, οποιοδήποτε περιοδικό σήμα x(t) με περίοδο T_0 μπορεί να περιγραφεί από ένα άθροισμα τόνων, όπου ο καθένας έχει συχνότητα ακέραιο πολλαπλάσιο της βασικής $\omega_0=2\pi f_0=1/\ T_0$ (σειρές Fourier):

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k cosk\omega_0 t + \sum_{k-1}^{\infty} C_k sink\omega_0 t$$

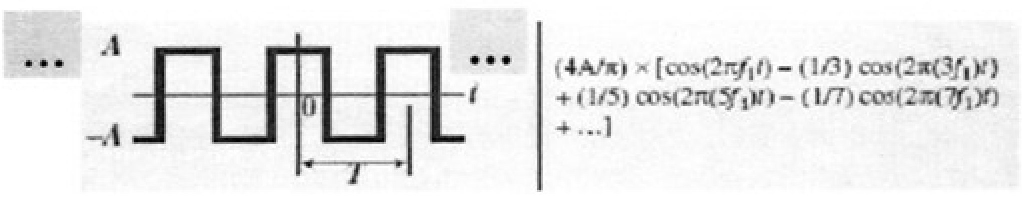
Επίσης γνωρίζουμε το θεώρημα του Parseval και ξέρουμε πως η <u>μέση ισχύς</u> του περιοδικού σήματος x(t),

Μέση ισχύς $\qquad \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\{x(t)\}^2 \mathrm{dt}$

μπορεί να εκφραστεί με βάση τους παραπάνω συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος x(t). Στην άσκηση αυτή σας δίνεται η σχέση μεταξύ μέσης ισχύος ενός περιοδικού σήματος και των παραπάνω συντελεστών (Θεώρημα Parseval):

$$A_0{}^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(B_k{}^2 + C_k{}^2) = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\{x(t)\}^2 \mathrm{dt}$$

Γνωρίζετε επίσης πως το ανάπτυγμα σε ημίτονα και συνημίτονα μιας περιοδικής παλμοσειράς, περιόδου T δίνεται από τον παρακάτω τύπο (Αποδείξτε το!). Θυμηθείτε: περιοδικό σήμα περιόδου T είναι το σήμα το οποίο επαναλαμβάνεται ανά χρονικό διάστημα T:



α) Ποιο είναι το θεωρητικό εύρος ζώνης της παλμοσειράς?

β) αποδείξτε πως το 90% (περίπου) της μέσης ισχύος του τετραγωνικού κύματος περιέχεται στην πρώτη (f_0) και τρίτη αρμονική ($3f_0$).

Βοήθεια: $\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

γ) ποιο είναι το εύρος ζώνης, πρακτικά, του τετραγωνικού κύματος (τετραγωνικής παλμοσειράς)?

δ) ποια είναι η πρακτική αξία των παραπάνω στα συστήματα τηλεπικοινωνίας)?

α) έστω x(t) η παραπάνω παλμοσειρά, η οποία είναι ένα περιοδικό σήμα (ένα σήμα το οποίο επαναλαμβάνεται κάθε T seconds), όπου $T=1/f_0$

Από την παραπάνω μαθηματική αναπαράσταση βλέπουμε πως το σήμα x(t) αποτελείται από περιττές αρμονικές της βασικής συχνότητας f_0, δηλαδή αποτελείται από τόνους με συχνότητα kf_0, όπου k περιττό.

Συνεπώς, το εύρος ζώνης είναι θεωρητικά άπειρο. Ωστόσο, το πλάτος κάθε περιττής αρμονικής μειώνεται όσο αυξάνεται το k. Συνεπώς, πρακτικά, οι αρμονικές υψηλότερης συχνότητας συνεισφέρουν λιγότερο και επομένως, το εύρος ζώνης είναι περιορισμένο και όχι άπειρο.

β) Παρατηρούμε πως $x(t)=\frac{kA}{\pi}[\cos(2\pi f_0 t) - \frac{1}{3}\cos(2\pi 3 f_0 t) + \frac{1}{5}\cos(2\pi 5 f_0 t) \ldots]$ =>

=> $x(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}(B_k \cos(k 2\pi f_0 t)) = \sum_{k=1}^{+\infty}(\frac{4A}{\pi}\frac{\pm 1}{(2k-1)})\cos(2\pi k f_0 t)$

Δηλ. $|B_k|=\frac{4A}{\pi}\frac{1}{2k-1}$ και πρόσημο $B_k = \frac{B_k}{|B_k|} = \pm 1$

Πχ. για k=1, $\frac{B_1}{B_1} = +1$ ενώ για k=3, $B_3=-\frac{1}{3}\frac{4A}{\pi}$ άρα $\frac{B_3}{|B_3|} = -1$

Παρατηρούμε επίσης πως $A_0=\varnothing$ και $C_k=\varnothing$ καθώς η παλμοσειρά δεν περιλαμβάνει ημίτονα (συνεπώς $C_k=\varnothing\ \forall k$), ούτε και κάποιο σταθερό όρο (d_c) (συνεπώς $A_0=\varnothing$).

Η άσκηση μιλά για ισχύ της παλμοσειράς. Μας δίνεται πως μέση ισχύς

$$x(t)=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\{x(t)\}^2\,dt = {A_0}^2 + \frac{1}{2}\sum({B^2}_k + {C^2}_k)$$

συνεπώς μέση ισχύς $x(t)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}{B^2}_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}(\frac{4A}{\pi})^2\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{2}(\frac{4A}{\pi})^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} =$

$\frac{1}{2}(\frac{4A}{\pi})^2\cdot\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}\right) = \frac{1}{2}(\frac{4A}{\pi})^2\cdot\frac{\pi^2}{8} = A^2$

Αν δεν θέλατε να μπλέξετε με υπολογισμούς, τότε θα μπορούσατε να σκεφτείτε ως εξής:

x(t): περιοδικό σήμα, άρα ας υπολογίσω ενέργεια και ισχύ σε μια περίοδο, καθώς το σήμα επαναλαμβάνεται (και συνεπώς η ενέργεια/ισχύς του δεν θα αλλάξει):

ισχύς = ενέργεια / χρόνο,

ενέργεια ανά περίοδο: $A^2\ T/2 + (-A)^2\ T/2 = 2\ A^2\ T/2 = A^2\ T$

ισχύς = ενέργεια περιόδου / περίοδο = $A^2\ T / T = A^2$

Η άσκηση ζητά το ποσοστό της ενέργειας /ισχύος στην $1^η$ και $3^η$ αρμονική:

$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}{B_k}^2 = \frac{1}{2}({B_1}^2 + {B_3}^2) = \frac{1}{2}[(4A/\pi)^2\cdot 1/1^2 + (4A/\pi)^2\cdot 1/3^2)] =$

= ½ $16A^2/\pi^2$ (1+ 1/9) = $8A^2/\pi^2$ (1 + 1/9) , άρα:

$$\frac{\frac{8A^2}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{9}\right)}{A^2} = \frac{8}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{9}\right) \approx 0.90 = 90\%$$

γ) Από το παραπάνω φαίνεται πως το 90% της ισχύος μιας παλμοσειράς περιόδου $T=1/f_0$, περιέχεται στην πρώτη (f_0) και Τρίτη αρμονική ($3f_0$), συνεπώς οι ανώτερες αρμονικές συνεισφέρουν μόνο 10%. Επομένως εύρος ζώνης έως $10f_0$ (δηλ. f_0, $3f_0$, $5f_0$, $7f_0$, $9f_0$) είναι πρακτικά αρκετά για να μεταδοθεί μια παλμοσειρά.

δ) Οι ψηφιακές επικοινωνίες βασίζονται στην χρήση και μετάδοση παλμοσειρών, συνεπώς είμαστε υποχρεωμένοι να μάθουμε τις βασικές τους ιδιότητες.

ΑΣΚΗΣΗ 20

Ένα ψηφιακό κυψελωτό σύστημα απαιτείται να λειτουργεί με φασματική απόδοση 6 bit/sec/Hz, για να χωρά ικανό αριθμό χρηστών ώστε να είναι επικερδής.

a) Ποια ελάχιστη τιμή του λόγου Eb/No πρέπει να προβλεφθεί κατά τη σχεδίαση, ώστε να διασφαλιστεί ότι οι χρήστες στις παρυφές της περιοχής κάλυψης θα έχουν επικοινωνία απαλλαγμένη από σφάλματα.

b) Εάν ο διαχειριστής του συστήματος επιθυμεί να πενταπλασιάσει τον αριθμό των χρηστών στο υπάρχον δίκτυο, πόσο περισσότερη ισχύ θα πρέπει να ακτινοβολεί ο σταθμός βάσης και οι συσκευές χειρός ώστε να διατηρηθεί η υπάρχουσα κάλυψη και η επικοινωνία να παραμείνει απαλλαγμένη από σφάλματα

Το θεώρημα Shannon-Hartley μπορεί να γραφεί με την μορφή

$$\frac{C}{B} = \log_2\left(1+\frac{C}{B}\frac{E_b}{N_0}\right) \qquad (1)$$

Λύνοντας την (1) ως προς την Eb/No έχουμε:

$$2^{\frac{C}{B}} = 1+\frac{C}{B}\frac{E_b}{N_0} \qquad \frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{\frac{C}{B}}-1}{\frac{C}{B}} \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας στη (2) έχουμε

$\frac{E_b}{N_0} = \frac{2^6-1}{6} = 10.5$ ή σε dB $\frac{E_b}{N_0} = 10\log(10.5) = 10.21dB$

Εάν ο διαχειριστής του συστήματος επιθυμεί να πενταπλασιάσει τον αριθμό των χρηστών στο υπάρχον δίκτυο τότε θα πρέπει να πενταπλασιαστεί και η φασματική απόδοση του συστήματος. Άρα θα είναι τώρα

C/B=30 bit/sec/Hz. Όμοια αντικαθιστώντας στη (2) έχουμε:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{30}-1}{30} = 35791394.1 = 75.53\text{dB}$$